Fisica Moderna

Vol. V

Cenni di Teoria dei Campi

E. Iacopini

25 novembre 2024

E io stesso ho osservato anche che ogni fatica
e tutta l'abilità messe in un lavoro
non sono che rivalità dell'uno con l'altro.
Anche questo è vanità e un correr dietro al vento.

Salomone, Ecclesiaste 4:4

La Filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto.
Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi ed altre figure geometriche, senza i quali mezi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto.

Il Saggiatore (1623)

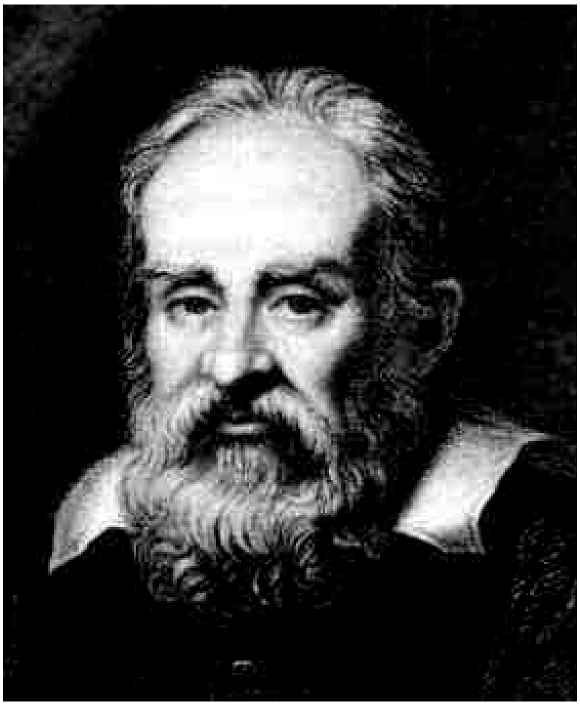

Figura 1: *Galileo Galilei (1564-1642)*

Indice

Capitolo 1

Cenni di Teoria dei Campi Classica

1.1 Introduzione

La Teoria Quantistica dei Campi (QFT) nasce dalla sintesi della teoria classica dei campi il cui paradigma principale è il campo elettromagnetico classico.

Il campo, che indicheremo per il momento genericamente con $\Phi(x)$, ma senza implicare con questo che esso non possa avere più componenti, viene visto, in ogni punto dello spazio-tempo, come una sorta di coordinata lagrangiana generalizzata e come tale, in MQ, esso è un operatore che agisce nello spazio di Hilbert dei vettori di stato.

La sua evoluzione, cioè le equazioni del campo, sono ottenute a partire da una opportuna densità lagrangiana, funzione reale (e dunque *autoaggiunta* nella sua trasposizione quantistica) e scalare di Lorentz (in modo da garantire equazioni di moto covarianti) del campo e delle sue derivate $\mathcal{L}(\Phi(x), \partial\Phi(x), x)$, attraverso il principio di minima azione, che fornisce, come dimostreremo nel paragrafo seguente, l'equazione

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi^\alpha)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^\alpha} = 0 \tag{1.1.1}$$

dove abbiamo riportato esplicitamente l'eventuale indice associato alle possibili componenti del campo Φ.

Sempre attraverso la densità lagrangiana possiamo anche definire l'impulso coniugato al campo (ricordiamo che il campo in ogni punto deve essere visto come una coordinata lagrangiana generalizzata ...)

$$\Pi^\alpha(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}^\alpha(x)} \tag{1.1.2}$$

e quindi stabilire l'algebra del campo, attraverso le regole di commutazione (o anticommutazione) canoniche.

Un concetto di carattere generale, certamente cruciale per la comprensione del quadro attuale delle particelle elementari e delle loro interazioni, è poi quello della *simmetria*[1,2]. A questo proposito, uno dei risultati senza dubbio più importanti ottenuti nel ventesimo secolo, circa il legame fra sim-

[1] A questo proposito, ricordiamo che, come avremo modo di giustificare in seguito, un operatore $\mathcal{O}$ che descriva un isomorfismo unitario o antiunitario dello spazio di Hilbert degli stati in sé, è detto costituire una *simmetria* del sistema considerato.
Essa è *conservata* o *esatta* se lo stato di minima energia (vuoto) è sia non degenere che $\mathcal{O}$-invariante, mentre la lagrangiana del sistema risulta invariante in forma (vedi oltre) sotto la trasformazione in questione, ovvero se l'operatore $\mathcal{O}$ commuta con l'hamiltoniana del sistema e dunque ne rispetta la dinamica.
Si parla poi, di *simmetria rotta spontaneamente* se la lagrangiana è invariante in forma ma lo stato di minima energia è degenere e non invariante sotto $\mathcal{O}$. Infine, la simmetria è detta semplicemente *rotta* se la lagrangiana non è invariante in forma sotto $\mathcal{O}$.

[2] La parola *simmetria* significa *"della stessa misura"* ed esprimeva, nel mondo greco, il concetto di commensurabilità, proporzione, rapporto armonico di dimensioni ... e per questo era legato anche al concetto stesso di bellezza. Da allora, il concetto di simmetria si è evoluto e certamente una sua definizione fra le più espressive e chiare è quella operativa di Hermann Weyl, secondo il quale *una entità possiede una simmetria se c'è qualcosa che possiamo fargli in modo che, dopo che l'abbiamo fatta, l'entità in questione continua ad apparire esattamente come prima.* In questa accezione, simmetria e invarianza risultano evidentemente sinonimi, ma torneremo in seguito su questo aspetto.
Una simmetria che in Natura è molto comune è quella *destra-sinistra*, cioè la simmetria bilaterale o chirale: una specie di prendi 2 e paghi 1 ... !
L'insieme delle operazioni che lasciano invariante un sistema assegnato costituisce, come oggi sappiamo, un *gruppo*, ed è proprio questo strumento matematico che ha reso, poi, estremamente fertile il concetto di simmetria in Fisica.
Ma come si è arrivati al concetto di gruppo di simmetria ?
Dal tentativo di trovare la formula risolutiva delle equazioni algebriche di grado superiore al quarto ! Vediamo brevemente come è successo.
L'idea dell'equazione di primo grado e quindi l'idea stessa dell'incognita era nota, forse, già in epoca babilonese (1650 a.C., papiro di Ahmes) e si sapeva anche come risolverla

$$ax + b = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -b/a$$

Anche l'equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$ si sa risolvere da tempo immemorabile, certamente da Diofanto (250 d.C.) in poi, anche se venivano cercate solo soluzioni positive (superfici, lunghezze, compensi ...) per cui accadeva talvolta che le soluzioni erano due, talvolta una sola e talvolta addirittura nessuna !
E' solo da Gauss $(1777 - 1855)$ in poi, infatti, che sappiamo che, pur di cercare le soluzioni nel posto giusto, cioè nel campo complesso, una equazione di grado n ammette n soluzioni (eventualmente in parte coincidenti). Comunque, ben prima di Gauss, cioè fin dall'inizio del sedicesimo secolo, si sapeva risolvere l'equazione generale di terzo grado (Del Ferro, Tartaglia, Cardano) e anche quella di quarto grado (Ferrari, 1545); però, quanto all'equazione di quinto grado, ogni sforzo continuava miseramente a fallire !
Furono Ruffini (1799) e Abel (1824) i quali, indipendentemente, dimostrarono che ogni sforzo per trovare una risolvente generale era vano, ma la vera spiegazione del motivo del fallimento fu trovata successivamente da Evariste Galois (1832), il quale affrontò il problema da un lato completamente nuovo, ed è qui che entra, appunto, la simmetria !
Egli provò a caratterizzare le equazioni attraverso le proprietà di permutazione dei polinomi a coefficienti razionali che si annullano sulle soluzioni dell'equazione data.
Sembra un discorso complicato ma non lo è: prendiamo, per esempio, la generica equazione (propria) di secondo grado $x^2 + bx + c = 0$ con b, c razionali.

metrie e dinamica è il teorema di Noëther (1918) (vedi oltre).
Questo Teorema vale per simmetrie "continue", descritte cioè da un gruppo di Lie e afferma che a ogni parametro del gruppo, ovvero a ogni suo generatore, è associata una corrente conservata. Più precisamente, esso stabilisce che, data una lagrangiana $\mathcal{L}\left(\phi(x), \partial_\mu\phi(x), x\right)$ la quale sia invariante in forma sotto le trasformazioni descritte da un gruppo di Lie $G(\omega^a)$, allora, se l'azione della generica trasformazione infinitesima del gruppo descritta dal parametro ω^a è tale che

$$x \to x' \quad : \quad x'^\mu = x^\mu \; + \; \Xi^\mu_a(x)\, d\omega^a \;\; \equiv \;\; x^\mu \; + \; \delta x^\mu \tag{1.1.3}$$

$$\phi^\alpha(x) \to {\phi'}^\alpha(x') \quad : \quad {\phi'}^\alpha(x') \; = \; (\delta^\alpha_\beta \; + \; \Gamma^\alpha_{a\beta}\, d\omega^a)\; \phi^\beta(x) \equiv \phi^\alpha(x) + \delta\phi^\alpha(x) \tag{1.1.4}$$

ne segue che le quadricorrenti

$$\Theta^\mu_a(x) \;\; \equiv \;\; \left[-\Gamma^\alpha_{a\beta}\, \phi^\beta(x) \;\; + \;\; \partial_\nu\phi^\alpha(x)\; \Xi^\nu_a(x)\right] \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^\alpha)} - \mathcal{L}\, \Xi^\mu_a(x) \tag{1.1.5}$$

sono tutte, separatamente conservate.

Se x_1 e x_2 sono le sue radici, allora

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 + bx + c \quad \Rightarrow \quad b = -(x_1 + x_2); \;\; c = x_1 x_2$$

dunque esistono almeno due polinomi razionali indipendenti di due variabili

$$P_1(\alpha, \beta) = \alpha + \beta + b; \quad P_2(\alpha, \beta) = \alpha\beta - c$$

che si annullano sulle soluzioni dell'equazione data, ed essi sono simmetrici per scambio.
L'idea di Galois fu dunque di considerare *tutti* i polinomi a coefficienti razionali che si annullano sulle radici dell'equazione data. Le permutazioni delle variabili del polinomio che lasciano invariante il suo valore (nullo) quando viene valutato sulle soluzioni dell'equazione costituiscono il *gruppo di Galois* associato all'equazione. Egli dimostrò, in generale, che questo gruppo coincide con il gruppo S_n delle permutazioni di n oggetti, dove n è il grado dell'equazione. Galois dimostrò altresì che le radici di un'equazione potevano essere espresse a partire dalle quattro operazioni ed estrazioni di radice su espressioni costruite con i suoi coefficienti se e solo se, ordinando il gruppo in sottogruppi normali (S è un sottogruppo normale se, dato comunque un elemento x del gruppo, allora $xSx^{-1} = S$) massimali, i rapporti fra le loro cardinalità erano numeri primi.
Nel caso di S_2, S_3 ed S_4 questo è vero, mentre da S_5 in poi questo diventa falso ...

E' dunque per questa strada che si giunse al concetto di *gruppo* e in particolare a quello di gruppo di simmetria. Ma una volta definito il gruppo, questa entità matematica astratta può venire slegata dalla sua particolare rappresentazione su un qualunque sistema assegnato, per cui si è finito oggi per separare il concetto di simmetria (operazione) da quello di invarianza (effetto dell'operazione sul sistema dato), anche se, talvolta, si continuano a confondere i due aspetti.

1.2 Le equazioni di Eulero-Lagrange per i campi classici

Supponiamo che la dinamica del campo $\phi^\alpha(x)$ sia descritta dalla densità lagrangiana

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}\left(\phi^\alpha(x), \partial_\mu \phi^\alpha(x), x\right) \tag{1.2.6}$$

Questo significa che le equazioni del moto per i campi si potranno ottenere dal principio di minima azione, il quale afferma che l'integrale di *azione*

$$\int_D \mathcal{L}(\phi^\alpha, \partial_\mu \phi^\alpha, x)\, d^4x \tag{1.2.7}$$

valutato partendo da una soluzione delle leggi del moto, è minimo (estremale) per variazioni dei campi $\delta\phi^\alpha$ che si annullano sul bordo Σ del dominio di integrazione, peraltro arbitrario (aperto in R^4) D, ovvero che

$$\begin{aligned} \delta & \int_D \mathcal{L}(\phi^\alpha, \partial_\mu \phi^\alpha, x)\, d^4x \;\equiv\; 0 \;\equiv \\ \equiv & \int_D \mathcal{L}(\phi^\alpha + \delta\phi^\alpha, \partial_\mu(\phi^\alpha + \delta\phi^\alpha), x)\, d^4x - \int_D \mathcal{L}(\phi^\alpha, \partial_\mu \phi^\alpha, x)\, d^4x \end{aligned} \tag{1.2.8}$$

con $\delta\phi^\alpha(x) = 0, \forall x \in \Sigma \equiv \overline{D} - D$.

Prima di procedere con la dimostrazione, iniziamo osservando che se due lagrangiane $\mathcal{L}$ and $\mathcal{L}'$ differiscono solo per una quadridivergenza $\partial_\mu F^\mu$, dove F^μ sono quattro funzioni arbitrarie dei campi e delle coordinate, allora $\mathcal{L}$ and $\mathcal{L}'$ sono equivalenti, nel senso che esse, attraverso il principio di minima azione, descrivono la stessa dinamica.

Questa conclusione è una conseguenza diretta del Teorema di Gauss generalizzato, il quale stabilisce che

$$\int_D \partial_\mu F^\mu\, d^4x \;\equiv\; \int_\Sigma F^\mu n_\mu\, d\sigma \tag{1.2.9}$$

dove n_μ è il versore di R^4 ortogonale (nella metrica euclidea di R^4) all'elemento di superficie $d\sigma \in \Sigma$. Per questa ragione, posto

$$\int_D \partial_\mu F^\mu\, d^4x \;=\; Int \tag{1.2.10}$$

ecco che Int dipende solamente dai valori di F^μ su Σ, dove $\delta\phi^\alpha(x) = 0$, e perciò non contribuisce nella eq.(1.2.8).

Veniamo adesso alle equazioni di Eulero-Lagrange. Dalla (1.2.8) si ha

$$0 \;=\; \int_D \left[\delta\phi^\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\alpha} + \partial_\mu(\delta\phi^\alpha) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)}\right] d^4x \tag{1.2.11}$$

ma il secondo termine può essere scritto anche come

$$\partial_\mu(\delta\phi^\alpha)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^\alpha)} \; = \; \partial_\mu\left[\delta\phi^\alpha\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^\alpha)}\right] - \delta\phi^\alpha\;\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^\alpha)} \qquad (1.2.12)$$

Il primo addendo (quadridivergenza) non fornisce contributo alla eq.(1.2.11) perchè, via il Teorema di Gauss, può essere riscritto come

$$\int_\Sigma \delta\phi^\alpha\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^\alpha)}\; n_\mu\; d\sigma$$

e, per ipotesi, $\delta\phi^\alpha$ è nullo sul bordo Σ.
Dunque il principio di minima azione implica che

$$\begin{aligned} 0 \;\; &= \;\; \int_D\left[\delta\phi^\alpha\,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^\alpha} - \delta\phi^\alpha\;\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^\alpha)}\right] d^4x \;\; = \\ &= \;\; \int_D \delta\phi^\alpha\;\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^\alpha} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^\alpha)}\right] d^4x \qquad (1.2.13)\end{aligned}$$

e per l'arbitrarietà del dominio di integrazione D e delle variazioni dei campi $\delta\Phi^\alpha$ questo implica che valgono le equazioni[3] di Eulero-Lagrange, ovvero

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^\alpha} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^\alpha)} \;\; \equiv \;\; 0 \qquad (1.2.14)$$

Resta così dimostrato che il principio di minima azione implica le equazioni di Eulero-Lagrange.
Assumendo la validità delle equazioni di Eulero-Lagrange e andando indietro dalla eq.(1.2.13) alla eq.(1.2.11), possiamo facilmente dimostrare che anche l'altro verso dell'implicazione è vero, cioè che le equazioni di Eulero-Lagrange (1.2.14) implicano la validità del principio di minima azione.

[3]I termini $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^\alpha}$ e $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^\alpha)}$ vanno intesi come *derivate funzionali*, per la cui definizione rimandiamo all'apposita Appendice.

1.2.1 Alcuni esempi

- **Equazione di Schrödinger**

  L'equazione di Schrödinger può essere ottenuta attraverso la seguente densità lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{i\hbar}{2}\left(\psi^*\partial_0\psi - \psi\partial_0\psi^*) + \frac{\hbar^2}{2m}(\partial_i\psi^*)(\partial^i\psi\right) - \psi^* V\psi \qquad (1.2.15)$$

  funzione[4,5] di ψ e ψ^* e delle loro derivate.
  Dalla equazione del moto per ψ^*, abbiamo

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^*} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi^*)} = 0 \qquad (1.2.16)$$

  Ma

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^*} &= \frac{i\hbar}{2}\partial_0\psi - V\psi \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\psi^*)} &= -\frac{i\hbar}{2}\psi \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_i\psi^*)} &= \frac{\hbar^2}{2m}\partial^i\psi\end{aligned}$$

  per cui ne segue l'equazione[6]

$$\begin{aligned}&\frac{i\hbar}{2}\partial_0\psi - V\psi - \partial_0(-\frac{i\hbar}{2}\psi) - \partial_i(\frac{\hbar^2}{2m}\partial^i\psi) = 0 \\ \Rightarrow \qquad & i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi \qquad (1.2.17)\end{aligned}$$

  che è appunto l'equazione di Schrödinger per il campo ψ.

  Procedendo poi a partire dalla equazione analoga alla (1.2.16) relativa al campo ψ, otteniamo l'equazione di moto per ψ^*, la quale risulta naturalmente essere semplicemente la complessa coniugata della (1.2.17).

---

[4] La densità lagrangiana deve essere reale e quindi deve dipendere dalla funzione d'onda ψ e dalla sua complessa coniugata ψ^* (e loro derivate) in modo bilineare. Questo garantisce che le equazioni del moto per ψ e ψ^*, dedotte a partire da essa, risultino effettivamente una complessa coniugata dell'altra.
D'altronde ψ è costituita a partire da due funzioni reali f_r ed f_i indipendenti, che ne costituiscono rispettivamente la parte reale e la parte immaginaria. Queste stesse due funzioni definiscono anche ψ^* e possono essere viste, in ultima analisi, come i campi basilari della teoria. La struttura reale della lagrangiana garantisce però che questi due gradi di libertà, associati ai due campi reali indipendenti f_r ed f_i, possono essere equivalentemente tenuti in conto trattando direttamente ψ e ψ^* come fossero indipendenti tra loro ...

[5] Il potenziale V è, per sua costituzione, una funzione reale: assumiamo che esso sia funzione solo della posizione.

[6] Si ricordi che $\partial_i = -\partial^i$ e quindi che $\partial_i\partial^i = -\nabla^2$.

- **Campo scalare di massa m**

  La densità lagrangiana[7] che descrive l'evoluzione libera del campo scalare, reale, di massa m, è la seguente

  $$\mathcal{L} \;=\; (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) \;-\; m^2\, \phi^2 \tag{1.2.18}$$

  Sostituendo infatti la (1.2.18) nella (1.2.14), l'equazione di moto[8] che si ottiene è

  $$-2\, m^2\, \phi \;-\; 2\, \partial_\mu (\partial^\mu \phi) \;=\; 0 \;\;\Leftrightarrow\;\; \Box \phi \;+\; m^2\, \phi \;=\; 0 \tag{1.2.19}$$

  che è, appunto, l'equazione di Klein-Gordon per il campo scalare di massa m.

  Questo campo può descrivere unicamente particelle neutre perché, essendo reale, la densità lagrangiana che ne descrive l'evoluzione non può essere invariante in forma per trasformazioni di gauge di prima specie (vedi oltre), cioè sotto il gruppo $U(1)$ per cui $\phi \to e^{i\alpha}\, \phi$.
  Nel caso di particelle cariche, infatti, come vedremo, il campo ϕ dovrà essere complesso. Poichè la densità lagrangiana sarà comunque reale, essa diventa (chiaramente invariante in forma sotto la trasformazione $\phi \to e^{i\alpha}\, \phi$; $\phi^* \to e^{-i\alpha}\, \phi^*$)

  $$\mathcal{L} \;=\; (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi^*) \;-\; m^2\, \phi\, \phi^* \tag{1.2.20}$$

  la quale, via il principio di minima azione, implica che sia il campo ϕ, come il suo complesso coniugato ϕ^*, soddisfino entrambi l'equazione di Klein-Gordon per la massa m.

[7] Come abbiamo già avuto modo di osservare, la lagrangiana non è unica, essendo definita a meno di una quadridivergenza e di una costante moltiplicativa non nulla.
In questo senso sarebbe più corretto parlare di *"una densità lagrangiana che descrive ..."*. Resta il fatto che la lagrangiana (1.2.18) è quella più semplice e in questo senso risulta appunto *"la densità lagrangiana ..."*

[8] Ricordiamo che l'operatore di D'Alembert $\Box$ è definito come

$$\Box \equiv \partial_\mu \partial^\mu \equiv \partial_0^2 - \nabla^2$$

- **Campo vettoriale di massa m**

  Una densità lagrangiana che descrive la dinamica libera del campo vettoriale neutro di massa m è la seguente:

$$\mathcal{L} \;=\; (\partial_\mu \phi^\nu)(\partial^\mu \phi_\nu) \;-\; m^2\, \phi_\nu\, \phi^\nu \tag{1.2.21}$$

  Usando questa densità lagrangiana nella (1.2.14), otteniamo infatti

$$-2\, m^2\, \phi_\nu \;-\; 2\, \partial_\mu(\partial^\mu \phi_\nu) \;=\; 0 \;\;\Leftrightarrow\;\; \Box\phi_\nu \;+\; m^2\, \phi_\nu \;=\; 0 \tag{1.2.22}$$

  Se il campo è carico, analogamente al caso scalare, una densità lagrangiana che ne descrive la dinamica è certamente la seguente

$$\mathcal{L} \;=\; (\partial_\mu \phi^\nu)(\partial^\mu \phi^*_\nu) \;-\; m^2\, \phi_\nu \phi^{*\nu} \tag{1.2.23}$$

  La densità lagrangiana (1.2.23) non è, però, l'unica possibile per il campo vettoriale massivo (a parte la somma con una quadridivergenza). Definiamo infatti il seguente tensore antisimmetrico a due indici

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu \phi^\nu - \partial^\nu \phi^\mu \quad \Leftrightarrow \quad F^*_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu \phi^*_\nu - \partial_\nu \phi^*_\mu \tag{1.2.24}$$

  e quindi poniamo[9,10]

$$\mathcal{L} \;=\; \frac{1}{2}\, F^{\mu\nu}\, F^*_{\mu\nu} \;-\; m^2\, \phi^\nu \phi^*_\nu \tag{1.2.26}$$

  E' facile ora concludere che le equazioni del moto per ϕ^ν che discendono dalla densità lagrangiana (1.2.26), sono le seguenti (per ϕ^*_ν otteniamo, naturalmente, le complesse coniugate)

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} + m^2\, \phi_\nu = 0 \tag{1.2.27}$$

  ovvero, più esplicitamente

$$\Box\phi_\nu + m^2\, \phi_\nu - \partial_\nu \partial^\mu \phi_\mu = 0 \tag{1.2.28}$$

[9] Qui stiamo trattando il caso del campo carico, ma quanto stiamo dicendo resta vero anche nel caso neutro.

[10] Si osservi che la differenza fra le due densità lagrangiane (1.2.23) e (1.2.26) non è, in generale, una quadridivergenza. Risulta infatti

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{L} \;&=\; \left[(\partial_\mu \phi^\nu)(\partial^\mu \phi^*_\nu) \;-\; m^2\, \phi^\nu\, \phi^*_\nu\right] - \left[\frac{1}{2}\, (\partial^\mu \phi^\nu - \partial^\nu \phi^\mu)\left(\partial_\mu \phi^*_\nu - \partial_\nu \phi^*_\mu\right) \;-\; m^2\, \phi^\nu \phi^*_\nu\right] \\ &=\; (\partial^\mu \phi^\nu)(\partial_\nu \phi^*_\mu) = \partial_\nu \left[(\partial^\mu \phi^\nu)\phi^*_\mu\right] - (\partial^\mu \partial_\nu \phi^\nu)\phi^*_\mu \end{aligned} \tag{1.2.25}$$

la quale coincide effettivamente con una quadridivergenza (primo termine della (1.2.25)) se il campo soddisfa anche la condizione $\partial_\nu \phi^\nu = 0$, la quale, però, non è garantita dalla densità lagrangiana (1.2.23) ma solo dalla (1.2.26) e comunque solo nel caso di massa non nulla.

Queste equazioni risultano apparentemente diverse dall'equazione di Klein-Gordon, ma, in realtà, la implicano in modo diretto, infatti, derivando la (1.2.27) rispetto a x_ν e usando sia la proprietà di antisimmetria del tensore $F_{\mu\nu}$ come il fatto che, per ipotesi, $m \neq 0$, risulta

$$\partial^\nu \partial^\mu F_{\mu\nu} + m^2\, \partial^\nu \phi_\nu = 0 \;\;\Rightarrow\;\; m^2\, \partial^\nu \phi_\nu = 0 \;\;\Rightarrow\;\; \partial^\nu \phi_\nu = 0 \quad (1.2.29)$$

dove, evidentemente, l'ultima equazione che seleziona le tre componenti del campo che formano un sistema di spin $S = 1$, è conseguenza dell'equazione del moto (1.2.28) solo nel caso di $m \neq 0$.
Dunque, nel caso in cui $m \neq 0$, la densità lagrangiana (1.2.26) fornisce sia la condizione di Lorentz $\partial_\mu \phi^\mu = 0$ che le equazioni di moto di Klein-Gordon per le quattro componenti del campo (di cui, data la condizione di Lorentz, solo tre sono indipendenti, coerentemente con il fatto che il campo descrive entità di spin uno).

Nel caso del campo elettromagnetico A^μ, la densità lagrangiana[11] che si può usare per descriverne l'evoluzione è ancora la (1.2.26), la quale però adesso, per il fatto che la massa è nulla e il campo è reale, diventa

$$\mathcal{L} \;=\; \frac{1}{4}\, F^{\mu\nu}\, F_{\mu\nu} \quad (1.2.32)$$

In questo caso, come ben noto, la condizione di Lorentz deve essere imposta "ad hoc", restando poi ancora libero un grado di libertà di *gauge*, per cui $A_\mu \to A^{'}_\mu \equiv A_\mu + \partial^\mu \Gamma$ con $\Box \Gamma = 0$.

La condizione di Lorentz $\partial^\mu A_\mu = 0$ esclude la possibilità del fotone scalare, mentre l'arbitrarietà di gauge descrive il fatto che il fotone non ha polarizzazione longitudinale.

---

[11] In realtà, volendo che la densità lagrangiana $\mathcal{L}$ sia tale per cui consenta di definire in modo canonico la densità hamiltoniana (cioè la densità d'energia) nel sistema di Gauss o di Lorentz-Heaviside, occorrerebbe piuttosto usare, rispettivamente

$$\mathcal{L}_G \;=\; -\frac{1}{16\pi}\, F^{\mu\nu}\, F_{\mu\nu} \quad\Rightarrow\quad \mathcal{H}_G = \frac{1}{8\pi}\left(E^2 + B^2\right) \quad (1.2.30)$$

$$\mathcal{L}_{LH} \;=\; -\frac{1}{4}\, F^{\mu\nu}\, F_{\mu\nu} \quad\Rightarrow\quad \mathcal{H}_{LH} = \frac{1}{2}\left(E^2 + B^2\right) \quad (1.2.31)$$

Poiché la differenza con la (1.2.32) è sempre soltanto una costante moltiplicativa, evidentemente, nulla cambia riguardo alle conclusioni circa le equazioni di moto.

- **Campo di Dirac**

  Una densità lagrangiana che descrive l'evoluzione libera del campo di Dirac è la seguente:

$$\mathcal{L} \;=\; \frac{i}{2}\left[\overline{\psi}\gamma^{\mu}(\partial_{\mu}\psi) \;-\; (\partial_{\mu}\overline{\psi})\gamma^{\mu}\psi\right] \;-\; m\,\overline{\psi}\psi \tag{1.2.33}$$

  Usando questa Lagrangiana, derivando rispetto a $\overline{\psi}$, dalla (1.2.14) otteniamo l'equazione di Dirac per il campo ψ, infatti si ha

$$-m\,\psi \;-\; \partial_{\mu}(-i\,\gamma^{\mu}\,\psi) \;=\; 0 \quad\Leftrightarrow\quad (i\,\gamma^{\mu}\partial_{\mu} \;-\; m)\,\psi \;=\; 0 \tag{1.2.34}$$

  mentre, derivando rispetto a ψ, otteniamo l'equazione di Dirac per $\overline{\psi}$

$$-m\,\overline{\psi} \;-\; \partial_{\mu}(i\,\overline{\psi}\,\gamma^{\mu}) \;=\; 0 \quad\Leftrightarrow\quad i\,\partial_{\mu}\,\overline{\psi}\,\gamma^{\mu} \;+\; m\,\overline{\psi} \;=\; 0 \tag{1.2.35}$$

  Talvolta, al posto della (1.2.33) si preferisce usare la densità lagrangiana seguente

$$\mathcal{L} \;=\; i\,\overline{\psi}\gamma^{\mu}(\partial_{\mu}\psi) \;-\; m\,\overline{\psi}\psi \tag{1.2.36}$$

  la quale conduce alle stesse equazioni di moto, differendo dalla precedente per la quadridivergenza

$$\Delta\mathcal{L} \;=\; \frac{i}{2}\,\partial_{\mu}\left[\,\overline{\psi}\gamma^{\mu}\psi\,\right] \tag{1.2.37}$$

  la quale, tra l'altro, è nulla sulle soluzioni dell'equazioni di Dirac.

1.3 Invarianze della Lagrangiana

1.3.1 Invarianza in valore

Sia $\mathcal{L}(\phi^\alpha(x), \partial_\mu \phi^\alpha(x), x)$ una lagrangiana che descrive la dinamica dei campi ϕ^α, $\alpha = 1, ..., n$. Consideriamo adesso una trasformazione *locale* dei campi e delle coordinate, che ammette inversa, cioè tale che

$$x \leftrightarrow x' \quad : \quad x' = X'(x); \tag{1.3.38}$$

$$\quad : \quad x = X(x') \tag{1.3.39}$$

$$\phi^\alpha(x) \leftrightarrow \psi^\alpha(x') \quad : \quad \psi^\alpha(x') = \Psi^\alpha(\phi(x)) \tag{1.3.40}$$

$$\quad : \quad \phi^\alpha(x) = \Phi^\alpha(\psi(x')) \tag{1.3.41}$$

Assumiamo inoltre che lo Jacobiano J della trasformazione di coordinate $J = ||\partial_\mu X'^\nu||$ sia costante e che le funzioni $X, X', \Phi^\alpha, \Psi^\alpha$ ammettano derivata prima.

Vogliamo verificare che la dinamica dei campi ψ^α può ancora essere ottenuta dal principio di minima azione attraverso una opportuna lagrangiana.

Iniziamo con il definire la funzione

$$\mathcal{L}'(\psi^\beta, \partial'_\nu \psi^\beta, x') \;\equiv\; \mathcal{L}\left(\Phi^\alpha(\psi), \partial_\mu \Phi^\alpha(\psi), X'\right) \tag{1.3.42}$$

La funzione $\mathcal{L}'$ prende, ovunque, nelle variabili trasformate, lo *stesso valore* assunto dalla lagrangiana originale $\mathcal{L}$, per i campi e le coordinate non trasformate.

Osserviamo che, date le relazioni biunivocche (1.3.40) e (1.3.41) fra i campi ϕ e ψ, una funzione $\hat{\psi}$ costituirà una possibile descrizione della dinamica dei campi ψ se e solo se $\hat{\psi} = \Psi(\hat{\phi})$ dove $\hat{\phi}$ è una opportuna soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange per i campi ϕ.
Se dimostriamo che, per qualunque $\hat{\psi}$ che descrive la dinamica del sistema in un dato (arbitrario) dominio D', la variazione (attorno a questa soluzione dell'*integrale di azione*, costruito usando $\mathcal{L}'$ come lagrangiana, è effettivamente nulla quando i campi vengono cambiati di un qualsiasi $\delta\psi$, purchè $\delta\psi$ risulti nullo sulla frontiera del dominio di integrazione D', allora avremo dimostrato che anche la dinamica dei campi ψ può essere derivata dal principio di minima azione e che $\mathcal{L}'$ è una[12] possibile lagrangiana per i campi ψ.

Questo teorema implica l'invarianza *in valore* della lagrangiana sotto trasformazioni locali.

[12]Come sappiamo, la lagrangiana non è mai unica poichè le equazioni dei campi non cambiano se $\mathcal{L}$ viene moltiplicata per una qualunque costante non nulla, sommata a una qualsiasi quantità reale fissa o, più generalmente, con una quadridivergenza.

Dimostrazione

Sia $\hat{\phi}$ una qualunque soluzione delle equazioni del moto in un opportuno dominio D, e sia $\hat{\psi} = \Psi(\hat{\phi})$: i campi $\hat{\psi}$ saranno dunque definiti nel dominio $D' = X'(D)$. Valutiamo quanto vale la variazione

$$\delta \int_{D'} \mathcal{L}'(\psi^\beta, \partial'_\nu \psi^\beta, x')\, d^4x' \tag{1.3.43}$$

quando i campi ψ^β vengono variati intorno a $\hat{\psi}^\beta$ di un qualsiasi $\delta\psi^\beta$ tale che $\delta\psi^\beta = 0$ sulla frontiera Σ' del dominio di integrazione D'. Si ha

$$\delta \int_{D'} \mathcal{L}'\, d^4x' \;=\; \int_{D'} \left[\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \psi^\beta}\delta\psi^\beta + \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial(\partial'_\nu \psi^\beta)}\partial'_\nu(\delta\psi^\beta)\right] d^4x'$$

Comunque, data la definizione di $\mathcal{L}'$, risulta

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \psi^\beta} \;&=\; \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\alpha}\frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial \psi^\beta} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)}\frac{\partial(\partial_\mu \Phi^\alpha)}{\partial \psi^\beta} \\
\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial(\partial'_\nu \psi^\beta)} \;&=\; \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)}\frac{\partial(\partial_\mu \Phi^\alpha)}{\partial(\partial'_\nu \psi^\beta)}
\end{aligned}$$

perciò

$$\delta \int_{D'} \mathcal{L}'\, d^4x' \;=\; \int_{D'} \left\{\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\alpha}\frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial \psi^\beta} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)}\frac{\partial(\partial_\mu \Phi^\alpha)}{\partial \psi^\beta}\right]\delta\psi^\beta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)}\frac{\partial(\partial_\mu \Phi^\alpha)}{\partial(\partial'_\nu \psi^\beta)}\partial'_\nu(\delta\psi^\beta)\right\} d^4x'$$

ma

$$\partial_\mu \Phi^\alpha = \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial \psi^\beta}\; \partial'_\nu \psi^\beta\; \partial_\mu X'^\nu \;\Rightarrow\; \frac{\partial(\partial_\mu \Phi^\alpha)}{\partial(\partial'_\nu \psi^\beta)} \;=\; \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial \psi^\beta}\; \partial_\mu X'^\nu$$

e quindi

$$\delta \int_{D'} \mathcal{L}'\, d^4x' \;=\; \int_{D'} \left\{\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\alpha}\frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial \psi^\beta} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)}\frac{\partial(\partial_\mu \Phi^\alpha)}{\partial \psi^\beta}\right]\delta\psi^\beta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)}\frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial \psi^\beta}\; \partial_\mu X'^\nu\; \partial'_\nu(\delta\psi^\beta)\right\} d^4x'$$

Comunque, siccome evidentemente

$$\partial_\mu X'^\nu\; \partial'_\nu \;\equiv\; \partial_\mu$$

risulta che

$$\delta \int_{D'} \mathcal{L}'\, d^4x' \;=\; \int_{D'} \left\{\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\alpha}\frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial \psi^\beta} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)}\frac{\partial(\partial_\mu \Phi^\alpha)}{\partial \psi^\beta}\right]\delta\psi^\beta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)}\frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial \psi^\beta}\; \partial_\mu(\delta\psi^\beta)\right\} d^4x'$$

Consideriamo adesso il secondo termine dell'integrale di sopra: si ha

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)}\frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial \psi^\beta}\; \partial_\mu(\delta\psi^\beta) \;=\; \partial_\mu\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)}\frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial \psi^\beta}\; \delta\psi^\beta\right] \;-\; \delta\psi^\beta\; \partial_\mu\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)}\frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial \psi^\beta}\right]$$

L'integrale del primo termine può essere riscritto come

$$\int_{D'} \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)} \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial \psi^\beta} \; \delta\psi^\beta \right] \; d^4x' \;\; = \;\; \int_D \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)} \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial \psi^\beta} \; \delta\psi^\beta \right] \; J(x) \; d^4x$$

ma dato che abbiamo assunto che lo Jacobiano $J(x)$ sia costante, l'integrando risulta essere una quadridivergenza, quando espressa come funzione di x e dunque, via il teorema di Gauss, può essere trasformata in un integrale di superficie sulla frontiera Σ del dominio D. Comunque, poichè le funzioni X e X' sono analitiche, la frontiera di D è mandata nella frontiera di D' e viceversa, cioè $x \in \Sigma \leftrightarrow x' \in \Sigma'$.
Quindi, le variazioni $\delta\psi$ che per ipotesi si annullano su Σ', sono nulle anche quando $x \in \Sigma$ e, di conseguenza, l'integrale di sopra è nullo. In conclusione

$$\delta \int_{D'} \mathcal{L}' \, d^4x' \; = \; \int_{D'} \left\{ \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\alpha} \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial \psi^\beta} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)} \frac{\partial(\partial_\mu \Phi^\alpha)}{\partial \psi^\beta} \right] \delta\psi^\beta - \delta\psi^\beta \; \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)} \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial \psi^\beta} \right] \right\} \, d^4x'$$

Comunque

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)} \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial \psi^\beta} \right] \; = \; \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)} \; \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial \psi^\beta} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)} \; \partial_\mu \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial \psi^\beta}$$

e poichè

$$\partial_\mu \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial \psi^\beta} \; = \; \frac{\partial(\partial_\mu \Phi^\alpha)}{\partial \psi^\beta}$$

semplificando otteniamo

$$\begin{aligned} \delta \int_{D'} \mathcal{L}' \, d^4x' \; &= \; J \int_D \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\alpha} \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial \psi^\beta} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)} \; \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial \psi^\beta} \right\} \; \delta\psi^\beta \, d^4x \\ &= \; J \int_D \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\alpha} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)} \right\} \; \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial \psi^\beta} \; \delta\psi^\beta \, d^4x \qquad (1.3.44) \end{aligned}$$

Ma la quantità fra parentesi è nulla poichè i campi ϕ verificano, per ipotesi, le equazioni di Eulero-Lagrange.
Resta così dimostrato che anche per i campi ψ evolvono secondo il principio di minima azione, quando si prenda $\mathcal{L}'$ come lagrangiana.

1.3.2 Invarianza in forma

Supponiamo che ϕ sia un campo scalare e consideriamo la trasformazione di coordinate lineare e locale, descritta dalla generica matrice non degenere M. Per definizione, si ha

$$\begin{aligned} x \leftrightarrow x' \; &: \; x' = Mx \Rightarrow x'^{\alpha} = M^{\alpha}_{\cdot\beta} x^{\beta}; \\ &: \; x = M^{-1}x' \Rightarrow x^{\alpha} = (M^{-1})^{\alpha}_{\cdot\beta} x'^{\beta}; \\ \phi(x) \leftrightarrow \psi(x') \; &: \; \psi(x') \equiv \Psi(\phi(x)) = \phi(x) \\ &: \; \phi(x) \equiv \Phi(\psi(x')) = \psi(x') \end{aligned}$$

Chiaramente lo jacobiano J della trasformazione di coordinate è costante, risultando $J = ||M||$, e le funzioni Φ, Ψ sono le funzioni *identiche*.

Partiamo dalla lagrangiana libera (1.2.18)

$$\mathcal{L} \; = \; (\partial_{\mu}\phi)(\partial^{\mu}\phi) \; - \; m^2\,\phi^2 \tag{1.3.45}$$

Vista l'invarianza *in valore* della lagrangiana sotto trasformazioni locali, secondo la equazione(1.3.42), la dinamica del campo ψ è descritta dalla nuova funzione lagrangiana

$$\mathcal{L}'(\psi, \partial'_{\nu}\psi) \; = \; \mathcal{L}(\Phi(\psi), \partial_{\mu}\Phi(\psi)) \tag{1.3.46}$$

Ma

$$\begin{aligned} \Phi(\psi) \; &= \; \psi \; ; \\ \partial_{\mu}\Phi(\psi) \; &= \; \partial_{\mu}\psi(x') \; = \; \partial'_{\nu}\psi \;\, \partial_{\mu}X'^{\nu} \; = \; M^{\nu}_{\cdot\mu}\,\partial'_{\nu}\psi \end{aligned}$$

e quindi, sostituendo nella (1.3.46), otteniamo

$$\mathcal{L}'(\psi, \partial'_{\nu}\psi) \; = \; (M^{\nu}_{\cdot\mu}\,\partial'_{\nu}\psi)(M^{\sigma}_{\cdot\rho}\,\partial'_{\sigma}\psi)\,\delta^{\rho\mu} \; - \; m^2\,\psi^2 \tag{1.3.47}$$

dove $\delta^{\nu\mu} \equiv g^{\nu\mu} \equiv g_{\nu\mu} \equiv \delta^{\nu\mu}$ è l'elemento $(\nu\mu)$ del tensore metrico di Minkowski. Con un poco di semplice algebra, abbiamo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'(\psi, \partial'_{\nu}\psi) \; &= \; M^{\nu}_{\cdot\mu}\,M^{\sigma}_{\cdot\rho}\,\delta^{\rho\mu}\;(\partial'_{\nu}\psi)\,(\partial'_{\sigma}\psi) \; - \; m^2\,\psi^2 \\ &= \; M^{\nu}_{\cdot\mu}\,M^{\sigma}_{\cdot\rho}\,\delta^{\rho\mu}\,\delta_{\sigma\tau}\;(\partial'_{\nu}\psi)\,(\partial'^{\tau}\psi) \; - \; m^2\,\psi^2 \\ &\equiv \; M^{\nu}_{\cdot\mu}\,M_{\tau}^{\cdot\mu}\,(\partial'_{\nu}\psi)\,(\partial'^{\tau}\psi) \; - \; m^2\,\psi^2 \end{aligned} \tag{1.3.48}$$

e questa è la nuova lagrangiana relativa al "nuovo" campo ψ.

Se la matrice M è una matrice di Lorentz e dunque descrive una trasformazione omogenea di coordinate che lega due riferimenti inerziali fra loro, allora, poichè

$$(M)_{\mu\alpha} \equiv M^{\mu}_{\cdot\alpha} \qquad (M^{-1})_{\beta\mu} \equiv M_{\mu}^{\cdot\beta} \qquad \Rightarrow \; M^{\mu}_{\cdot\alpha}M_{\mu}^{\cdot\beta} \; = \; \delta^{\beta}_{\alpha}$$

la lagrangiana $\mathcal{L}'$ diventa

$$\mathcal{L}'(\psi, \partial_\nu^{'}\psi) \quad = \quad (\partial_\nu^{'}\psi)\,(\partial^{'\nu}\psi) \ - \ m^2\,\psi^2 \tag{1.3.49}$$

e quindi la nuova lagrangiana $\mathcal{L}'$ dipende da ψ con *la stessa dipendenza funzionale* secondo cui $\mathcal{L}$ dipendeva da ϕ.
In questo caso, diciamo che la lagrangiana è invariante in forma sotto la trasformazione locale considerata.
Chiaramente la dinamica per ψ è descritta dalle stesse equazioni che descrivono la dinamica per ϕ: la fisica dei due campi è la stessa.

E' bene ora ricordare che, mentre la invarianza in forma della lagrangiana implica che le equazioni di moto restino formalmente le stesse, l'inverso non è vero.

Per rendercene conto, consideriamo la lagrangiana di un campo scalare, libero, di massa nulla

$$\mathcal{L} \ = \ (\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) \tag{1.3.50}$$

ed effettuiamo una trasformazione locale che sia una dilatazione uniforme delle coordinate (trasformazione di scala),

$$\begin{array}{rcl} x \leftrightarrow x' & : & x' \, = \, X'(x) \ = \, \lambda x \, \Rightarrow \, x'^\alpha = \lambda x^\alpha; \\ & : & x \, = \, X(x') \ = \, \lambda^{-1}x' \, \Rightarrow \, x^\alpha = \lambda^{-1}x'^\alpha; \\ \phi(x) \leftrightarrow \psi(x') & : & \psi(x') \equiv \Psi(\phi(x)) = \phi(x) \\ & : & \phi(x) \equiv \Phi(\psi(x')) = \psi(x') \end{array}$$

Chiaramente lo jacobiano J della trasformazione di coordinate è costante, essendo $J = ||\lambda^4||$, così come le funzioni Φ, Ψ sono, di nuovo, le funzioni *identiche*. Si ha

$$\begin{array}{rcl} \Phi(\psi) & = & \psi \ ; \\ \partial_\mu\Phi(\psi) & = & \partial_\mu\psi(x') \, = \, \partial_\nu^{'}\psi \ \ \partial_\mu X'^\nu \ = \, \lambda\,\partial_\nu^{'}\psi \end{array}$$

perciò dall'invarianza in valore ricaviamo che la nuova lagrangiana per il campo ψ risulta

$$\mathcal{L}'(\psi, \partial_\nu^{'}\psi) \ = \ \mathcal{L}(\Phi(\psi), \partial_\mu\Phi(\psi)) \ = \ \lambda^2\ (\partial_\nu^{'}\psi)(\partial^{'\nu}\psi) \tag{1.3.51}$$

Poichè le equazioni di Eulero-Lagrange sono omegenee in $\mathcal{L}$, il fattore λ^2 in (1.3.51) è irrilevante, per cui la dinamica del campo ψ è ancora descritta dall'equazione di Klein-Gordon per massa nulla, così come per il campo ϕ anche se, evidentemente, la lagrangiana (1.3.50) non è invariante in forma sotto la trasformazione locale di cui sopra !

1.4 Teorema di Noëther

Abbiamo visto che, sotto ipotesi molto generali, una trasformazione locale lascia la densità lagrangiana invariante in valore, i.e.

$$\mathcal{L}'(\psi, \partial_\nu^{'}\psi) \;=\; \mathcal{L}(\Phi(\psi), \partial_\mu\Phi(\psi)) \tag{1.4.52}$$

In alcuni casi, può anche risultare invariante in forma, i.e.

$$\mathcal{L}'(\psi, \partial_\nu^{'}\psi) \;=\; \mathcal{L}(\Phi(\psi), \partial_\mu\Phi(\psi)) \;=\; \mathcal{L}(\psi, \partial_\nu^{'}\psi) \tag{1.4.53}$$

In questo caso diciamo che la trasformazione locale agisce come una <u>simmetria</u> per il sistema fisico che stiamo considerando. Una delle conseguenze, come abbiamo già messo in evidenza, è che le equazioni di Eulero-Lagrange per i campi trasformati ψ coincidono formalmente con le equazioni del moto per i campi ϕ.

Se la densità lagrangiana è *invariante* in $forma$ sotto un gruppo di Lie di trasformazioni a m parametri, allora il teorema di Noëther afferma che ci sono m quadricorrenti conservate.

Figura 1.1: *Emmy Amalie Noether (1882-1935)*

Prima di dimostrare il teorema, ricordiamo che un gruppo[13] di Lie $\mathcal{G}$ a m parametri è un gruppo topologico in cui, almeno in un opportuno intorno aperto dell'identità e, i suoi elementi g possono essere descritti analiticamente in termini di m parametri reali[14], ovvero $g = g(\omega_1, ..., \omega_m)$.

Senza perdita alcuna di generalità, si può assumere che i parametri (ω) siano tali per cui

$$g(0) = e \tag{1.4.54}$$

Assumeremo altresì che esista una *rappresentazione fedele* (cioè biunivoca) del gruppo $\mathcal{G}$ in un'algebra di operatori lineari opportuna $\mathcal{A}$.
Indichiamo con $A(\omega)$ l'operatore corrispondente al generico elemento $g(\omega)$ di $\mathcal{G}$: la (1.4.54) implica che

$$A(0) = I \tag{1.4.55}$$

dove I è l'operatore identico. Usando adesso l'analiticità della descrizione del gruppo e quindi della sua rappresentazione fedele, ecco che potremo scrivere in generale[15]

$$A(d\omega) = I - i\, d\omega_k\, X^k \tag{1.4.56}$$

dove gli operatori X^k sono, a loro volta, definiti dall'equazione

$$X^k \equiv i\, \left.\frac{\partial A(\omega)}{\partial \omega_k}\right|_{\omega=0} \tag{1.4.57}$$

e costituiscono i *generatori* della rappresentazione data.
Poiché, fissato (ω), per definizione di rappresentazione fedele, esiste uno e un solo elemento di $\mathcal{G}$ che viene individuato da quel set di parametri, anche la funzione $A(\omega)$ dovrà essere iniettiva, per cui gli m generatori definiti dalla (1.4.57) risultano necessariamente indipendenti.
Sophus Lie ha dimostrato come i generatori possano essere definiti anche per il gruppo astratto senza far ricorso alle sue rappresentazioni: i gruppi per cui questo accade sono appunto i gruppi di Lie; ma non è questo il luogo per trattare questi aspetti formali, anche perché l'interesse fisico per i gruppi passa sempre, in ultima analisi, attraverso loro rappresentazioni.

[13] Per maggiori dettagli sull'argomento, vedi quanto riportato nel Vol.I al riguardo.

[14] C'è, evidentemente, una enorme libertà di scelta riguardo al modo di effettuare la parametrizzazione degli elementi del gruppo, l'unico vincolo restando quello per cui, dati comunque ω_1 e ω_2 nello spazio dei parametri, allora dovrà essere che se $g(\omega) = g(\omega_1)\, g(\omega_2)$ la funzione $\omega = \Omega(\omega_1, \omega_2)$ dovrà essere analitica.

[15] Si osservi che un'analoga relazione per il gruppo astratto non sarebbe stata possibile in quanto nel gruppo non è definita l'operazione di somma, mentre, ovviamente, essa è definita nell'algebra operatoriale.

Riprendiamo dunque la rappresentazione fedele $A(g)$ di cui sopra.
Abbiamo visto che, in prossimità dell'identità essa è completamente definita dagli m generatori indipendenti X^k.
Ma che accade se ci allontaniamo dall'identità in modo significativo ?
Data l'ampia libertà di scelta riguardo alla parametrizzazione del gruppo già messa in evidenza, possiamo cercare di definire una maniera di "allontanarci" dall'origine tale da condurre a risultati particolarmente semplici quanto alla forma analitica della parametrizzazione stessa.
Consideriamo per questo una generica trasformazione infinitesima

$$A(d\omega) = I - i\, d\omega_k\, X_k \tag{1.4.58}$$

e immaginiamo di innalzarla a una potenza opportuna, peraltro qualsiasi: evidentemente, per la proprietà della legge di moltiplicazione all'interno del gruppo, questa operazione conduce comunque ancora a un opportuno elemento del gruppo stesso. Questo fatto suggerisce allora un possibile modo di parametrizzazione degli elementi del gruppo, tale che

$$A(\omega) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + i\, \frac{\omega_k}{n}\, X_k\right)^n \equiv e^{i\,\omega\cdot X} \tag{1.4.59}$$

che è appunto la cosiddetta *rappresentazione esponenziale*, la quale, per quanto detto a proposito dello spazio dei parametri, deve essere senz'altro possibile, almeno in tutto un intorno aperto e connesso dell'identità .
Questo risultato è importante in quanto riduce la descrizione completa della generica rappresentazione[16] del gruppo su un'algebra operatoriale alla semplice conoscenza dei suoi generatori, i quali costituiscono in modo naturale, uno spazio vettoriale[17] sul corpo reale.
Se adesso consideriamo una *direzione* determinata nello spazio dei parametri da un qualsiasi versore $\hat{\omega}$, possiamo allora considerare la famiglia degli operatori $\hat{A}(\lambda) \equiv e^{i\,\lambda\,\hat{\omega}_k X_k}$. In questa famiglia la legge di moltiplicazione è particolarmente semplice, risultando[18]

$$\hat{A}(\lambda_1)\, \hat{A}(\lambda_2) = \hat{A}(\lambda_1 + \lambda_2) \tag{1.4.61}$$

[16] A rigore quanto stiamo dicendo vale per le rappresentazioni su algebre operatoriali della rappresentazione fedele; ma siccome questa è isomorfa al gruppo, vale anche per le rappresentazioni su algebre operatoriali del gruppo astratto.

[17] Come vedremo, questo spazio lineare dei generatori, con l'operazione di composizione interna rappresentata dal commutatore, assume la struttura detta di *algebra di Lie*.

[18] Infatti, definito l'operatore $X \equiv \hat{\omega}_k X_k$, risulta evidentemente che

$$\hat{A}(\lambda_1)\, \hat{A}(\lambda_2) = e^{i\,\lambda_1\, X}\, e^{i\,\lambda_2\, X} = \sum_{r\geq 0} i^r\, \frac{(\lambda_1\, X)^r}{r!} \cdot \sum_{s\geq 0} i^s\, \frac{(\lambda_2\, X)^s}{s!} = e^{i(\lambda_1+\lambda_2)\, X} \tag{1.4.60}$$

dove l'ultima eguaglianza discende direttamente dal fatto che, evidentemente, si ha

$$(\lambda_1 X + \lambda_2 X)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} (\lambda_1 X)^k (\lambda_2 X)^{(n-k)}$$

Ma se moltiplichiamo, invece, elementi della rappresentazione fedele del gruppo relativi a "direzioni" differenti nello spazio dei parametri, il parametro che individua l'elemento prodotto risultante, in generale, non è espresso in modo altrettanto semplice in termini dei parametri che individuano i suoi "fattori".
Possiamo comunque dire di nuovo che, almeno in un intorno opportuno dell'identità, dovrà essere

$$e^{i\,\alpha_k X_k} \cdot e^{i\,\beta_s X_s} = e^{i\,\delta_j X_j} \quad cioe' \quad e^{i\,\alpha\cdot X} \cdot e^{i\,\beta\cdot X} = e^{i\,\delta\cdot X} \tag{1.4.62}$$

per una opportuna direzione $\delta \equiv (\delta_j)$, funzione solo delle due direzioni iniziali $\alpha \equiv (\alpha_k)$ e $\beta \equiv (\beta_s)$. La teoria dei gruppi di Lie mostra che questo può accadere se e solo se lo spazio vettoriale dei generatori è *chiuso* sotto l'operazione di commutazione, ovvero se e solo se accade che

$$[X_k,\, X_s] = -i\, C^j_{ks}\, X_j \tag{1.4.63}$$

dove i C^j_{ks} sono coefficienti reali, detti *costanti di struttura* del gruppo (vedi Vol.I) che caratterizzano il gruppo una volta fissata la base (X_j).
Le costanti di struttura[19] in un gruppo di Lie riassumono, in buona sostanza, la legge di moltiplicazione nel gruppo.

Ma torniamo adesso al punto da cui siamo partiti, cioè alla dimostrazione del teorema di Noëther.
Supponiamo allora che sia dato un gruppo di Lie $\mathcal{G}$ a m parametri (reali) $\mathcal{G} = \{g(\omega)\}$ e supponiamo altresì che siano assegnati opportuni campi $\phi^\alpha(x)$ dove $\alpha = 1, ..., n$. Ammettiamo quindi che il gruppo $\mathcal{G}$ descriva trasformazioni locali sui campi assegnati, tali che, per trasformazioni infinitesime, risulti

$$x \to x' : x'^\mu = x^\mu \;+\; \Xi^\mu_a(x)\;d\omega_a \;\equiv\; x^\mu \;+\; \delta x^\mu \tag{1.4.64}$$

$$\phi^\alpha(x) \to \psi^\alpha(x') : \psi^\alpha(x') \;=\; (\delta^\alpha_\beta \;+\; \Gamma^\alpha_{a\beta}\; d\omega_a)\;\phi^\beta(x) \equiv \phi^\alpha(x) + \delta\phi^\alpha(x) \tag{1.4.65}$$

Supponiamo ora che la dinamica dei campi sia descritta dalla densità lagrangiana $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi^\alpha, \partial_\mu\phi^\alpha, x)$ e assumiamo che essa sia invariante in forma sotto il gruppo di Lie delle trasformazioni di cui sopra. Questo significa che essa lo sarà, in particolare, per trasformazioni infinitesime.
Consideriamo allora l'integrale di *azione*

$$\int_{D'} \mathcal{L}'(\psi, \partial'_\nu\psi, x')\, d^4x' \tag{1.4.66}$$

A causa dell'invarianza in valore della densità lagrangiana, questo integrale coincide con l'integrale di azione per i campi non trasformati, calcolato nel

[19] Come abbiamo detto, fissata la parametrizzazione, le costanti di struttura non dipendono dalla rappresentazione ma solo dal gruppo. Però, cambiando parametrizzazione, ovvero, in altri termini, cambiando base nello spazio dei generatori, queste, evidentemente, possono cambiare!

dominio non trasformato D, usando la densità lagrangiana originale, ovvero risulta

$$\int_{D'} \mathcal{L}'(\psi, \partial'_\nu \psi, x')\, d^4x' = \int_D \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, x)\, d^4x \tag{1.4.67}$$

Comunque, essendo $\mathcal{L}$ invariante in forma, $\mathcal{L}' = \mathcal{L}$, per cui si ha

$$\int_{D'} \mathcal{L}'(\psi, \partial'_\nu \psi, x')\, d^4x' \;=\; \int_D \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, x)\, d^4x \;=\; \int_{D'} \mathcal{L}(\psi, \partial'_\nu \psi, x')\, d^4x'$$

dove l'uguaglianza fra il primo e il secondo membro vale a causa dell'invarianza in valore, mentre quella fra il primo e il terzo vale a causa dell'invarianza in forma della densità lagrangiana.
Siccome la trasformazione è infinitesima, possiamo scrivere

$$\int_{D'} \mathcal{L}(\psi, \partial'_\nu \psi, x')\, d^4x' \;=\; \int_D \mathcal{L}(\psi, \partial_\nu \psi, x)\, d^4x \;+\; \int_\Sigma \mathcal{L}(\phi, \partial_\nu \phi, x) \delta x^\rho \, d\sigma_\rho$$

dove Σ è la frontiera del dominio D e nel secondo integrale abbiamo sostituito ψ con ϕ, approssimando così la densità lagrangiana all'ordine zero, dato il fatto che l'integrando contiene già il fattore δx^ρ, che è già infinitesimo del primo ordine.
Allo stesso ordine di approssimazione, si ha anche che

$$\begin{aligned} \psi^\alpha(x) &= \psi^\alpha(x') - \partial_\mu \phi^\alpha \; \delta x^\mu \;=\; \phi^\alpha(x) + \delta\phi^\alpha(x) - \partial_\mu \phi^\alpha(x)\, \delta x^\mu \\ &\equiv \phi^\alpha(x) + \Big(\Gamma^\alpha_{a\beta}\; \phi^\beta(x) \;-\; \partial_\mu \phi^\alpha(x)\; \Xi^\mu_a(x) \Big)\, d\omega_a \;\equiv\; \phi^\alpha(x) + \overline{\delta}\phi^\alpha(x) \end{aligned} \tag{1.4.68}$$

e perciò

$$\begin{aligned} 0 \;&=\; \int_{D'} \mathcal{L}(\psi^\alpha, \partial'_\nu \psi^\alpha, x')\, d^4x' \;-\; \int_D \mathcal{L}(\phi^\alpha, \partial_\nu \phi^\alpha, x)\, d^4x \;= \\ &= \int_D \mathcal{L}(\psi^\alpha, \partial_\nu \psi^\alpha, x)\, d^4x \;+\; \int_\Sigma \mathcal{L}(\phi^\alpha, \partial_\nu \phi^\alpha, x) \delta x^\rho \, d\sigma_\rho \;-\; \int_D \mathcal{L}(\phi^\alpha, \partial_\nu \phi^\alpha, x)\, d^4x \;= \\ &= \int_D \mathcal{L}(\phi^\alpha + \overline{\delta}\phi^\alpha, \partial_\nu(\phi^\alpha + \overline{\delta}\phi^\alpha), x)\, d^4x \;+\; \int_\Sigma \mathcal{L}(\phi^\alpha, \partial_\nu \phi^\alpha, x) \delta x^\rho \, d\sigma_\rho \;- \\ &- \int_D \mathcal{L}(\phi^\alpha, \partial_\nu \phi^\alpha, x)\, d^4x \end{aligned}$$

da cui, prendendo la differenza fra il primo e il terzo addendo e trasformando all'indietro, via il teorema di Gauss, l'integrale di superficie su Σ in un integrale di volume su D, si ottiene

$$0 \;=\; \int_D \left\{ \overline{\delta}\phi^\alpha \, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\alpha} \;+\; \partial_\mu(\overline{\delta}\phi^\alpha)\; \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)} \;+\; \partial_\mu(\mathcal{L}\, \delta x^\mu) \right\} d^4x \tag{1.4.69}$$

Comunque, dalle equazioni di Eulero-Lagrange per i campi ϕ, sappiamo che

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\alpha} = \partial_\mu \frac{\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)}$$

perciò

$$\bar{\delta}\phi^\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\alpha} + \partial_\mu(\bar{\delta}\phi^\alpha) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)} = \bar{\delta}\phi^\alpha \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)} + \partial_\mu(\bar{\delta}\phi^\alpha) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)} = \partial_\mu \left[\bar{\delta}\phi^\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)} \right]$$

Usando questo risultato nella equazione (1.4.69), finalmente otteniamo

$$0 = \int_D \partial_\mu \left\{ \bar{\delta}\phi^\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)} + \mathcal{L}\, \delta x^\mu \right\} d^4x \qquad (1.4.70)$$

Poichè il dominio D è qualsiasi, questo risultato implica che

$$\partial_\mu \left\{ \bar{\delta}\phi^\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)} + \mathcal{L}\, \delta x^\mu \right\} = 0 \qquad (1.4.71)$$

Ma siccome

$$\delta\overline{\phi^\alpha} \equiv \left(\Gamma^\alpha_{a\beta}\, \phi^\beta(x) - \partial_\nu \phi^\alpha(x)\, \Xi^\nu_a(x) \right) d\omega_a \qquad (1.4.72)$$

$$\delta x^\mu \equiv \Lambda^\mu_a(x)\, d\omega_a \qquad (1.4.73)$$

abbiamo

$$\partial_\mu \left\{ \left[\Gamma^\alpha_{a\beta}\, \phi^\beta(x) - \partial_\nu \phi^\alpha(x)\, \Xi^\nu_a(x) \right] \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)} + \mathcal{L}\, \Xi^\mu_a(x) \right\} d\omega_a = 0 \qquad (1.4.74)$$

Poiché i parametri del gruppo di Lie $d\omega_a$ sono tra loro indipendenti, questo risultato implica che, se definiamo (abbiamo cambiato di segno ...) le m quadricorrenti seguenti

$$\Theta^\mu_a(x) \equiv \left[-\Gamma^\alpha_{a\beta}\, \phi^\beta(x) + \partial_\nu \phi^\alpha(x)\, \Xi^\nu_a(x) \right] \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)} - \mathcal{L}\, \Xi^\mu_a(x) \qquad (1.4.75)$$

allora ognuna di esse è separatamente conservata, cioè soddisfa l'equazione (di continuità)

$$\partial_\mu \Theta^\mu_a(x) = 0 \qquad (1.4.76)$$

e questo è appunto quanto afferma il teorema di Emmy Noëther.
Ricordiamo adesso che

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t},\ \vec{\nabla} \right) \qquad (1.4.77)$$

quindi, definendo analogamente $\Theta^\mu_a \equiv \left(\Theta^0_a,\ \vec{\Theta}_a \right)$ abbiamo

$$\partial_\mu \Theta^\mu_a = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t}\Theta^0_a + \vec{\nabla} \cdot \vec{\Theta}_a = 0 \qquad (1.4.78)$$

Integrando in tutto lo spazio, risulta quindi

$$\frac{\partial}{\partial t} \int d^3x\, \Theta_a^0(x) + \int d^3x\, \vec{\nabla} \cdot \vec{\Theta}_a(x) = 0 \tag{1.4.79}$$

Ma il secondo integrale, via il teorema della divergenza di Gauss, può essere trasformato in un integrale di superficie all'infinito e se assumiamo che i campi si annullino propriamente, esso è nullo, per cui, posto

$$Q(t) \equiv \int d^3x\, \Theta_a^0(x) \equiv \int d^3x\, \Theta_a^0(t, \vec{x}) \tag{1.4.80}$$

la grandezza fisica $Q(t)$ risulta conservata dalla dinamica, ovvero si tratta di una costante del moto.

1.4.1 L'invarianza sotto il gruppo di Poincaré

Iniziamo supponendo che la densità lagrangiana $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi^\alpha, \partial_\mu \phi^\alpha)$ sia invariante in forma per traslazioni spazio-temporali (e per questo è sufficiente che non dipenda esplicitamente dalle coordinate ...).
Il gruppo di Lie di simmetria è dunque il gruppo delle traslazioni e le trasformazioni da considerare sono quindi le seguenti

$$x \to x' : \quad x'^\mu = x^\mu + a^\mu \tag{1.4.81}$$
$$\phi^\alpha(x) \to \psi^\alpha(x') = \phi^\alpha(x) \tag{1.4.82}$$

che, riscritte per trasformazioni infinitesime nel linguaggio che abbiamo usato in precedenza, diventano

$$x \to x' : \quad x'^\mu = x^\mu + \delta^\mu_a \, d\omega^a \tag{1.4.83}$$
$$\phi^\alpha(x) \to \psi^\alpha(x') = \phi^\alpha(x) \tag{1.4.84}$$

Nelle notazioni usate per dimostrare il teorema di Noëther, abbiamo quindi

$$\Gamma^\alpha_{a\beta} = 0; \qquad \Xi^\mu_a(x) = \delta^\mu_a \tag{1.4.85}$$

dove a è un indice che va da 0 a 3 e descrive appunto i quattro gradi di libertà di traslazione. Dalla (1.4.75) abbiamo allora che le quadricorrenti conservate, individuate dall'indice $a \equiv \nu$, sono le seguenti

$$\Theta^\mu_\nu(x) \;=\; \partial_\rho \phi^\alpha \; \delta^\rho_\nu \, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)} - \mathcal{L}\, \delta^\mu_\nu = \partial_\nu \phi^\alpha \, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)} - \mathcal{L}\, \delta^\mu_\nu \tag{1.4.86}$$

da cui segue, per quanto detto prima, la conservazione delle quattro quantità

$$P_\nu(t) \equiv \int d^3x \; \Theta^0_\nu(x) = \int d^3x \left(\partial_\nu \phi^\alpha \, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi^\alpha)} - \mathcal{L}\, \delta^0_\nu \right) \tag{1.4.87}$$

Non è difficile, adesso, riconoscere nel tensore Θ^μ_ν definito dalla (1.4.86) il consueto tensore energia-impulso[20], ovvero il *tensore degli sforzi*

$$T_{\mu\nu}(x) \;\equiv\; \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi^\alpha)} \, \partial_\nu \phi^\alpha \, - \mathcal{L}\, \delta_{\mu\nu} \quad \Leftrightarrow \quad T^\mu_{\cdot\nu}(x) \;\equiv\; \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)} \, \partial_\nu \phi^\alpha \, - \mathcal{L}\, \delta^\mu_\nu \tag{1.4.88}$$

per cui il teorema di Noëther mostra come la conservazione del quadrimpulso[21] in un sistema isolato sia conseguenza dell'invarianza (simmetria) per traslazioni della densità lagrangiana del sistema considerato.

[20] cfr. J.D. Bjorken, S.D. Drell: *Relativistic Quantum Fields*, pag. 18
Si osservi che, per come è stato definito, il tensore degli sforzi $T_{\mu\nu} \equiv \delta_{\mu\rho} \Theta^\rho_\nu$ non è necessariamente simmetrico.

[21] La componente temporale del quadrimpulso è naturalmente l'energia e la sua densità, ovvero la densità hamiltoniana, è data dunque da

$$\mathcal{H} = \Theta^0_0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi^\alpha)} \, \partial_0 \phi^\alpha - \delta^0_0 \, \mathcal{L} \tag{1.4.89}$$

Prima di continuare, osserviamo che, usando il tensore (1.4.86) e la definizione (1.4.88), possiamo riscrivere in modo più semplice anche la (1.4.75), mettendo in evidenza, nella corrente conservata, il contributo legato alla trasformazione che avviene sulle coordinate e a quello legato ai campi stessi. Risulta così che le correnti conservate possono essere riscritte come

$$\begin{aligned} \Theta^\mu_a(x) &\equiv \left[-\Gamma^\alpha_{a\beta}\,\phi^\beta(x) \;+\; \partial_\nu\phi^\alpha(x)\;\Xi^\nu_a(x)\right]\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^\alpha)} - \mathcal{L}\,\Xi^\mu_a(x) = \\ &= -\Gamma^\alpha_{a\beta}\,\phi^\beta(x)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^\alpha)} + T^\mu_{\;.\rho}(x)\,\Xi^\rho_a(x) \end{aligned} \tag{1.4.91}$$

Vediamo adesso quali sono le conseguenze che derivano dal teorema di Noëther quanto all'invarianza in forma della densità lagrangiana sotto il gruppo di Lorentz.
Per ipotesi, la legge di trasformazione locale che lascia invariante in forma la densità lagrangiana è adesso la seguente

$$x \to x' : \quad x'^\mu = \Lambda^\mu_{\;.\nu}\,x^\nu \tag{1.4.92}$$
$$\phi^\alpha(x) \to \psi^\alpha(x') = S(\Lambda)^\alpha_{\;.\beta}\,\phi^\beta(x) \tag{1.4.93}$$

dove S sta a indicare l'opportuna rappresentazione del gruppo di Lorentz che agisce nello spazio $n-$dimensionale delle componenti del campo ϕ^α dato. Ricordiamo che il gruppo di Lorentz (ortocrono proprio) è parametrizzato come gruppo di Lie nel modo seguente

$$\Lambda \;=\; e^{\frac{i}{2}\,\omega_{\alpha\beta}\,J^{\alpha\beta}}; \qquad (J^{\alpha\beta})^\mu_{\;.\nu} = -i(\delta^{\alpha\mu}\,\delta^\beta_\nu - \delta^{\beta\mu}\,\delta^\alpha_\nu) \tag{1.4.94}$$
$$\Rightarrow\quad S(\Lambda) = e^{\frac{i}{2}\,\omega_{\alpha\beta}\,\Sigma^{\alpha\beta}}; \tag{1.4.95}$$

dove $\omega_{\alpha\beta}$ sta per la matrice reale antisimmetrica dei parametri, mentre $J^{\alpha\beta}$ e $\Sigma^{\alpha\beta}$ sono i generatori, rispettivamente, della rappresentazione del gruppo di Lorentz sull'algebra operatoriale che agisce sui quadrivettori e su quella che opera sulle componenti del campo assegnato.

Come si vede, $\mathcal{H}$ è la somma di due termini: il primo, che è il *termine cinetico* è, in generale, intrinsecamente tensoriale (ovvero non diagonale), mentre il secondo è semplicemente proporzionale al tensore metrico (componente (00)) attraverso lo scalare di Lorentz rappresentato dalla densità lagrangiana $\mathcal{L}$.
Nel caso in cui sia presente una interazione, se la densità lagrangiana che la descrive non contiene accoppiamenti derivativi e quindi non ci sono ulteriori contributi al termine cinetico "libero", ecco dunque, come abbiamo già avuto modo di osservare, che risulta

$$\mathcal{H}_I(x) = -\mathcal{L}_I(x) \tag{1.4.90}$$

In termini di trasformazioni infinitesime, risulta allora

$$x \to x' : \quad x'^{\mu} = x^{\mu} + \frac{1}{2}\,\omega_{\rho\tau}\left(\hat{J}^{\rho\tau}\right)^{\mu}_{\ .\nu} x^{\nu} \tag{1.4.96}$$

$$\phi^{\alpha}(x) \to \psi^{\alpha}(x') = \phi^{\alpha}(x) + \frac{1}{2}\,\omega_{\rho\tau}\left(\hat{\Sigma}^{\rho\tau}\right)^{\alpha}_{\ .\beta}\phi^{\beta} \tag{1.4.97}$$

dove abbiamo posto[22]

$$\hat{J}^{\rho\tau} \equiv i\,J^{\rho\tau} \quad \Rightarrow \quad \left(\hat{J}^{\rho\tau}\right)^{\mu}_{\ .\nu} = \left(\delta^{\rho\mu}\,\delta^{\tau}_{\nu} - \delta^{\tau\mu}\,\delta^{\rho}_{\nu}\right) \tag{1.4.98}$$

$$\hat{\Sigma}^{\rho\tau} \equiv i\,\Sigma^{\rho\tau} \tag{1.4.99}$$

Nelle notazioni (1.4.64) e (1.4.65), le (1.4.96) e (1.4.97) implicano[23], evidentemente, che

$$(\Xi^{\rho\tau})^{\mu} = \left(\hat{J}^{\rho\tau}\right)^{\mu}_{\ .\nu} x^{\nu}; \qquad (\Gamma^{\rho\tau})_{\alpha\beta} = (\hat{\Sigma}^{\rho\tau})^{\alpha}_{\ .\beta} \tag{1.4.100}$$

per cui, usando la (1.4.91), possiamo concludere che sono conservate le seguenti sei correnti

$$(\Theta^{\rho\tau})^{\mu}(x) = -(\hat{\Sigma}^{\rho\tau})^{\alpha}_{\ .\beta}\,\phi^{\beta}(x)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi^{\alpha})} + T^{\mu}_{\ .\sigma}(x)\left(\hat{J}^{\rho\tau}\right)^{\sigma}_{\ .\nu} x^{\nu} \tag{1.4.101}$$

ovvero, cambiando di segno, abbiamo infine

$$\begin{aligned}(\Theta^{\rho\tau})^{\mu}(x) &= (\hat{\Sigma}^{\rho\tau})^{\alpha}_{\ .\beta}\,\phi^{\beta}(x)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi^{\alpha})} - T^{\mu}_{\ .\sigma}(x)\left[\delta^{\rho\sigma}\,\delta^{\tau}_{\nu} - \delta^{\tau\sigma}\,\delta^{\rho}_{\nu}\right]x^{\nu} = \\ &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi^{\alpha})}(\hat{\Sigma}^{\rho\tau})^{\alpha}_{\ .\beta}\,\phi^{\beta}(x) - T^{\mu\rho}(x)\,x^{\tau} + T^{\mu\tau}(x)\,x^{\rho}\end{aligned} \tag{1.4.102}$$

Il teorema di Noëther, come sappiamo, assicura che le sei quantità seguenti

$$Q^{\rho\tau} = \int d^3x\,(\Theta^{\rho\tau})^{0}(x)$$

sono conservate dalla dinamica.
Vediamo adesso qual è il loro significato fisico.

[22] Per la rappresentazione $S = S(\Lambda)$ non abbiamo, a priori, niente di simile al tensore metrico per agire sugli indici. Comunque, per semplice similitudine con il caso quadrivettoriale, abbiamo posto per definizione

$$S(\Lambda)_{\alpha\beta} \equiv S(\Lambda)^{\alpha}_{\ .\beta} \;\Rightarrow\; (\hat{\Sigma})_{\alpha\beta} \equiv (\hat{\Sigma})^{\alpha}_{\ .\beta}$$

Gli indici α e β sono quindi, rispettivamente, gli indici di riga e di colonna e vanno da 1 ad n, dove n è il numero di componenti del campo.

[23] Si ricordi ancora una volta che $\omega_{\rho\tau}$ e dunque $\hat{J}^{\rho\tau}$ e $\hat{\Sigma}^{\rho\tau}$ sono entità antisimmetriche negli indici (ρ, τ), e dunque il fattore 1/2 serve semplicemente a compensare questo fatto ...

Poniamo dunque

$$
\begin{aligned}
r^\mu &\equiv (t, \vec{r}) = (t, x, y, z);\\
P^\mu(x) &\equiv (P^0(x), \vec{P}(x)) = \Big(T^{00}(x), T^{01}(x), T^{02}(x), T^{03}(x)\Big)
\end{aligned}
$$

dove $P^\mu(x)$, per quanto detto sopra, rappresenta la densità di quadrimpulso. Definiamo quindi

$$
\begin{aligned}
J_1(x) &\equiv \Big(\Theta^{23}\Big)^0(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi^\alpha)}(\hat{\Sigma}^{23})^\alpha_{\cdot\beta}\,\phi^\beta(x) + T^{03}(x)\,y - T^{02}(x)\,x =\\
&= S_1 + \Big(\vec{r}\times\vec{P}(x)\Big)_1 \qquad (1.4.103)\\
J_2(x) &\equiv \Big(\Theta^{31}\Big)^0(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi^\alpha)}(\hat{\Sigma}^{31})^\alpha_{\cdot\beta}\,\phi^\beta(x) + T^{01}(x)\,z - T^{03}(x)\,x =\\
&= S_2 + \Big(\vec{r}\times\vec{P}(x)\Big)_2 \qquad (1.4.104)\\
J_3(x) &\equiv \Big(\Theta^{12}\Big)^0(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi^\alpha)}(\hat{\Sigma}^{12})^\alpha_{\cdot\beta}\,\phi^\beta(x) + T^{02}(x)\,x - T^{01}(x)\,y =\\
&= S_3 + \Big(\vec{r}\times\vec{P}(x)\Big)_3 \qquad (1.4.105)
\end{aligned}
$$

ovvero (le componenti $\vec{P}_k(x)$ stanno, nella formula che segue, per le densità delle componenti spaziali di $P^\mu(x) \equiv T^{0\mu}(x)$ ...)

$$
\begin{aligned}
J_i(x) &\equiv \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\Big(\Theta^{jk}\Big)^0(x) =\\
&= \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi^\alpha)}(\hat{\Sigma}^{jk})^\alpha_{\cdot\beta}\,\phi^\beta(x) + \vec{P}_k(x)\,r_j - \vec{P}_j(x)\,r_k\right\} \qquad (1.4.106)
\end{aligned}
$$

in cui riconosciamo la densità di momento angolare totale associato al campo, costituito sia dalla parte orbitale $\Big(\vec{r}\times\vec{P}(x)\Big)$ che da un termine di spin $\vec{S}$ del campo, legato alle $\hat{\Sigma}$, cioè alla rappresentazione del gruppo delle rotazioni nello spazio delle componenti del campo stesso.
La conservazione della quantità integrale

$$\int d^3x\ J_i(x)$$

esprime dunque la conservazione del momento angolare totale (orbitale e di spin) come conseguenza dell'invarianza in forma della densità lagrangiana del sistema sotto il gruppo di Lorentz (e quindi sotto il gruppo delle rotazioni).

Le altre tre quantità conservate a causa dell'invarianza sotto il gruppo di Lorentz provengono dalle seguenti densità

$$K_1(x) \equiv \left(\Theta^{01}\right)^0(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi^\alpha)}(\hat{\Sigma}^{01})^\alpha_{\cdot\beta}\,\phi^\beta(x) + T^{01}(x)\,t - T^{00}(x)\,x \quad (1.4.107)$$

$$K_2(x) \equiv \left(\Theta^{02}\right)^0(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi^\alpha)}(\hat{\Sigma}^{02})^\alpha_{\cdot\beta}\,\phi^\beta(x) + T^{02}(x)\,t - T^{00}(x)\,y \quad (1.4.108)$$

$$K_3(x) \equiv \left(\Theta^{03}\right)^0(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi^\alpha)}(\hat{\Sigma}^{03})^\alpha_{\cdot\beta}\,\phi^\beta(x) + T^{03}(x)\,t - T^{00}(x)\,z \quad (1.4.109)$$

ovvero

$$K_i(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi^\alpha)}(\hat{\Sigma}^{0i})^\alpha_{\cdot\beta}\,\phi^\beta(x) + \vec{P}_i(x)\,t - P^0(x)\,\vec{r}_i \quad (1.4.110)$$

Se definiamo allora

$$\sigma_i(t) \equiv \int d^3x\,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi^\alpha)}(\hat{\Sigma}^{0i})^\alpha_{\cdot\beta}\,\phi^\beta(x) \quad (1.4.111)$$

$$\vec{P}_i(t) \equiv \int d^3x\;\vec{P}_i(x) \quad (1.4.112)$$

$$\bar{r}_i \equiv \frac{\int d^3x\;P^0(x)\,\vec{r}_i}{\int d^3x\;P^0(x)} \quad \Rightarrow \quad \int d^3x\;P^0(x)\,\vec{r}_i = \bar{r}_i(t)\,P^0(t) \quad (1.4.113)$$

ecco che, da quanto sopra, segue che, qualunque sia $i = 1, 2, 3$, la somma delle tre quantità

$$\mathcal{B}_i \equiv \sigma_i(t) + t\,\vec{P}_i(t) - \bar{r}_i(t)\,P^0(t) \quad (1.4.114)$$

è indipendente dal tempo e dunque le tre $\mathcal{B}_i$ sono separatamente costanti del moto.
Nel caso particolare di un campo scalare, per il quale il termine σ_i è assente essendo nulle le $\hat{\Sigma}$, abbiamo che

$$\mathcal{B}_i = t\,\vec{P}_i(t) - \bar{r}_i(t)\,P^0(t) \quad (1.4.115)$$

la quale, quando ci sia anche invarianza per traslazioni spazio-temporali e quindi $\vec{P}$ e P^0 siano anch'esse costanti del moto, finisce per esprimere semplicemente la costanza della velocità del moto del centro di massa del sistema dei campi considerato.

1.4.2 Applicazione al campo elettromagnetico libero

Vediamo adesso, nel caso del campo elettromagnetico (libero), la forma assunta dalle correnti conservate legate all'invarianza in forma sotto il gruppo di Poincaré della densità lagrangiana che descrive la dinamica del campo stesso.
Poniamoci nel sistema di unità di misura di Gauss, nel quale la densità lagrangiana del campo elettromagnetico da cui partiremo assume la forma seguente[24]

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{16\pi}\, F_{\mu\nu}(x)\, F^{\mu\nu}(x) \tag{1.4.116}$$

invariante in forma, evidentemente, sia per traslazioni spazio-temporali che per trasformazioni di Lorentz.

Dall'invarianza per traslazioni spazio-temporali, secondo la (1.4.86) e la (1.4.88), ne discende la conservazioni di quattro correnti legate al tensore degli sforzi nel modo seguente

$$\partial^\mu T_{\mu\nu}(x) = 0; \qquad T_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu A^\alpha)}\, \partial_\nu A^\alpha - \delta_{\mu\nu}\mathcal{L} \tag{1.4.117}$$

il cui significato fisico, come noto, è che le quattro quantità conservate

$$P_\nu \equiv \int d^3x\; T_{0\nu}(x) \tag{1.4.118}$$

costituiscono le componenti covarianti del quadrimpulso associato al campo elettromagnetico.
Più esplicitamente abbiamo che, essendo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\rho A^\alpha)} &= \frac{\partial}{\partial(\partial^\rho A^\alpha)}\left[-\frac{1}{16\pi}\left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right)\left(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu\right)\right] = \\
&= -\frac{1}{16\pi}\; 4F_{\rho\alpha} = -\frac{1}{4\pi}\; F_{\rho\alpha}
\end{aligned} \tag{1.4.119}$$

risulta che

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi}\; F_{\mu\alpha}\; \partial_\nu A^\alpha - \delta_{\mu\nu}\mathcal{L} \tag{1.4.120}$$

Ma

$$\begin{aligned}
F_{\mu\alpha}\; \partial_\nu A^\alpha &= F_{\mu\alpha}\left(\partial_\nu A^\alpha - \partial^\alpha A_\nu\right) + F_{\mu\alpha}\, \partial^\alpha A_\nu = \\
&= F_{\mu\alpha}\, F_\nu^{\cdot\,\alpha} + \partial^\alpha\left(F_{\mu\alpha}\, A_\nu\right) - \left(\partial^\alpha F_{\mu\alpha}\right) A_\nu
\end{aligned} \tag{1.4.121}$$

[24]Come abbiamo già osservato, questa densità lagrangiana non è comunque sufficiente a definire completamente le equazioni di moto: occorre imporre separatamente sia la condizione di Lorentz ($\partial_\mu A^\mu = 0$) che quella di arbitrarietà di gauge ($A^\mu \to A^\mu + \partial^\mu\Gamma$ con $\Box\Gamma = 0$).

D'altronde, usando sia le equazioni di moto (ovvero $\Box A^\mu = 0$) che la condizione di Lorentz (ovvero $\partial^\mu A_\mu = 0$), risulta

$$\partial^\alpha F_{\mu\alpha} = \partial^\alpha \left(\partial_\mu A_\alpha - \partial_\alpha A_\mu\right) = \partial_\mu \partial^\alpha A_\alpha - \Box A_\mu = 0 \qquad (1.4.122)$$

quindi abbiamo infine che

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi} \left\{F_{\mu\alpha}\, F_{\nu}^{;\,\alpha} + \partial^\alpha \left(F_{\mu\alpha}\, A_\nu\right) + 4\pi\, \delta_{\mu\nu} \mathcal{L}\right\} \qquad (1.4.123)$$

Osserviamo che il tensore degli sforzi $T_{\mu\nu}$ di cui alla (1.4.123) *non* è simmetrico a causa della presenza del termine tensoriale $\Pi_{\mu\nu}$ definito come

$$\Pi_{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi}\, \partial^\alpha \left(F_{\mu\alpha}\, A_\nu\right) \qquad (1.4.124)$$

Questo termine ha le seguenti caratteristiche

- non è gauge-invariante (nessuna meraviglia: la condizione di invarianza di gauge, come sappiamo, deve essere imposta "ad hoc" e non è una conseguenza delle equazioni di moto determinate dalla densità lagrangiana);
- soddisfa esso stesso la condizione di conservazione $\partial^\mu\, \Pi_{\mu\nu} = 0$, come è ovvio dal fatto che

  $$\partial^\mu\, \Pi_{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi}\, \partial^\mu \partial^\alpha \left(F_{\mu\alpha}\, A_\nu\right)$$

  ed il tensore di Maxwell $F_{\mu\alpha}$ è antisimmetrico;
- il contributo al quadrimpulso P_ν ci cui alla (1.4.118) proveniente da questo termine è comunque nullo, infatti

  $$\begin{aligned} \int d^3x\ \Pi_{0\nu}(x) &= -\frac{1}{4\pi} \int d^3x\, \partial^\alpha \left(F_{0\alpha}\, A_\nu\right) = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int d^3x\, \partial^i \left(F_{0i}\, A_\nu\right) \equiv 0 \end{aligned} \qquad (1.4.125)$$

  dove abbiamo usato il fatto che $F_{00} = 0$ e che l'integrando $\partial^i \left(F_{0i}\, A_\nu\right)$ è una divergenza per cui il suo integrale è nullo per via del teorema di Gauss, almeno se i campi si annullano propriamente all'infinito.

Possiamo quindi, limitatamente al calcolo del quadrimpulso del campo, usare, al posto del tensore $T_{\mu\nu}$ di cui alla (1.4.123), il tensore simmetrico $\hat{T}_{\mu\nu}$ così definito

$$\hat{T}_{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi} \left\{F_{\mu\alpha}\, F_{\nu}^{;\,\alpha} + 4\pi\, \delta_{\mu\nu} \mathcal{L}\right\} \qquad (1.4.126)$$

Vediamone la forma esplicita.
Iniziamo ricordando che, in termini del campo elettrico $\vec{E}$ e del campo magnetico $\vec{B}$, abbiamo

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.4.127}$$

per cui ne segue che

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{16\pi}\, F_{\mu\nu}(x)\, F^{\mu\nu}(x) = -\frac{1}{16\pi}\left(-2E^2 + 2B^2\right) = \frac{1}{8\pi}\left(E^2 - B^2\right) \tag{1.4.128}$$

mentre risulta

$$\begin{aligned} F_{\mu\alpha}\, F_{\nu}^{\cdot\,\alpha} &= F_{\mu\alpha}\, F_{\nu\rho}\, \delta^{\rho\alpha} = F_{\mu}^{\cdot\,\rho}\, F_{\nu\rho} = -F_{\mu}^{\cdot\,\rho}\, F_{\rho\nu} = \\ = -&\begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ -E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ -E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} = \\ = -&\begin{pmatrix} E_1^2+E_2^2+E_3^2 & E_3B_2-E_2B_3 & E_1B_3-E_3B_1 & E_2B_1-E_1B_2 \\ E_3B_2-E_2B_3 & -E_1^2+B_2^2+B_3^2 & -E_1E_2-B_1B_2 & -E_1E_3-B_1B_3 \\ E_1B_3-E_3B_1 & -E_1E_2-B_1B_2 & B_1^2-E_2^2+B_3^2 & -E_2E_3-B_2B_3 \\ E_2B_1-E_1B_2 & -E_1E_3-B_1B_3 & -E_2E_3-B_2B_3 & B_1^2+B_2^2-E_3^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

per cui abbiamo

$$\hat{T}_{00} = -\frac{1}{4\pi}\left(F_{0\alpha}F_{0}^{\cdot\,\alpha} + 4\pi\mathcal{L}\right) = -\frac{1}{4\pi}\left(-E^2 + \frac{E^2-B^2}{2}\right) = \frac{1}{8\pi}\left(E^2+B^2\right) \tag{1.4.129}$$

$$\hat{T}_{01} = -\frac{1}{4\pi}\left[F_{0\alpha}F_{1}^{\cdot\,\alpha}\right] = -\frac{1}{4\pi}\left[-\left(E_3B_2 - E_2B_3\right)\right] = -\frac{1}{4\pi}\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)_1 \tag{1.4.130}$$

$$\hat{T}_{02} = -\frac{1}{4\pi}\left[F_{0\alpha}F_{2}^{\cdot\,\alpha}\right] = -\frac{1}{4\pi}\left[-\left(E_1B_3 - E_3B_1\right)\right] = -\frac{1}{4\pi}\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)_2 \tag{1.4.131}$$

$$\hat{T}_{01} = -\frac{1}{4\pi}\left[F_{0\alpha}F_{1}^{\cdot\,\alpha}\right] = -\frac{1}{4\pi}\left[-\left(E_2B_1 - E_1B_2\right)\right] = -\frac{1}{4\pi}\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)_3 \tag{1.4.132}$$

ovvero, passando alle componenti controvarianti P^ν del quadriimpulso conservato, ritroviamo il risultato ben noto dalla teoria di Maxwell, secondo la quale

$$\begin{aligned} P^\nu &\equiv \frac{1}{4\pi}\int d^3x\left(\frac{E^2+B^2}{2}, \vec{E}\times\vec{B}\right) = \int d^3x\, T^{0\nu}(x) = \int d^3x\, T_{0}^{\cdot\,\nu}(x) = \\ &= \int d^3x\, \hat{T}_{0}^{\cdot\,\nu}(x) \end{aligned} \tag{1.4.133}$$

Veniamo adesso alle quantità conservate in conseguenza dell'invarianza sotto il gruppo di Lorentz (ortocrono proprio) e iniziamo dal momento angolare.
Chiaramente la trasformazione che lascia invariante in forma la densità lagrangiana (1.4.116) è la seguente

$$x \rightarrow x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{.\nu}\, x^{\nu} \tag{1.4.134}$$
$$A^{\alpha}(x) \rightarrow A'^{\alpha}(x') = \Lambda^{\alpha}_{.\beta}\, A^{\beta}(x) \tag{1.4.135}$$

e dunque, in termini di trasformazioni infinitesime, abbiamo

$$x \rightarrow x'^{\mu} = x^{\mu} + \frac{1}{2}\,\omega_{\rho\tau}\left(\hat{J}^{\rho\tau}\right)^{\mu}_{.\nu}\, x^{\nu} \tag{1.4.136}$$
$$\phi^{\alpha}(x) \rightarrow \psi^{\alpha}(x') = \phi^{\alpha}(x) + \frac{1}{2}\,\omega_{\rho\tau}\left(\hat{\Sigma}^{\rho\tau}\right)^{\alpha}_{.\beta}\,\phi^{\beta} \tag{1.4.137}$$

dove, ricordando la (1.4.98), risulta

$$\left(\hat{J}^{\rho\tau}\right)^{\mu}_{.\nu} = \left(\hat{\Sigma}^{\rho\tau}\right)^{\mu}_{.\nu} = \left(\delta^{\rho\mu}\,\delta^{\tau}_{\nu} - \delta^{\tau\mu}\,\delta^{\rho}_{\nu}\right) \tag{1.4.138}$$

Quanto alla densità di momento angolare, per la (1.4.106), essa è evidentemente data dall'espressione

$$\begin{aligned}
J_i(x) &= \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A^{\alpha})}(\hat{\Sigma}^{jk})^{\alpha}_{.\beta}\,A^{\beta}(x) + T^{0k}(x)\,r_j - T^{0j}(x)\,r_k\right\} = \\
&= -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\left\{-\frac{1}{4\pi}F^{0}_{.\alpha}\left(\delta^{j\alpha}\delta^{k}_{\beta} - \delta^{k\alpha}\delta^{j}_{\beta}\right)A^{\beta} + T^{0k}(x)\,r_j - T^{0j}(x)\,r_k\right\} = \\
&= \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\left\{-\frac{1}{4\pi}\left(F^{0j}A^{k} - F^{0k}A^{j}\right) + T^{0k}(x)\,r_j - T^{0j}(x)\,r_k\right\} = \\
&= \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\left\{-\frac{1}{4\pi}\left(-E^{j}A^{k} + E^{k}A^{j}\right) + r_j\,T^{0k}(x) - r_k\,T^{0j}(x)\right\} = \\
&= \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\left\{\frac{1}{4\pi}\left(E^{j}A^{k} - E^{k}A^{j}\right) + r_j\,T^{0k}(x) - r_k\,T^{0j}(x)\right\}
\end{aligned} \tag{1.4.139}$$

Nell'espressione precedente è di nuovo presente un termine lineare nei potenziali e dunque a priori non manifestamente gauge-invariante.
Inoltre, per come si arriva all'espressione precedente via il teorema di Noëther, le densità di quadriimpulso $T^{0i}(x)$ sono quelle relative all'espressione completa (1.4.123) e non a quella simmetrizzata (1.4.126).

Ma, sempre per le relazioni (1.4.123), (1.4.124) e (1.4.126), risulta che

$$T^{\mu\nu}(x) = \hat{T}^{\mu\nu}(x) + \Pi^{\mu\nu}(x) \qquad con \qquad \Pi^{\mu\nu}(x) \equiv -\frac{1}{4\pi}\partial_{\alpha}\left(F^{\mu\alpha}\,A^{\nu}\right) \tag{1.4.140}$$

e dunque

$$r_j\,T^{0k}(x) - r_k\,T^{0j}(x) = r_j\,\hat{T}^{0k}(x) - r_k\,\hat{T}^{0j}(x) + r_j\,\Pi^{0k}(x) - r_k\,\Pi^{0j}(x) \tag{1.4.141}$$

Ma ricordando che il tensore di Maxwell $F^{\mu\nu}$ è antisimmetrico e che $F^{0i} = -E^i$, abbiamo che

$$\begin{aligned}
&-4\pi \left[r_j \, \Pi^{0k}(x) - r_k \, \Pi^{0j}(x)\right] = r_j \, \partial_\alpha \left(F^{0\alpha} A^k\right) - r_k \, \partial_\alpha \left(F^{0\alpha} A^j\right) = \\
&= r_j \, \partial_i \left(F^{0i} A^k\right) - r_k \, \partial_i \left(F^{0i} A^j\right) = \partial_i \left(r_j F^{0i} A^k - r_k F^{0i} A^j\right) - \left(\delta^i_j F^{0i} A^k - \delta^k_i F^{0i} A^j\right) = \\
&= \partial_i \left(r_j F^{0i} A^k - r_k F^{0i} A^j\right) - \left(-E^j A^k + E^k A^j\right) = \\
&= \partial_i \left(r_j F^{0i} A^k - r_k F^{0i} A^j\right) + \left(E^j A^k - E^k A^j\right)
\end{aligned} \tag{1.4.142}$$

ovvero risulta

$$r_j \, \Pi^{0k}(x) - r_k \, \Pi^{0j}(x) = -\frac{1}{4\pi} \left[E^j A^k - E^k A^j\right] - \frac{1}{4\pi} \partial_l \left[r_j F^{0l} A^k - r_k F^{0l} A^j\right] \tag{1.4.143}$$

Tornando adesso alla densità di momento angolare (1.4.139), si ha

$$\begin{aligned}
J_i(x) \quad &= \frac{1}{2}\epsilon_{ijk} \left\{ \frac{1}{4\pi} \left(E^j A^k - E^k A^j\right) + r_j \, T^{0k}(x) - r_k \, T^{0j}(x) \right\} = \\
&= \frac{1}{2}\epsilon_{ijk} \left\{ \frac{1}{4\pi} \left(E^j A^k - E^k A^j\right) + r_j \, \hat{T}^{0k}(x) - r_k \, \hat{T}^{0j}(x) + \left[r_j \, \Pi^{0k}(x) - r_k \, \Pi^{0j}(x)\right] \right\} = \\
&= \frac{1}{2}\epsilon_{ijk} \left\{ \frac{1}{4\pi} \left(E^j A^k - E^k A^j\right) + r_j \, \hat{T}^{0k}(x) - r_k \, \hat{T}^{0j}(x) - \frac{1}{4\pi} \left[E^j A^k - E^k A^j\right] \right. \\
&\left. -\frac{1}{4\pi} \partial_l \left[r_j F^{0l} A^k - r_k F^{0l} A^j\right] \right\} = \\
&= \frac{1}{2}\epsilon_{ijk} \left\{ r_j \, \hat{T}^{0k}(x) - r_k \, \hat{T}^{0j}(x) - \frac{1}{4\pi} \partial_l \left[r_j F^{0l} A^k - r_k F^{0l} A^j\right] \right\}
\end{aligned} \tag{1.4.144}$$

Questa densità è fatta di due parti di cui la seconda è una pura divergenza che, se i campi di annullano propriamente all'infinito, non darà contributo all'integrale esteso a tutto lo spazio. Possiamo quindi, ai fini del calcolo del momento angolare complessivo, cioè della quantità che è conservata in virtù dell'invarianza per rotazioni, effettuare la sostituzione seguente

$$\begin{aligned}
J_i(x) \quad &= \frac{1}{2}\epsilon_{ijk} \left\{ r_j \, \hat{T}^{0k}(x) - r_k \, \hat{T}^{0j}(x) - \frac{1}{4\pi} \partial_l \left[r_j F^{0l} A^k - r_k F^{0l} A^j\right] \right\} \rightarrow \\
\rightarrow \quad & \hat{J}_i(x) = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk} \left\{ r_j \, \hat{T}^{0k}(x) - r_k \, \hat{T}^{0j}(x) \right\}
\end{aligned} \tag{1.4.145}$$

e ritroviamo così, anche per questa strada, l'espressione canonica del momento angolare del campo elettromagnetico, costruito nel modo consueto attraverso il solo contributo del tensore degli sforzi simmetrico $\hat{T}$.

Veniamo infine alle altre tre "correnti" conservate legate all'invarianza in forma della densità lagrangiana del campo elettromagnetico per trasformazioni di Lorentz, e precisamente quelle legate ai boost.
Le tre densità (1.4.110) il cui integrale esteso su tutto lo spazio risulta essere una costante del moto, sono

$$K_i(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A^\alpha)} (\hat{\Sigma}^{0i})^{\alpha}_{.\beta}\, A^\beta(x) + T^{0i}(x)\, t - T^{00}(x)\, \vec{r}_i \tag{1.4.146}$$

ovvero

$$\begin{aligned} K_i(x) \quad &= \quad -\frac{1}{4\pi} F^0_{.\alpha}(x) \left(\delta^{0\alpha}\delta^i_\beta - \delta^0_\beta \delta^{i\alpha}\right) A^\beta(x) + T^{0i}(x)\, t - T^{00}(x)\, \vec{r}_i = \\ &= -\frac{1}{4\pi}\left(F^{00}(x)A^i(x) - F^{0i}(x)A^0(x)\right) + T^{0i}(x)\, t - T^{00}(x)\, \vec{r}_i = \\ &= \frac{1}{4\pi} F^{0i}(x)A^0 + \hat{T}^{0i}(x)\, t - \hat{T}^{00}(x)\, \vec{r}_i + \Pi^{0i}(x)\, t - \Pi^{00}(x)\, \vec{r}_i \end{aligned} \tag{1.4.147}$$

ma

$$\begin{aligned} -4\pi &\left[t\, \Pi^{0i}(x) - r_i\, \Pi^{00}(x)\right] = t\, \partial_\alpha \left(F^{0\alpha} A^i\right) - r_i\, \partial_\alpha \left(F^{0\alpha} A^0\right) = \\ &= t\, \partial_j \left(F^{0j} A^i\right) - r_i\, \partial_j \left(F^{0j} A^0\right) = \partial_j \left(tF^{0j}A^i - r_i F^{0j} A^0\right) + \delta^i_j F^{0j} A^0 \end{aligned} \tag{1.4.148}$$

e dunque

$$\begin{aligned} K_i(x) \quad &= \quad \frac{1}{4\pi} F^{0i}(x)A^0 + \hat{T}^{0i}(x)\, t - \hat{T}^{00}(x)\, \vec{r}_i + \Pi^{0i}(x)\, t - \Pi^{00}(x)\, \vec{r}_i = \\ &= \frac{1}{4\pi} F^{0i}A^0 + \hat{T}^{0i}(x)\, t - \hat{T}^{00}(x)\, \vec{r}_i - \frac{1}{4\pi}\partial_j \left(tF^{0j}A^i - r_i F^{0j}A^0\right) - \frac{1}{4\pi} F^{0i} A^0 = \\ &= \hat{T}^{0i}(x)\, t - \hat{T}^{00}(x)\, \vec{r}_i - \frac{1}{4\pi}\partial_j \left(tF^{0j}A^i - r_i F^{0j}A^0\right) \end{aligned} \tag{1.4.149}$$

Di nuovo abbiamo che uno dei due contributi è una pura divergenza, per cui, sulla base degli argomenti già considerati a proposito del momento angolare, ai fini del calcolo delle costanti del moto, possiamo di nuovo operare la sostituzione

$$\begin{aligned} K_i(x) \quad &= \quad \hat{T}^{0i}(x)\, t - \hat{T}^{00}(x)\, \vec{r}_i - \frac{1}{4\pi}\partial_j \left(tF^{0j}A^i - r_i F^{0j}A^0\right) \quad \to \\ &\to \quad \hat{K}_i(x) = \hat{T}^{0i}(x)\, t - \hat{T}^{00}(x)\, \vec{r}_i \end{aligned} \tag{1.4.150}$$

da cui, definendo al solito il baricentro dell'energia elettromagnetica come

$$\bar{r}_i \quad \equiv \quad \frac{\int d^3x\ \hat{T}^{00}(x)\, \vec{r}_i}{\int d^3x\ \hat{T}^{00}(x)} \quad \Rightarrow \quad \int d^3x\ \hat{T}^{00}(x)\, \vec{r}_i = \bar{r}_i(t)\, P^0 \tag{1.4.151}$$

si ricava che possiamo scrivere le costanti del moto $\mathcal{B}_i$, definite a partire dalle densità $\hat{K}_i(x)$ integrate in tutto lo spazio, in termini delle componenti conservate dell'impulso spaziale $\vec{P}_i$ e dell'energia P^0, ottenendo

$$\mathcal{B}_i \equiv \int d^3x\ \hat{K}_i(x) = t\, \vec{P}_i - \bar{r}_i\, P^0 \quad \Rightarrow \quad v_i \equiv \frac{d\bar{r}_i}{dt} = \frac{\vec{P}_i}{P^0} \tag{1.4.152}$$

cioè la costanza della velocità del baricentro dell'energia elettromagnetica.

1.4.3 L'invarianza di gauge di prima specie

Un'invarianza che si incontra spesso in Meccanica Quantistica è l'invarianza per trasformazione di fase della funzione d'onda così definita

$$\psi(x) \to e^{i\alpha}\,\psi(x); \qquad \psi^*(x) \to e^{-i\alpha}\,\psi^*(x) \tag{1.4.153}$$

Nel linguaggio lagrangiano, questo corrisponde evidentemente a dire che la densità lagrangiana $\mathcal{L}$, da cui sono poi ricavate le equazioni del moto, è invariante in forma sotto le trasformazioni precedenti, le quali costituiscono, evidentemente, un gruppo di Lie abeliano a una dimensione.
Consideriamo una trasformazione di fase infinitesima: nel linguaggio generale della (1.4.64), sviluppato per dimostrare il teorema di Noëther, abbiamo

$$x \to x' \;\;:\;\; x'^\mu = x^\mu \;+\; \Xi^\mu_a(x)\; d\omega_a \;\equiv\; x^\mu \;+\; \delta x^\mu \tag{1.4.154}$$

$$\phi^\alpha(x) \to \psi^\alpha(x') \;\;:\;\; \psi^\alpha(x') \;=\; (\delta^\alpha_\beta \;+\; \Gamma^\alpha_{a\beta}\; d\omega_a)\; \phi^\beta(x) \tag{1.4.155}$$

questo significa, evidentemente[25]

$$\begin{array}{ccccccc} x'^\mu & \to & x^\mu & & \Xi^\mu = 0 & ; & \\ \psi & \to & \psi + i\alpha\,\psi & \Rightarrow & \Gamma^1_1 = i & ; & \Gamma^1_2 = 0 \\ \psi^* & \to & \psi^* - i\alpha\,\psi^* & & \Gamma^2_1 = 0 & ; & \Gamma^2_2 = -i \end{array} \tag{1.4.156}$$

per cui, sostituendo nell'espressione generale della corrente conservata di cui alla (1.4.75), riscritta nel caso particolare in cui il gruppo di simmetria sia a un solo parametro,

$$\Theta^\mu_a(x) \;\to\; J^\mu(x) \equiv \left[-\Gamma^\alpha_\beta\,\phi^\beta(x) \;+\; \partial_\mu\phi^\alpha(x)\;\Xi^\mu\right] \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^\alpha)} - \mathcal{L}\,\Xi^\mu \tag{1.4.157}$$

otteniamo infine la seguente espressione della quadricorrente[26] conservata dalla dinamica.

$$J^\mu(x) = i\left[-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\,\psi + \psi^*\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi^*)}\right] \tag{1.4.158}$$

Il fatto che la corrente J^μ sia conservata implica, come sappiamo, che

$$\partial_0 \int d^3x\, J^0(\vec{x},t) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad Q \equiv \int d^3x\, J^0(\vec{x},t) = cost \tag{1.4.159}$$

Nello schema di prima quantizzazione della MQ, la quantità Q definita dalla (1.4.159), risulta proporzionale alla norma stessa della funzione d'onda.
In QFT la quantità $J^0(\vec{x},t)$ risulta proporzionale al numero di particelle per unità di volume descritte dal campo: la costante di proporzionalità può comprendere anche il segno.

[25] Per semplicità e uniformità di notazioni assumiamo qui che l'indice con cui sono labellati i campi assuma i valori 1 e 2, e risulti $\phi^1 \equiv \phi$; $\phi^2 \equiv \phi^*$. Inoltre, essendo il gruppo di trasformazioni a un solo parametro, ometteremo l'indice a.

[26] Si noti che, così come la densità lagrangiana è determinata a meno di una costante moltiplicativa, anche la quadricorrente, omogenea nella lagrangiana, è anch'essa determinata a meno di un fattore di scala arbitrario.

1.4.4 Applicazioni

- **L'equazione di Schrödinger**

  Abbiamo visto come la densità lagrangiana da cui si può derivare l'equazione di Schrödinger, sia

$$\mathcal{L} = \frac{i\hbar}{2}(\psi^*\partial_0\psi - \psi\partial_0\psi^*) + \frac{\hbar^2}{2m}(\partial_i\psi^*)(\partial^i\psi) - \psi^* V\psi \tag{1.4.160}$$

  Essa è palesemente invariante in forma sotto la trasformazione di fase (1.4.156) e la corrente conservata che ne discende secondo la (1.4.158) risulta essere

$$J^\mu = i\left[-\phi\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} + \phi^*\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^*)}\right] \tag{1.4.161}$$

  da cui segue che

$$J^0 = i\left[-\phi\left(\frac{i\hbar}{2}\phi^*\right) + \phi^*\left(-\frac{i\hbar}{2}\phi\right)\right] = \hbar\,\phi\,\phi^* \tag{1.4.162}$$

$$\begin{aligned} J^i &= i\left[-\phi\left(\frac{\hbar^2}{2m}\partial^i\phi^*\right) + \phi^*\left(\frac{\hbar^2}{2m}\partial^i\phi\right)\right] \\ &= -i\frac{\hbar^2}{2m}\left[\phi(\partial^i\phi^*) - \phi^*(\partial^i\phi)\right] = \hbar\left[\frac{i\hbar}{2m}\left(\phi\vec{\nabla}\phi^* - \phi^*\vec{\nabla}\phi\right)\right] \end{aligned} \tag{1.4.163}$$

  dove abbiamo usato il fatto che

$$\vec{\nabla}_i \equiv \frac{\partial}{\partial x^i} \equiv \partial_i \equiv -\partial^i$$

  Dunque, la quadricorrente conservata[27] è

$$J^\mu \equiv (J^0, J^i) \equiv \hbar\left(|\phi|^2, \frac{i\hbar}{2m}\phi \overleftrightarrow{\nabla} \phi^*\right) \tag{1.4.165}$$

  A parte il fattore globale $\hbar$, dunque, ne risulta che la parte temporale della quadricorrente J^0 altri non è che la densità di probabilità $|\phi|^2$, per cui la parte spaziale $J^i = \frac{i\hbar}{2m}\phi \overleftrightarrow{\nabla} \phi^*$ necessariamente individua la densità di corrente di probabilità.
  Ricordiamo a questo proposito che in prima quantizzazione la conservazione della probabilità significa semplicemente la conservazione dell'esistenza della particella descritta dalla funzione d'onda ϕ, non essendo contemplato alcun meccanismo di creazione e distruzione della stessa.

[27] Per motivi di maggior concisione, introduciamo qui il simbolo

$$\overleftrightarrow{\nabla}:\quad f \overleftrightarrow{\nabla} g \equiv f(\vec{\nabla} g) - (\vec{\nabla} f)g \tag{1.4.164}$$

- **Campo scalare carico**

  Nel caso del campo scalare carico, abbiamo visto che una densità lagrangiana che ne descrive la dinamica è

$$\mathcal{L} \;=\; (\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi^*) \;-\; m^2\,\phi\,\phi^* \tag{1.4.166}$$

  Chiaramente anche questa densità lagrangiana è invariante in forma sotto la trasformazione di fase (1.4.156) ed è immediato dimostrare che la corrente conservata (1.4.158) che ne risulta è la seguente

$$J^\mu = i\,[-(\partial^\mu\phi^*)\,\phi + \phi^*(\partial^\mu\phi)] \equiv i\phi^*\bar{\partial}^\mu\phi \tag{1.4.167}$$

  per cui risulta

$$J^0 = i\left(\phi^*\frac{\partial\phi}{\partial t} - \frac{\partial\phi^*}{\partial t}\,\phi\right) \tag{1.4.168}$$

  la quale è, in generale, non risulta definita positiva.
  Lo è soltanto se nello sviluppo di Fourier di ϕ compaiono solo frequenze positive, cioè solo andamenti temporali del tipo e^{-iEt} con $E > 0$.

- **Campo di Dirac**

  Nel caso del campo di Dirac, abbiamo visto che una densità lagrangiana che possiamo utilizzare per descriverne la dinamica è

$$\mathcal{L} \;=\; \frac{i}{2}\,\left[\overline{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu\psi) \;-\; (\partial_\mu\overline{\psi})\gamma^\mu\psi\right] \;-\; m\,\overline{\psi}\psi \tag{1.4.169}$$

  Di nuovo, essendo $\bar{\psi} \equiv (\psi^*)^t\,\gamma^0$, essa è evidentemente invariante in forma sotto la trasformazione di fase (1.4.156).
  La corrente conservata che ne discende in base alla (1.4.158) è

$$\begin{aligned} J^\mu &= i\left[-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\psi + \bar{\psi}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})}\right] \\ &= \frac{i}{2}\,[-i\bar{\psi}\gamma^\mu\psi - i\bar{\psi}\gamma^\mu\psi] = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \end{aligned} \tag{1.4.170}$$

  Quanto poi alla componente temporale della quadricorrente, essa risulta evidentemente pari a

$$J^0 = \bar{\psi}\gamma^0\psi = \psi^\dagger\psi \tag{1.4.171}$$

  che è definita positiva.

Capitolo 2

Cenni di QFT

2.1 Introduzione

Dopo le considerazioni precedenti relative ai campi classici, passiamo adesso a considerare gli aspetti più rilevanti della Teoria Quantistica dei Campi (QFT), affrontando così il problema della cosiddetta *seconda quantizzazione*. Coerentemente con il fatto che in Teoria Classica dei Campi, questi, in ogni punto, vanno considerati come una sorta di coordinata lagrangiana generalizzata, in QFT i campi sono operatori agenti nello spazio di Hilbert degli stati della particella/antiparticella a cui essi si riferiscono.
Un aspetto fondamentale del loro studio è senza dubbio quello che riguarda le loro regole di commutazione o anticommutazione.
Come vedremo, quando sarà possibile, useremo a questo scopo tutte le possibili analogie con la prima quantizzazione (MQ), che ci farà quindi da guida attraverso le sue regole di commutazione canoniche.

Inizieremo trattando il caso del campo scalare, per passare poi al campo vettoriale massivo, a quello di massa nulla, al campo elettromagnetico e infine al campo di Dirac.

2.2 Il campo scalare libero

L'evoluzione libera del campo scalare[1] carico di massa m è retta dalla lagrangiana

$$\mathcal{L} \;=\; (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi^\dagger) \;-\; m^2\, \phi\, \phi^\dagger \tag{2.2.9}$$

da cui ricaviamo appunto l'equazione di Klein-Gordon sia per ϕ che per $\phi^\dagger$ (considerati indipendenti)

$$\Box\phi \;+\; m^2\, \phi \;=\; 0; \qquad\qquad \Box\phi^\dagger \;+\; m^2\, \phi^\dagger \;=\; 0; \tag{2.2.10}$$

Per procedere alla quantizzazione del campo scalare (complesso) $\phi(x)$, esso viene espanso in termini di operatori di *creazione/distruzione* di singola

[1]Consideriamo la trasformazione (a, Λ) del gruppo di Poincaré

$$(a, \Lambda): \qquad x \to x' = a + \Lambda x \tag{2.2.1}$$

e indichiamo con $U \equiv U(a, \Lambda)$ l'operatore unitario della rappresentazione del gruppo la quale descrive l'azione di questa trasformazione sui vettori di stato del sistema dato.
Se consideriamo due stati generici $|\alpha>$ e $|\beta>$ e poniamo

$$|\alpha'>= U(a, \Lambda)|\alpha>; \qquad\qquad |\beta'>= U(a, \Lambda)|\beta> \tag{2.2.2}$$

allora l'azione dell'operatore unitario $U(a, \Lambda)$ sul campo $\phi(x)$, definito in tutto lo spazio tempo, dovrà essere tale che

$$<\alpha|\, \phi(x)\, |\beta>=<\alpha'|\, \phi(x')\, |\beta'>\equiv<\alpha|U^\dagger(a, \Lambda)\phi(x')U(a, \Lambda)|\beta> \tag{2.2.3}$$

ovvero, per l'arbitrarietà degli stati considerati, essendo $U^\dagger = U^{-1}$ e risultando $x = \Lambda^{-1}(x' - a)$, abbiamo

$$\phi(\Lambda^{-1}(x' - a)) = U^{-1}(a, \Lambda)\phi(x')U(a, \Lambda) \tag{2.2.4}$$

da cui, equivalentemente, si ottiene altresì che

$$\phi(x') = U(a, \Lambda)\phi(x)U^{-1}(a, \Lambda) = \phi(a + \Lambda x) \tag{2.2.5}$$

Questa conclusione, per come l'abbiamo ricavata, è valida per il campo scalare.

Nel caso in cui il campo abbia diverse componenti, dobbiamo attenderci, in generale, che la trasformazione possa mescolarle fra loro, ovvero che risulti (la scelta di usare M^{-1} invece di M diventerà più chiara in seguito ...)

$$<\alpha|\, \phi_i(x)\, |\beta>= M^{-1}_{ij}\; <\alpha'|\, \phi_j(x')\, |\beta'> \tag{2.2.6}$$

essendo $M = M(\Lambda)$.
Proseguendo il calcolo in modo analogo a quanto già fatto, abbiamo che

$$\phi_i(\Lambda^{-1}(x' - a)) = M^{-1}_{ij}\, U^{-1}(a, \Lambda)\phi(x')U(a, \Lambda) \tag{2.2.7}$$

e dunque

$$U(a, \Lambda)\phi_i(x)U^{-1}(a, \Lambda) = M^{-1}_{ij}\, \phi(a + \Lambda x) \tag{2.2.8}$$

Poiché questa legge di trasformazione deve riflettere la legge di composizione interna del gruppo, è facile verificare che $M = M(\Lambda)$ deve costituire una rappresentazione del gruppo di Lorentz.

particella[2] nel modo seguente:

$$\phi(x) \quad = \quad \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \left\{a(\vec{p})\, e^{-ipx} \;+\; b^\dagger(\vec{p})\, e^{ipx}\right\} \qquad (2.2.12)$$

da cui

$$\phi^\dagger(x) \quad = \quad \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \left\{b(\vec{p})\, e^{-ipx} \;+\; a^\dagger(\vec{p})\, e^{ipx}\right\} \qquad (2.2.13)$$

dove

- p è il quadrimpulso della particella/antiparticella: $p \equiv (E_p, \vec{p}) \equiv (\sqrt{m^2 + |\vec{p}|^2}, \vec{p})$;
- $a(\vec{p})$ annichila la particella di quadrimpulso $(E_p, \vec{p})$;
- $a^\dagger(\vec{p})$ crea la particella di quadrimpulso $(E_p, \vec{p})$;
- $b(\vec{p})$ annichila l'antiparticella di quadrimpulso $(E_p, \vec{p})$;
- $b^\dagger(\vec{p})$ crea l'antiparticella di quadrimpulso $(E_p, \vec{p})$;

e questi operatori[3] soddisfano le seguenti regole di commutazione che, come vedremo, garantiscono il rispetto delle regole di commutazione canoniche quando si considerino i campi stessi, appunto, come variabili lagrangiane generalizzate (tutte le altre coppie di operatori commutano fra loro ...)

$$\left[a(\vec{p}), a^\dagger(\vec{p'})\right] \;=\; \left[b(\vec{p}), a^\dagger(\vec{p'})\right] \;=\; 2\, E_p\, (2\pi^3)\; \delta^3(\vec{p} - \vec{p'}) \qquad (2.2.14)$$

Naturalmente, essendo gli operatori ϕ e $\phi^\dagger$ soluzioni di una equazione differenziale lineare e omogenea (l'equazione di Klein-Gordon), essi sono evidentemente indeterminati a meno di una costante moltiplicativa.

La scelta fatta attraverso lo (2.2.14) è quella per cui la funzione d'onda $\psi_{\vec{q}}(x)$ associata allo stato[4] $|\vec{q} > \equiv a^\dagger(\vec{q})|\Omega >$, autostato del quadrimpulso

[2] Coerentemente con la (2.2.5) e la (2.2.3), l'azione degli operatori unitari $U(a, \Lambda)$ sugli operatori di creazione e distruzione $a(\vec{p})$, $a^\dagger(\vec{p})$, $b(\vec{p})$ e $b^\dagger(\vec{p})$ è la seguente:

$$\begin{array}{llll} U(a,\Lambda)\, c(\vec{p})\, U^{-1}(a,\Lambda) = e^{-ia\cdot\Lambda p}\; c(\vec{\Lambda p}); & U^{-1}(a,\Lambda)\, c(\vec{p})\, U(a,\Lambda) = e^{ia\cdot p}\; c(\vec{\Lambda^{-1} p}) \\ U(a,\Lambda)\, c^\dagger(\vec{p})\, U^{-1}(a,\Lambda) = e^{ia\cdot\Lambda p}\; c^\dagger(\vec{\Lambda p}); & U^{-1}(a,\Lambda)\, c^\dagger(\vec{p})\, U(a,\Lambda) = e^{-ia\cdot p}\; c^\dagger(\vec{\Lambda^{-1} p}) \end{array} \qquad (2.2.11)$$

dove c sta per a oppure b e analogamente $c^\dagger$ per $a^\dagger$ o $b^\dagger$, mentre $\vec{\Lambda p}$ indica la parte spaziale del quadrivettore $\Lambda \cdot (\sqrt{m^2 + |\vec{p}|^2}, \vec{p})$, essendo m la massa della particella descritta dal campo.

[3] Si noti che gli operatori di creazione/annichilazione si riferiscono sempre a particelle o antiparticelle aventi energia $E_p = \sqrt{m^2 + |\vec{p}|^2}$ positiva !

[4] Indicheremo qui e nel seguito con $|\Omega >$ lo stato di vuoto, cioè lo stato di minima energia del sistema considerato: assumeremo inoltre che esso sia non degenere e invariante per trasformazioni del gruppo di Poincaré, nonché sotto C, P, e T.

per l'autovalore $(\sqrt{m^2 + |\vec{q}|^2}, \vec{q})$, coincide semplicemente con l'onda piana seguente

$$\psi_{\vec{q}}(\vec{x}, t) = e^{-iqx} \equiv e^{-i(Et - \vec{q}\cdot\vec{x})} = e^{-iEt}\, e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} \qquad (2.2.15)$$

A priori, per il solo fatto che, per definizione dell'operatore di creazione, $a^\dagger(\vec{q})|\Omega>$ è autostato del quadrimpulso, la funzione d'onda $\psi_{\vec{q}}(x)$ sarebbe tale che $\psi_{\vec{q}}(x) = K_{\vec{q}}\ e^{-iqx}$: la costante K è definita proprio dal fatto che

$$<\vec{p}|\vec{q}> \;=\; <\Omega|a(\vec{p})\, a^\dagger(\vec{q})|\Omega> = <\Omega|[a(\vec{p}), a^\dagger(\vec{q})]|\Omega> = 2E_p\ (2\pi)^3\ \delta^3(\vec{p} - \vec{q})$$

la quale implica dunque che risulti

$$<\psi_{\vec{p}}|\psi_{\vec{q}}> = 2E_p\ (2\pi)^3\ \delta^3(\vec{p} - \vec{q}) \qquad (2.2.16)$$

D'altronde, ricordiamo[5] che se $\psi_1(x)$ e $\psi_2(x)$ sono due funzioni d'onda so-

[5] La funzione d'onda $\hat{\psi}(\vec{p})$ che in rappresentazione dell'impulso è associata a un generico stato di singola particella $|\psi>$ (per l'antiparticella vale un discorso del tutto analogo con $a \leftrightarrow b$, ovvero $\phi \leftrightarrow \phi^\dagger$), per definizione, è tale che

$$|\psi> \equiv \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\, \hat{\psi}(\vec{p})\, |\vec{p}> = \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\, \hat{\psi}(\vec{p})\, a^\dagger(\vec{p})|\Omega> \qquad (2.2.17)$$

da cui discende, evidentemente, che il prodotto scalare dei due stati generici $|\psi_1>$ e $|\psi_2>$ è dato da (si ricordi che $<\vec{q}|\vec{p}> = (2\pi)^3\, 2E_q\, \delta^3(\vec{p} - \vec{q})$)

$$<\psi_1|\psi_2> = \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\, d^3q\, 2E_q(2\pi)^3 \hat{\psi}_1^*(\vec{q})\, \hat{\psi}_2(\vec{p})\ <\vec{q}|\vec{p}> = \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\, \hat{\psi}_1^*(\vec{p})\, \hat{\psi}_2(\vec{p}) \qquad (2.2.18)$$

Poiché, per quanto visto precedentemente, la funzione d'onda che descrive, in rapèpresentazione delle coordinate, lo stato $|\vec{p}> \equiv a^\dagger(\vec{p})|\Omega>$ è semplicemente l'esponenziale e^{-ipx}, ecco che allo stato $|\psi>$ possiamo associare, in rappresentazione delle coordinate, la funzione d'onda

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\, \hat{\psi}(\vec{p})\, e^{-ipx} \qquad (2.2.19)$$

la quale soddisfa, ovviamente, l'equazione di Klein-Gordon relativa alla massa m.
E' immediato allora che risulta

$$\psi(x) = <\Omega|\phi(x)|\psi> \qquad (2.2.20)$$

infatti

$$\begin{aligned} <\Omega|\phi(x)|\psi> &= \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\, \frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3} <\Omega|\{a(\vec{p})\, e^{-ipx} + b^\dagger(\vec{p})\, e^{ipx}\} a^\dagger(\vec{q})|\Omega> \hat{\psi}(\vec{q}) = \\ &= \int \frac{d^3p}{2E(2\pi)^3}\, e^{-ipx}\, \hat{\psi}(\vec{p}) \qquad (2.2.21) \end{aligned}$$

Questo è coerente con il fatto che lo stato $\phi^\dagger(x)|\Omega>$ di cui $<\Omega|\phi(x)$ è il bra, è uno stato di singola particella autostato della posizione per l'autovalore x, infatti risulta evidentemente che

$$\phi^\dagger(x)|\Omega> = \int \frac{d^3p}{2E(2\pi)^3}\, e^{ipx}\, |\vec{p}> \equiv |x> \qquad (2.2.22)$$

luzioni dell'equazione di Klein-Gordon, allora il loro prodotto scalare[6] è il seguente

$$< \psi_1|\psi_2 >= i \int d^3x \left[\psi_1^*(\partial^0\psi_2) - (\partial^0\psi_1^*)\psi_2\right] \tag{2.2.28}$$

dove le due funzioni sono valutate allo stesso tempo t.

---

ma in rappresentazione dell'impulso l'operatore di quadriposizione X^μ è rappresentato da $X^\mu = -i\frac{\partial}{\partial p_\mu}$, così come in rappresentazione delle coordinate l'operatore di quadriimpulso è rappresentato da $P^\mu = i\frac{\partial}{\partial x_\mu}$, per cui

$$X^\mu\, \phi^\dagger(x)|\Omega >= -i\frac{\partial}{\partial p_\mu} \int \frac{d^3p}{2E(2\pi)^3}\, e^{ipx}\, |\vec{p}>= x^\mu\, \phi^\dagger(x)|\Omega > \tag{2.2.23}$$

Quanto infine alla normalizzazione di questi autostati della posizione, abbiamo

$$< y|x >=< \Omega|\phi(y)\phi^\dagger(x)|\Omega >= \int \frac{d^3p}{2E(2\pi)^3}\, e^{ip(y-x)} \equiv \Delta^+(y-x) \tag{2.2.24}$$

dove la funzione impropria $\Delta^+(x)$ verrà descritta più diffusamente in seguito.

[6] L'espressione (2.2.28) non è, a stretto rigore, un prodotto scalare nel senso solito di questo termine in Meccanica Quantistica perché su due generiche soluzioni dell'equazione di Klein-Gordon non è, in generale, definito positivo. La struttura di questo prodotto nasce dal fatto che se $\psi_1(x)$ e $\psi_2(x)$ sono soluzioni dell'equazione di Klein-Gordon, allora l'unica corrente conservata antilineare in ψ_1 e lineare in ψ_2 (ovvero sequilineare in ψ_1, ψ_2) risulta essere proporzionale a

$$J^\mu(x) = i\left[\psi_1^*(x)(\partial^\mu\psi_2(x)) - (\partial^\mu\psi_1(x))^*\psi_2(x)\right] \tag{2.2.25}$$

da cui ne segue che

$$\int d^3x\, J^0(t,\vec{x}) = i\int d^3x\, \left[\psi_1^*(\partial^0\psi_2) - (\partial^0\psi_1^*)\psi_2\right] \tag{2.2.26}$$

è certamente indipendente dal tempo e dunque rappresenta l'unica generalizzazione possibile (a meno di costanti moltiplicative) del prodotto scalare che non sia in conflitto con la dinamica.

Venendo al caso di due generici stati di singola particella o di singola antiparticella, il prodotto scalare in questione è definito positivo, e, in accordo con la (2.2.18), vale

$$\begin{aligned}
&< \psi_1|\psi_2 >= i\int d^3x\, \left[\psi_1^*(\vec{x},t)(\partial^0\psi_2(\vec{x},t)) - (\partial^0\psi_1^*(\vec{x},t))\psi_2(\vec{x},t)\right] = \\
= &\; i\int d^3x\, \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\, \frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3}\, \left[\hat{\psi}_1^*(\vec{p})e^{ipx}\left(\partial^0\hat{\psi}_2(\vec{q})e^{-iqx}\right) - \partial^0\left(\hat{\psi}_1^*(\vec{p})e^{ipx}\right)\, \hat{\psi}_2(\vec{q})e^{-iqx}\right] = \\
= &\int d^3x\, \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\, \frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3}\, \left[q^0\,\hat{\psi}_1^*(\vec{p})e^{ipx}\hat{\psi}_2(\vec{q})e^{-iqx} + p^0\,\hat{\psi}_1^*(\vec{p})e^{ipx}\hat{\psi}_2(\vec{q})e^{-iqx}\right] = \\
= &\int d^3x e^{-i\vec{x}\cdot(\vec{p}-\vec{q})}\frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\, \frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3}\, e^{-it(q^0-p^0)}\left[q^0\,\hat{\psi}_1^*(\vec{p})\hat{\psi}_2(\vec{q}) + p^0\,\hat{\psi}_1^*(\vec{p})\hat{\psi}_2(\vec{q})\right] = \\
= &\int (2\pi)^3\delta^3(\vec{p}-\vec{q})\frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\, \frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3}\, e^{-it(q^0-p^0)}\left[q^0\,\hat{\psi}_1^*(\vec{p})\hat{\psi}_2(\vec{q}) + p^0\,\hat{\psi}_1^*(\vec{p})\hat{\psi}_2(\vec{q})\right] = \\
= &\int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\hat{\psi}_1^*(\vec{p})\,\hat{\psi}_2(\vec{p})
\end{aligned} \tag{2.2.27}$$

Nel caso in esame, abbiamo dunque

$$\begin{aligned} < \psi_{\vec{p}}|\psi_{\vec{q}} > &= i\, K^*_{\vec{p}}\, K_{\vec{q}} \int d^3x \left[e^{ipx}\,(-iq^0)\,e^{-iqx} - ip^0\, e^{ipx}\, e^{-iqx} \right] = \\ &= K^*_{\vec{p}}\, K_{\vec{q}} \int d^3x (q^0+p^0) e^{ix(p-q)} = K^*_{\vec{p}}\, K_{\vec{q}} (q^0+p^0)\, e^{it(p^0-q^0)} (2\pi)^3\, \delta^3(\vec{p}-\vec{q}) = \\ &= |K_{\vec{p}}|^2\; 2E_p\; (2\pi)^3\, \delta^3(\vec{p}-\vec{q}) \end{aligned}$$

e il confronto con la (2.2.16) impone appunto che, indipendentemente da $\vec{p}$, sia $|K|^2 = 1$, ovvero[7] $K = 1$. Lo stesso vale per le antiparticelle.

Vogliamo ricordare infine che, siccome la densità di corrente[8], definita dall'invarianza di gauge di prima specie e associata alla generica funzione d'onda ψ che soddisfa l'equazione di Klein-Gordon, è data da

$$j^\mu(x) = i\,[\psi^*(\partial^\mu \psi) - (\partial^\mu \psi^*)\psi] \tag{2.2.30}$$

la funzione d'onda $\psi_{\vec{p}}(x) = e^{-ipx}$ rappresenta uno stato con densità di particelle/antiparticelle pari a

$$\rho(x) = J^0(x) = i\left[\psi^*(\partial^0 \psi) - (\partial^0 \psi^*)\psi\right] = 2E \tag{2.2.31}$$

Concludendo, dunque, possiamo dire che la normalizzazione scelta è tale per cui gli stati di "singola" particella/antiparticella $a^+(\vec{q})|\Omega>$ o $b^+(\vec{q})|\Omega>$ descrivono stati normalizzati a $2E$ particelle/antiparticelle per unità di volume. Questo risultato, come vedremo, ci ritornerà utile in seguito, quando tratteremo il problema dello spazio delle fasi, nell'ambito della teoria dello scattering.

Veniamo infine alla questione dei commutatori dei campi e alla giustificazione della scelta fatta.
Sulla base dell'analogia classica secondo cui, fissato comunque un tempo t, il campo $\phi(\vec{x};t)$ costituisce una generalizzazione del concetto di coordinata lagrangiana, ci aspettiamo che risulti

$$[\phi(\vec{x};t), \phi(\vec{y};t)] = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[\phi^\dagger(\vec{x};t), \phi^\dagger(\vec{y};t)\right] = 0 \tag{2.2.32}$$

[7] Si noti che $|K|^2 = 1$ impone solo che K abbia modulo unitario e dunque possa essere costituito solo da un fattore di fase, il quale può essere semplicemente riassorbito nella definizione della base.

[8] Come abbiamo visto in precedenza, parlando del teorema di Noëther, se la lagrangiana è invariante in forma sotto il gruppo $U(1)$ delle trasformazioni di gauge di prima specie $x \to x,\;\; \psi \to e^{i\alpha}\psi,\;\; \psi^\dagger \to e^{-i\alpha}\psi^\dagger$ allora la corrente conservata che ne deriva è la seguente

$$J^\mu(x) = i\left[-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)}\,\psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi^*)}\,\psi^*\right] \tag{2.2.29}$$

Ma che dire del commutatore $\left[\phi(\vec{x};t), \phi^\dagger(\vec{y};t)\right]$?

Questo non può essere altrettanto semplice, infatti, proprio per l'analogia classica secondo cui il momento coniugato alla variabile lagrangiana q è

$$p \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}$$

ne segue che il "momento coniugato" al campo $\phi(\vec{x},t)$ sarà il campo

$$\pi(\vec{x},t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \phi)} = \partial_t \phi^\dagger(\vec{x},t) \tag{2.2.33}$$

e, analogamente, quello coniugato al campo $\phi^\dagger(\vec{x},t)$ risulterà essere

$$\pi^\dagger(\vec{x},t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \phi^\dagger)} = \partial_t \phi(\vec{x},t) \tag{2.2.34}$$

Quindi, proprio per l'analogia con la Meccanica Quantistica di prima quantizzazione, per cui ($\hbar = 1$) risulta

$$[p, x] = -i \tag{2.2.35}$$

dobbiamo adesso aspettarci[9] che valga la ovvia generalizzazione al caso continuo della (2.2.35), cioè

$$\begin{aligned} &[\pi(\vec{y},t), \phi(\vec{x},t)] = -i\ \delta^3(\vec{y}-\vec{x}) \\ &\Rightarrow \left[\phi(\vec{x},t), \partial_t \phi^\dagger(\vec{y},t)\right] = i\,\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \end{aligned} \tag{2.2.36}$$

e, analogamente, quindi, che sia

$$\left[\phi^\dagger(\vec{x},t), \partial_t \phi(\vec{y},t)\right] = i\,\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \tag{2.2.37}$$

Questo è, in effetti, esattamente quanto accade usando le regole di commutazione (2.2.14) fissate per gli operatori di creazione e distruzione.
Infatti si ha

$$\begin{aligned} &\left[\phi(\vec{x},t), \partial_t \phi^\dagger(\vec{y},t)\right] = \\ = &\left[\int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\{a(\vec{p})e^{-ipx} + b^\dagger(\vec{p})e^{ipx}\}\,,\ \partial_t \int \frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3}\{b(\vec{q})e^{-iqy} + a^\dagger(\vec{q})e^{iqy}\}\right]_{t=x^0=y^0} = \\ = &\int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3}\left\{iq^0\left[a(\vec{p}), a^\dagger(\vec{q})\right]\ e^{-ipx}\,e^{iqy} - iq^0\left[b^\dagger(\vec{p}), b(\vec{q})\right]\ e^{ipx}\,e^{-iqy}\right\}_{t=x^0=y^0} = \\ = &\int \frac{d^3p\ d^3q}{2E_p\ 2E_q(2\pi)^6}\ iE_q\left\{2E_q\,(2\pi)^3\,\delta^3(\vec{p}-\vec{q})\left[e^{i(\vec{p}\cdot\vec{x}-\vec{q}\cdot\vec{y})} + e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{x}-\vec{q}\cdot\vec{y})}\right]\right\} \end{aligned}$$

dove si è usata la definizione (2.2.14) unitamente al fatto che

[9] E' importante notare che, in base all'analogia con la MQ di prima quantizzazione, le regole di commutazione possono essere definite solo a tempi uguali. Una volta che queste siano state assegnate (proprietà cinematica), le regole di commutazione a tempi diversi sono determinate dall'evoluzione del sistema nel tempo, cioè dalla sua dinamica, ovvero dalle soluzioni esplicite dell'equazione del moto.

- abbiamo posto per definizione $px \equiv p^0x^0 - \vec{p}\cdot\vec{x}$;
- risulta $x^0 = y^0 = t$;
- $q^0 \equiv E_q$

per cui, visto che per la presenza nell'integrale della funzione delta proveniente dal commutatore, è $E_p = E_q$, si può evidentemente assumere che

$$p^0x^0 - q^0y^0 = t(p^0 - q^0) = 0$$

Ne segue quindi che il commutatore in esame, integrando la delta, vale

$$\left[\phi(\vec{x},t), \partial_t\phi^\dagger(\vec{y},t)\right] = \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\; iE_p \left\{e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} + e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}\right\} \quad (2.2.38)$$

Ma

$$\int d^3p\;\; e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} = (2\pi)^3\,\delta(\vec{x}-\vec{y}) = \int d^3p\;\; e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}$$

quindi esso, alla fine, risulta pari a

$$\left[\phi(\vec{x},t), \partial_t\phi^\dagger(\vec{y},t)\right] = i\;\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \quad (2.2.39)$$

che è quanto ci attendevamo sulla base dell'analogia con la MQ di prima quantizzazione.
Lo stesso accade, ovviamente, anche per il commutatore $[\phi^\dagger, \partial_t\phi]$ per il quale risulta ancora

$$\left[\phi^\dagger(\vec{x},t), \partial_t\phi(\vec{y},t)\right] = i\;\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \quad (2.2.40)$$

Questo dimostra quindi che le regole di commutazione fissate per gli operatori di creazione e distruzione (2.2.14) sono esattamente quelle in grado di riprodurre le regole di commutazione che debbono valere, a tempi uguali, fra i campi e i loro momenti coniugati.
Ovviamente, poi le regole di commutazione (2.2.14) consentono di determinare le regole di commutazione fra i campi stessi anche a tempi diversi.
In generale[10] risulta

$$\begin{aligned}
&\left[\phi(x), \phi^\dagger(y)\right] = \\
= &\left[\int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\left\{a(\vec{p})e^{-ipx} + b^\dagger(\vec{p})e^{ipx}\right\}\,,\,\int \frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3}\left\{b(\vec{q})e^{-iqy} + a^\dagger(\vec{q})e^{iqy}\right\}\right] = \\
= &\int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3}\left\{\left[a(\vec{p}), a^\dagger(\vec{q})\right]e^{-ipx}\,e^{iqy} + \left[b^\dagger(\vec{p}), b(\vec{q})\right]e^{ipx}\,e^{-iqy}\right\} = \\
= &\int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3}\left\{2E_p\,(2\pi)^3\,\delta^3(\vec{p}-\vec{q})e^{-ipx}\,e^{iqy} - 2E_p\,(2\pi)^3\,\delta^3(\vec{p}-\vec{q})e^{ipx}\,e^{-iqy}\right\}
\end{aligned}$$

[10]Evidentemente dalle regole di commutazione (2.2.14) segue immediatamente che

$$[\phi(x), \phi(y)] = [\phi^\dagger(x), \phi^\dagger(y)] = 0$$

Integrando in d^3p, dato che quando $\vec{p} = \vec{q}$ anche $p^0 = q^0 = E_p = E_q \equiv \sqrt{m^2 + |\vec{q}|^2}$, abbiamo

$$\left[\phi(x), \phi^\dagger(y)\right] = \int \frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3} \left[e^{-iq(x-y)} - e^{iq(x-y)}\right] \equiv \Delta^+(x-y) + \Delta^-(x-y) \quad (2.2.41)$$

dove le funzioni improprie Δ^+ e Δ^- sono così definite[11]

$$\Delta^+(x-y) \equiv \int \frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3} e^{-iq(x-y)} \quad (2.2.44)$$

$$\Delta^-(x-y) \equiv -\int \frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3} e^{iq(x-y)} \quad (2.2.45)$$

D'altronde, l'integrale (2.2.41), usando il fatto che

$$\frac{d^3q}{2E_q} = d^4q\ \delta(q^2 - m^2)\,\Theta(q^0) \quad (2.2.46)$$

può essere anche riscritto nel modo seguente

$$\begin{aligned}\left[\phi(x), \phi^\dagger(y)\right] &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4q\, \delta(q^2 - m^2)\,\Theta(q^0)\, e^{-iq(x-y)} - \\ &- \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4q\, \delta(q^2 - m^2)\,\Theta(q^0)\, e^{iq(x-y)} \quad (2.2.47)\end{aligned}$$

ovvero, con la sostituzione $q \to -q$ nel secondo integrale, finalmente otteniamo

$$\begin{aligned}\left[\phi(x), \phi^\dagger(y)\right] &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4q\, \delta(q^2 - m^2)\, e^{-iq(x-y)} \left[\Theta(q^0) - \Theta(-q^0)\right] = \\ &\equiv i\,\Delta(x-y; m) \quad (2.2.48)\end{aligned}$$

dove si è fatto uso della definizione della funzione impropria

$$\Delta(x-y; m) \equiv -\frac{i}{(2\pi)^3} \int d^4q\, \delta(q^2 - m^2)\, e^{-iq(x-y)} \left[\Theta(q^0) - \Theta(-q^0)\right] \quad (2.2.49)$$

Ed evidentemente[12] dalla (2.2.41) e dalla (2.2.48) discende che

$$i\Delta(x-y) = \Delta^+ + \Delta^- \Leftrightarrow \Delta(x-y) = -i(\Delta^+ + \Delta^-) \quad (2.2.51)$$

[11]Le notazioni sono quelle usate anche nel libro *Relativistic Quantum Fields* di J.D. Bjorkeen e S.D. Drell. Si osservi che dalle definizioni (2.2.44) e (2.2.45) segue, in particolare, che

$$\Delta^\pm(x) = -\Delta^\mp(-x) \quad (2.2.42)$$

$$\left[\Delta^\pm(x)\right]^* = -\Delta^\mp(x) \quad (2.2.43)$$

[12]Quando questo non creerà possibili confusioni, ometteremo la dipendenza esplicita dalla massa m, ovvero porremo

$$\Delta(x-y; m) \equiv \Delta(x-y) \quad (2.2.50)$$

La funzione Δ, definita dalla (2.2.49)

- soddisfa l'equazione di Klein-Gordon[13]

$$\left(\Box + m^2\right)\, \Delta(x;m) = 0 \tag{2.2.52}$$

- è tale per cui[14]

$$\partial_t\, \Delta(\vec{x},t;m)\big|_{t=0} = -\delta(\vec{x}) \tag{2.2.54}$$

- è reale[15]
- è dispari[16]
- è scalare[17] sotto il gruppo di Lorentz.

Si noti che dalla sua natura dispari e dal fatto che è scalare sotto il gruppo di Lorentz, ne segue che la funzione Δ è nulla se x è un quadrivettore *space-like*, potendo x essere cambiato di segno con una opportuna trasformazione

[13]Infatti abbiamo

$$\left(\Box + m^2\right)\, \Delta(x;m) = -i\left(\Box + m^2\right)\, [\phi(x),\phi^\dagger(0)] = 0$$

essendo $\left(\Box + m^2\right)\phi(x) = 0$.

[14]Infatti risulta

$$\begin{aligned} \partial_t\, \Delta(\vec{x},t;m)\big|_{t=0} &= -i\partial_t\left[\phi(x),\phi^\dagger(0)\right]_{t=0} = -i\left[\partial_t\phi(x)\big|_{t=0},\phi^\dagger(0)\right] = \\ = \quad & -i\left[\Pi^\dagger(\vec{x},0),\phi^\dagger(\vec{0},0)\right] = -i\left[-i\delta(\vec{x})\right] = -\delta(\vec{x}) \end{aligned} \tag{2.2.53}$$

dove abbiamo usato il fatto che

$$\Pi^\dagger(x) \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}^\dagger} = \dot{\phi}(x)$$

e che, a tempi uguali, risulta appunto, come abbiamo visto, che

$$[\Pi(\vec{x},t),\phi(\vec{y},t)] = -i\delta(\vec{x}-\vec{y}) = \left[\Pi^\dagger(\vec{x},t),\phi^\dagger(\vec{y},t)\right]$$

[15]Infatti, essendo $i\Delta(x) \equiv \Delta^+(x) + \Delta^-(x)$ abbiamo che

$$[i\Delta(x)]^* = -i\Delta^*(x) = \left(\Delta^+(x)\right)^* + \left(\Delta^-(x)\right)^* = -\Delta^-(x) - \Delta^+(x) = -i\Delta(x) \Rightarrow \Delta^*(x) = \Delta(x)$$

[16]Infatti

$$i\Delta(-x) = \Delta^+(-x) + \Delta^-(-x) = -\Delta^-(x) - \Delta^+(x) = -i\Delta(x) \Rightarrow \Delta(-x) = -\Delta(x)$$

[17]La struttura della funzione, così come risulta dalla (2.2.49), non lascia dubbi in proposito: l'elemento di volume è invariante e la funzione integranda è scalare perché le funzioni $\Theta(\pm q^0)$ sono entrambe costanti su ciascuno dei due iperboloidi definiti dalla condizione di massa espressa dalla equazione $p^2 - m^2 = 0$, in quanto il segno della componente temporale di un quadrivettore time-like, come sappiamo, è invariante sotto trasformazioni del gruppo di Lorentz ortocrono proprio.

di Lorentz. Questo implica che il commutatore $[\phi(x), \phi^\dagger(y)]$ è nullo quando il quadrivettore $x-y$ è space-like, ovvero quando non è possibile connettere x con y in modo causale e quindi, in particolare, per esempio, quando $x^0 = y^0$, ovvero $\Delta(\vec{x}, 0; m) = 0$.
Questo risultato era comunque da attendere perché, se vogliamo che ci sia coerenza con la relatività ristretta, variabili non causalmente correlabili non possono influenzarsi a vicenda e dunque non possono che commutare fra loro!

La funzione $\Delta(x) \equiv \Delta(x; m)$, o funzioni a essa collegate, si ritrovano in ogni teoria di campo perché, alla fine, ognuna di queste teorie tratta di particelle con massa definita e dunque di campi che soddisfano *anche* l'equazione di Klein-Gordon con massa opportuna.
Vediamo dunque di studiarne meglio le proprietà e le caratteristiche.
Osserviamo che, evidentemente, essendo il commutatore (2.2.48) un c-numero (una funzione a valori complessi ...), risulta

$$< \Omega| \left[\phi(x), \phi^\dagger(y)\right] |\Omega >= i\,\Delta(x-y) = \Delta^+(x-y) + \Delta^-(x-y) \tag{2.2.55}$$

Vediamo adesso un po' meglio qual è il significato fisico dei due termini Δ^+ e Δ^-.
Consideriamo per questo le quantità seguenti

$$< \Omega|\phi(x)\,\phi^\dagger(y)|\Omega >; \qquad < \Omega|\phi(y)^\dagger\,\phi(x)|\Omega > \tag{2.2.56}$$

e partiamo dal fatto che, evidentemente, risulta[18]

$$\phi^\dagger(y)|\Omega >= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p}\, a^\dagger(\vec{p})|\Omega > e^{ipy} \equiv \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p}\, e^{ipy}\,|p> \tag{2.2.57}$$

dove $|p>$ è lo stato di singola particella di quadrimpulso p.
Evidentemente, passando al bra, si ha altresì che

$$< \Omega|\phi(x) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2E_q}\, e^{-iqx}\ < q| \tag{2.2.58}$$

per cui abbiamo

$$\begin{aligned} < \Omega|\phi(x)\phi^\dagger(y)|\Omega >&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p}\frac{d^3q}{(2\pi)^3 2E_q} e^{ipy}e^{-iqx}\ < q|p>= \\ = & \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p}\frac{d^3q}{(2\pi)^3 2E_q} e^{ipy}e^{-iqx}\,(2\pi)^3 2E_q\,\delta(\vec{q}-\vec{p}) = \\ = & \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p}\, e^{-ip(x-y)} \equiv \Delta^+(x-y) \end{aligned} \tag{2.2.59}$$

[18] Autostato della posizione ....

Per quanto riguarda l'altro termine, cioè $< \Omega|\phi(y)^\dagger, \phi(x)|\Omega >$, ripartiamo ancora dal fatto che

$$\phi(x)|\Omega >= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} \, b^\dagger(\vec{p})|\Omega > e^{ipx} \equiv \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} \, e^{ipx} \, |p> \quad (2.2.60)$$

dove però $|p>$ è ora lo stato di singola antiparticella di quadrimpulso p. Ripetendo il conto fatto sopra, abbiamo che

$$< \Omega|\phi^\dagger(y)\phi(x)|\Omega >= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2E_q} e^{ipx} e^{-iqy} \; < q|p >=$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} \, e^{ip(x-y)} \equiv -\Delta^-(x-y) \quad (2.2.61)$$

Ecco dunque il senso delle funzioni improprie $\Delta^\pm$: sono i valori di aspettazione sul vuoto delle forme bilineari nei campi $\phi(x)\phi^\dagger(y)$ e $\phi^\dagger(y)\phi(x)$, rispettivamente.

Un altro modo interessante di rappresentare sia la Δ che le funzioni $\Delta^\pm$ passa attraverso la definizione seguente

$$\hat{\Delta}(x) \equiv \frac{1}{(2\pi)^4} \int_C d^4q \, \frac{e^{iqx}}{q^2 - m^2} \quad (2.2.62)$$

dove C è un cammino di integrazione che è chiuso nel piano complesso q_0, contiene entrambi i poli della funzione integranda $q_0 = \pm E_q \equiv \sqrt{m^2 + |\vec{p}|^2}$ ed è percorso in senso antiorario (vedi Fig. 2.1).

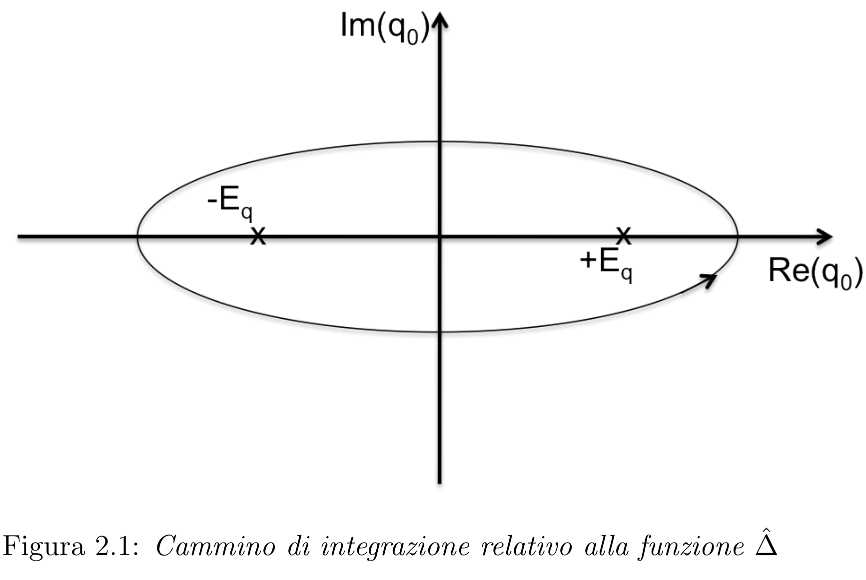

Figura 2.1: *Cammino di integrazione relativo alla funzione* $\hat{\Delta}$

Abbiamo dunque

$$\begin{aligned}
\hat{\Delta}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^4}\int_C d^4q\,\frac{e^{iqx}}{q^2-m^2} = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^3q e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}}\int_C dq^0\,\frac{e^{iq_0t}}{q_0^2-E_q^2} = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^3q e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}}\,(2\pi\, i)\left[\frac{e^{iE_qt}}{2E_q}+\frac{e^{-iE_qt}}{-2E_q}\right] = \\
&= \frac{i}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3q}{2E_q}\left(e^{iqx}-e^{-iqx}\right) = -i\Delta^-(x)-i\Delta^+(x) = \\
&= -i(\Delta^+(x)+\Delta^-(x)) = \Delta(x) \qquad (2.2.63)
\end{aligned}$$

dove, nel secondo addendo dell'integrale riportato nel penultimo rigo dell'equazione precedente, abbiamo effettuato la sostituzione $\vec{q}\to-\vec{q}$.
Dunque la funzione $\hat{\Delta}(x)$ definita dalla (2.2.62) è semplicemente un altro modo di rappresentare la funzione Δ stessa.
Questa rappresentazione, a sua volta, ci consente di reinterpretare le funzioni $\Delta^{\pm}$, infatti abbiamo evidentemente che

$$\begin{aligned}
\hat{\Delta}(x) &\equiv \frac{1}{(2\pi)^4}\int_C d^4q\,\frac{e^{iqx}}{q^2-m^2} = -i(\Delta^+ + \Delta^-) \;\Rightarrow \\
&\Rightarrow \left[\phi(x),\phi^\dagger(y)\right] = \Delta^- + \Delta^+ = i\hat{\Delta}(x) = \frac{i}{(2\pi)^4}\int_C d^4q\,\frac{e^{iqx}}{q^2-m^2} = \\
&= \frac{i}{(2\pi)^4}\int_{C^+} d^4q\,\frac{e^{iqx}}{q^2-m^2} + \frac{i}{(2\pi)^4}\int_{C^-} d^4q\,\frac{e^{iqx}}{q^2-m^2} \qquad (2.2.64)
\end{aligned}$$

dove i percorsi $C^{\pm}$ sono i percorsi chiusi in senso antiorario intorno a ciascun polo (vedi fig. 2.2)

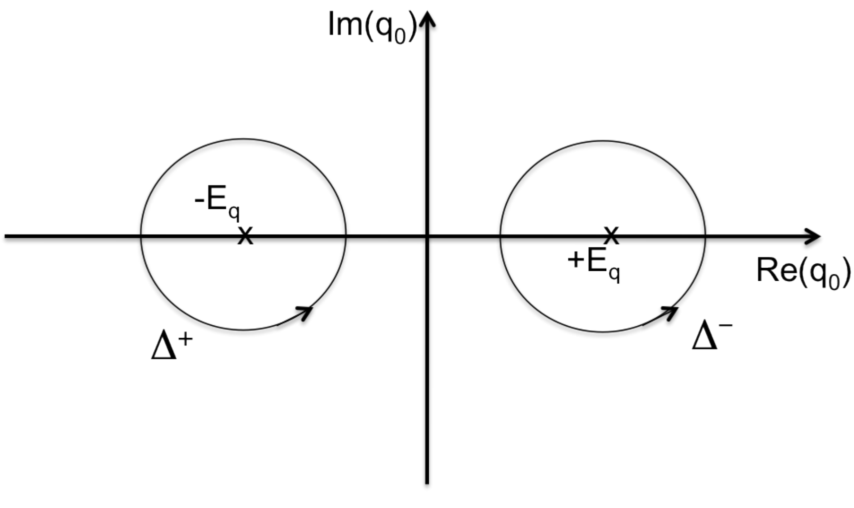

Figura 2.2: *Cammino di integrazione relativo alle funzione* $\Delta^{\pm}$

E' facile verificare[19] allora che risulta in particolare che[20]

$$\Delta^{\pm}(x) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int_{C^{\mp}} d^4q \, \frac{e^{iqx}}{q^2 - m^2} \tag{2.2.67}$$

Consideriamo ora un'altra funzione molto importante in teoria dei campi, legata anch'essa in modo speciale alle funzioni $\Delta^{\pm}$, che è la funzione di Green $G(x)$ ovvero il propagatore[21] del campo stesso.
La definizione[22] che adotteremo per la funzione impropria $G(x)$ è la seguente

$$\left(\Box + m^2\right) G(x) = -\delta^4(x) \tag{2.2.70}$$

Per esplicitare $G(x)$ assumeremo che essa sia rappresentabile in integrale di Fourier e dunque assumeremo di poter scrivere

$$G(x) = \int d^4q \, e^{-iqx} \, \hat{G}(q) \tag{2.2.71}$$

---

[19] Infatti si ha

$$\begin{aligned} \frac{i}{(2\pi)^4} \int_{C^-} d^4q \, \frac{e^{iqx}}{q^2 - m^2} &= \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^3q e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}} \int_{C^-} \frac{e^{iq^0 t}}{(q^0 - E_q)(q^0 + E_q)} = \\ = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^3q e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}} (2\pi i) \frac{e^{-iE_q t}}{-2E_q} &= \int \frac{1}{2E_q (2\pi)^3} d^3q e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}} \, e^{-iE_q t} = \\ = \int \frac{d^3q}{2E_q (2\pi)^3} e^{-iqx} &= \Delta^+(x) \end{aligned} \tag{2.2.65}$$

dove abbiamo effettuato nel penultimo integrale la solita sostituzione $\vec{q} \to -\vec{q}$.
Analogamente risulta

$$\begin{aligned} \frac{i}{(2\pi)^4} \int_{C^+} d^4q \, \frac{e^{iqx}}{q^2 - m^2} &= \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^3q e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}} \int_{C^-} \frac{e^{iq^0 t}}{(q^0 - E_q)(q^0 + E_q)} = \\ = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^3q e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}} (2\pi i) \frac{e^{iE_q t}}{2E_q} &= \int \frac{1}{2E_q (2\pi)^3} d^3q e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}} \, e^{-iE_q t} = \\ = -\int \frac{d^3q}{2E_q (2\pi)^3} e^{iqx} &= \Delta^-(x) \end{aligned} \tag{2.2.66}$$

[20] Sottolineiamo ancora una volta che le funzioni improprie $\Delta^{\pm}(x)$ e $\Delta(x)$ sono soluzioni dell'equazione di Klein-Gordon omogenea (per la massa m).

[21] Come è noto, il nome *propagatore* trae la sua origine dal fatto che, in presenza di un termine di sorgente $S(x)$ del campo, ovvero nel caso dell'equazione inomogenea

$$\left(\Box + m^2\right) \phi(x) = S(x) \tag{2.2.68}$$

la soluzione generale si può scrivere formalmente nel modo seguente

$$\phi(x) = \phi_0(x) - \int d^4y \; G(x-y) \, S(y) \tag{2.2.69}$$

dove $\phi_0(x)$ è una qualunque soluzione dell'equazione omogenea.

[22] In matematica la definizione usuale della funzione di Green differisce da quella da noi adottata per il segno. La ragione della scelta diversa sta semplicemente nella maggior praticità d'uso nel caso dei campi, legata a sua volta alla scelta della metrica.

Siccome

$$\delta^4(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q\, e^{-iqx} \tag{2.2.72}$$

la (2.2.70) implica che debba essere

$$(-q^2 + m^2)\hat{G}(q) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \quad \Rightarrow \quad \hat{G}(q) = \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 - m^2} \tag{2.2.73}$$

e dunque

$$G(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q\, \frac{e^{-iqx}}{q^2 - m^2} \tag{2.2.74}$$

E' evidente, allora, dalla (2.2.74), la stretta similitudine con le funzioni $\Delta^{\pm}(x)$ e $\Delta(x)$: ma come si spiega che le funzioni $\Delta^{\pm}(x)$ e $\Delta(x)$ soddisfano l'equazione di Klein-Gordon omogenea, mentre il propagatore $G(x)$ verifica invece l'equazione disomogena (2.2.70) ?
Il punto è che la (2.2.74) non è sufficiente, da sola, per definire la funzione $G(x)$ a causa della presenza dei due zeri al denominatore della funzione integranda, per $q^0 = \pm E_p$.
Per definire $G(x)$ occorre anche definire il percorso di integrazione relativamente a q^0, ovvero decidere la prescrizione con cui trattare i poli.
La prescrizione che si usa quanto a G è quella di Feynman-Stueckelberg, per cui

$$\hat{G}(q) \to \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 - m^2 + i\epsilon} \tag{2.2.75}$$

dove la quantità positiva ϵ verrà poi mandata a zero al momento opportuno e serve unicamente per definire il modo di operare intorno ai poli.
Con questa prescrizione, il denominatore della funzione integranda diviene infatti

$$q^2 - m^2 + i\epsilon = q_0^2 - |\vec{q}|^2 - m^2 + i\epsilon = q_0^2 - E_q^2 + i\epsilon \approx q_0^2 - \left(E_q - \frac{i\epsilon}{2E_q}\right)^2 \tag{2.2.76}$$

ovvero si azzera non più sull'asse reale, bensì nei punti del piano complesso tali che

$$q_0 = \pm\left(E_q - \frac{i\epsilon}{2E_q}\right) \equiv \pm\left(E_q - i\epsilon'\right) \tag{2.2.77}$$

Accade dunque che il polo con parte reale positiva E_q si *abbassa* sotto l'asse reale della quantità $\epsilon' = \frac{\epsilon}{2E_q}$, mentre il polo in $-E_q$ si *alza* sopra l'asse reale della stessa quantità (vedi fig.2.3 a)). In questo modo, sull'asse reale q^0 non

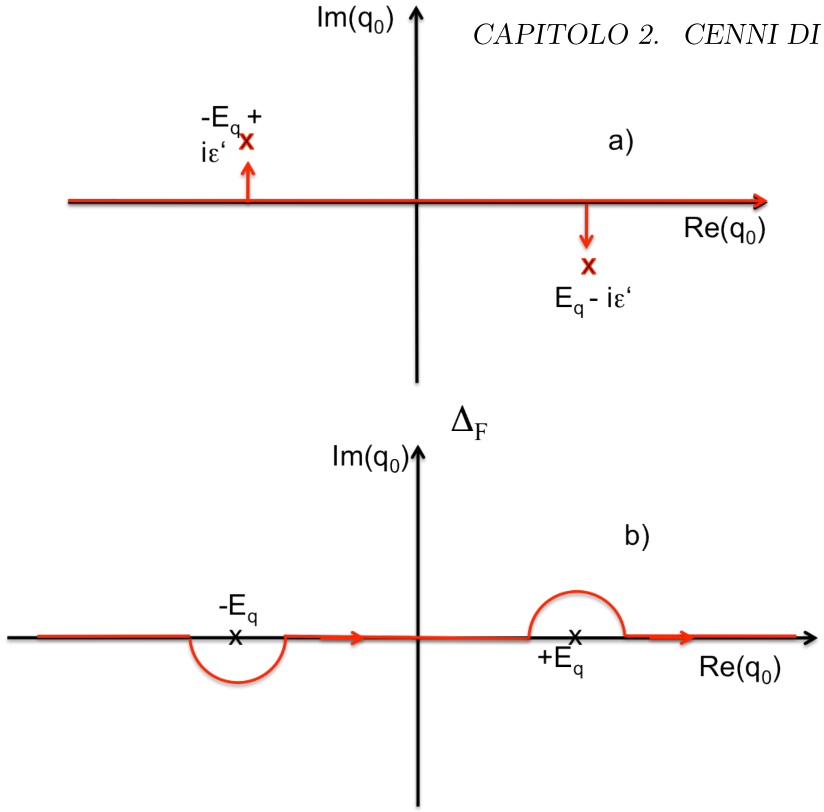

Figura 2.3: *Cammino di integrazione relativo al propagatore* $G = \Delta_F$

ci sono più poli e l'integrazione da $-\infty$ a $+\infty$ può procedere senza necessità di altre precisazioni[23]. Abbiamo

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4q\,\frac{e^{-iqx}}{q^2-m^2+i\epsilon} = \int\frac{d^3q}{(2\pi)^4}\,e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}\int_{-\infty}^{+\infty}dq^0\,\frac{e^{-iq^0t}}{q_0^2-E_q^2+i\epsilon} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^3q\,e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}\int_{-\infty}^{+\infty}dq^0\,\frac{e^{-iq^0t}}{[q^0-(E_q-i\epsilon')]\,[q^0+(E_q-i\epsilon')]} \end{aligned} \quad (2.2.78)$$

Si osservi adesso che la funzione integranda è olomorfa in tutto il piano complesso q_0, a parte i due poli semplici in $q^0 = \pm(E_q - i\epsilon')$, e l'integrale è sull'asse reale. Nel caso in cui $t > 0$, la presenza dell'esponenziale e^{-iq^0t} nella funzione integranda consente di chiudere il cammino di integrazione all'infinito su una semicirconferenza nel semipiano inferiore ($\Im m(q_0) < 0$), senza che questo contributo alteri il valore dell'integrale sull'asse reale in quanto l'integrale sulla semicirconferenza sarà comunque nullo a causa dell'esponenziale reale negativo che si realizza su questo cammino. D'altronde, proprio perché la funzione integranda è olomorfa in tutto il piano complesso all'infuori dei due poli semplici ben noti, sappiamo che un qualunque suo

[23]Evidentemente lo stesso risultato si ottiene senza introdurre il termine immaginario proporzionale ad ϵ, ma valutando l'integrale seguendo semplicemente la prescrizione illustrata nella figura 2.3 *b*).

integrale su un percorso chiuso avrà come risultato la somma dei residui ai poli contenuti all'interno del cammino di integrazione.
Per $t > 0$, richiudendo verso il basso, il solo polo che viene compreso nel cammino di integrazione è quello per $q^0 = (E_q - i\epsilon')$, percorso in senso orario.
Dunque, per $\epsilon \to 0$, abbiamo

$$t > 0 : \quad G(x) \quad = \quad -\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{C^+} d^4q\,\frac{e^{-iqx}}{q^2 - m^2} \tag{2.2.79}$$

D'altronde

$$-\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{C^+} d^4q\,\frac{e^{-iqx}}{q^2 - m^2} = -\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^3q e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}\int_{C^+} dq_0\frac{e^{-iq_0t}}{(q_0 - E_q)(q_0 + E_q)} =$$
$$-\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^3q e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}(2\pi i)\frac{e^{-iE_qt}}{2E_q} = \frac{-i}{(2\pi^3)}\int \frac{d^3q}{2E_q}\,e^{-iqx} \equiv -i\Delta^+(x) \tag{2.2.80}$$

Nel caso in cui $t < 0$, dovendo richiudere il cammino nel semipiano superiore, il polo da considerare è quello per $q^0 = -(E_q - i\epsilon')$ e dunque, siccome questa volta il senso di circolazione è quello antiorario, risulta

$$t < 0 : \quad G(x) \quad = \quad \frac{1}{(2\pi)^4}\int_{C^-} d^4q\,\frac{e^{-iqx}}{q^2 - m^2} \tag{2.2.81}$$

Ma

$$\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{C^-} d^4q\,\frac{e^{-iqx}}{q^2 - m^2} = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^3q e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}\int_{C^-} dq_0\frac{e^{-iq_0t}}{(q_0 - E_q)(q_0 + E_q)} =$$
$$\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^3q\, e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}(2\pi i)\frac{e^{iE_qt}}{-2E_q} = \frac{-i}{(2\pi^3)}\int \frac{d^3q}{2E_q}\,e^{iqx} \equiv i\Delta^-(x) \tag{2.2.82}$$

per cui, in conclusione, abbiamo

$$x^0 > y^0 \Leftrightarrow t > 0 : \quad G(x) \quad = \quad -i\Delta^+(x - y) \tag{2.2.83}$$
$$x^0 < y^0 \Leftrightarrow t < 0 : \quad G(x) \quad = \quad i\Delta^-(x - y) \tag{2.2.84}$$

D'altronde, per loro stessa definizione, risulta

$$< \Omega|\phi(x)\phi^\dagger(y)|\Omega > \quad = \quad \Delta^+(x - y) \tag{2.2.85}$$
$$< \Omega|\phi^\dagger(y)\phi(x)|\Omega > \quad = \quad -\Delta^-(x - y) \tag{2.2.86}$$

e dunque, ponendo adesso per uniformità di simboli con la letteratura più comune

$$\Delta_F(x - y) \equiv G(x - y) \tag{2.2.87}$$

abbiamo che

$$i\Delta_F(x - y) = < \Omega|\mathcal{T}\left(\phi(x)\phi^\dagger(y)\right)|\Omega > \tag{2.2.88}$$

dove il simbolo $\mathcal{T}$ indica[24] il prodotto dei campi T-ordinato o di Dyson, secondo il quale, dati comunque due campi $A(x)$ e $B(x)$, risulta

$$\mathcal{T}\left(A(x)\,B(y)\right) = A(x)B(y)\Theta(x^0 - y^0) + B(y)A(x)\Theta(y^0 - x^0) \qquad (2.2.89)$$

Prima di concludere questo argomento è senz'altro utile ritornare sulla assunzione (2.2.75) da cui segue appunto che

$$\Delta_F(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\,\frac{e^{-ipx}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \qquad (2.2.90)$$

E' del tutto evidente che, effettivamente, nel limite in cui $\epsilon \to 0$, risulta

$$(\Box + m^2)\Delta_F(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\,\frac{(m^2 - p^2)e^{-ipx}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} = -\delta^4(x) \qquad (2.2.91)$$

ma è altresì evidente che, nello stesso limite, vale anche la relazione

$$(\Box + m^2)\Delta_F^*(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\,\frac{(m^2 - p^2)e^{ipx}}{p^2 - m^2 - i\epsilon} = -\delta^4(x) \qquad (2.2.92)$$

Qual è la differenza fra le due possibili scelte della funzione di Green ?
Cominciamo con il dire che sono due perché l'equazione di Klein-Gordon è reale: la scelta fatta, come si è visto, ha condotto a identificare la funzione di Green con il valore di aspettazione sul vuoto del prodotto T-ordinato dei campi $\phi(x)$ e $\phi^\dagger(y)$ nel senso dal passato verso il futuro; infatti la creazione della particella, operata da $\phi^\dagger(y)$ o dell'antiparticella, operata da $\phi(x)$, avviene sempre e comunque ad un tempo *precedente* a quello della sua annichilazione (operata da $\phi(x)$ e $\phi^\dagger(y)$, rispettivamente). Se avessimo fatto l'altra scelta, cioè Δ_F^*, saremmo giunti a un'analoga conclusione ma con un ordinamento dal futuro verso il passato ...
Per finire, siccome evidentemente $\Delta_F(x) - \Delta_F^*(x)$ dovrà soddisfare l'equazione di Klein Gordon omogenea, possiamo chiederci quale sia il suo legame con le $\Delta^\pm(x)$. Iniziamo osservando che

$$t > 0: \quad \Delta_F(x) = -i\Delta^+(x) \quad \Leftrightarrow \quad (\Delta_F(x))^* = i\left(\Delta^+(x)\right)^* = -i\Delta^-(x) \qquad (2.2.93)$$
$$t < 0: \quad \Delta_F(x) = i\Delta^-(x) \quad \Leftrightarrow \quad (\Delta_F(x))^* = -i\left(\Delta^-(x)\right)^* = i\Delta^+(x) \qquad (2.2.94)$$

e dunque, indipendentemente dal valore di t, risulta

$$\begin{aligned}\Delta_F(x) - \Delta_F^*(x) &= i\left(-\Delta^+(x) + \Delta^-(x)\right) \;\Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad -i(\Delta_F(x) - \Delta_F^*(x)) = \Delta^-(x) - \Delta^+(x)\end{aligned} \qquad (2.2.95)$$

che corrisponde all'integrazione della funzione

$$\frac{i}{(2\pi)^4}\int d^4q\,\frac{e^{iqx}}{q^2 - m^2}$$

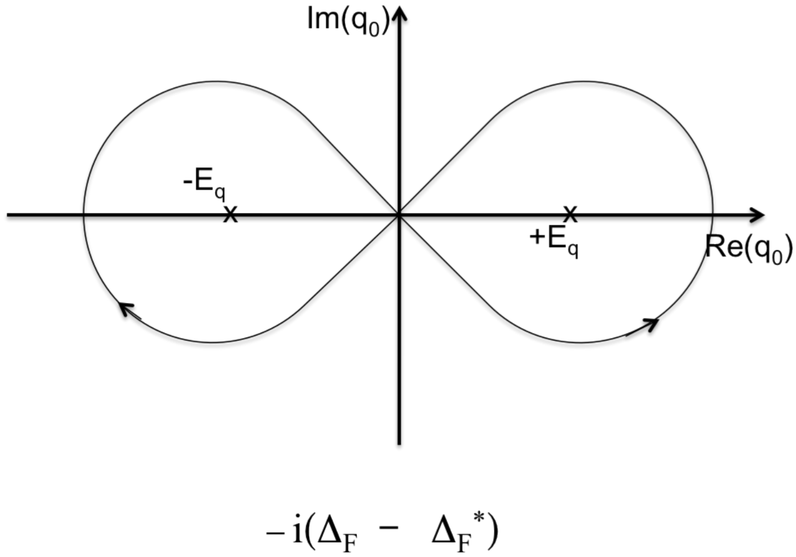

Figura 2.4: *Cammino di integrazione relativo alla funzione* $-i(\Delta_F - \Delta_F^*)$

sul cammino indicato in fig. 2.4.

Quanto, infine, all'azione delle simmetrie discrete C, P e T, si dimostra che risulta (cfr. in Appendice (B.2.44)-(B.2.49), (B.2.72)-(B.2.78), (B.2.94)-(B.2.106))

$$C\,a(\vec{p})\,C^{-1} = e^{-i\eta_c}\,b(\vec{p}) \quad \longleftrightarrow \quad C\,a^\dagger(\vec{p})\,C^{-1} = e^{i\eta_c}\,b^\dagger(\vec{p}) \tag{2.2.96}$$
$$C\,b(\vec{p})\,C^{-1} = e^{i\eta_c}\,a(\vec{p}) \quad \longleftrightarrow \quad C\,b^\dagger(\vec{p})\,C^{-1} = e^{-i\eta_c}\,a^\dagger(\vec{p}) \tag{2.2.97}$$
$$C\,\phi(x)\,C^{-1} = e^{-i\eta_c}\,\phi^\dagger(x) \quad \longleftrightarrow \quad C\,\phi^\dagger(x)\,C^{-1} = e^{i\eta_c}\,\phi(x) \tag{2.2.98}$$

$$P\,a(\vec{p})\,P^{-1} = e^{-i\eta_p}\,a(-\vec{p}) \longleftrightarrow P\,a^\dagger(\vec{p})\,P^{-1} = e^{i\eta_p}\,a^\dagger(-\vec{p}) \tag{2.2.99}$$
$$P\,b(\vec{p})\,P^{-1} = e^{i\eta_p}\,b(-\vec{p}) \longleftrightarrow P\,b^\dagger(\vec{p})\,P^{-1} = e^{-i\eta_p}\,b^\dagger(-\vec{p}) \tag{2.2.100}$$
$$P\,\phi(x)\,P^{-1} = e^{-i\eta_p}\,\phi(Px) \longleftrightarrow P\,\phi^\dagger(x)\,P^{-1} = e^{i\eta_p}\,\phi^\dagger(Px) \tag{2.2.101}$$
$$e^{i\eta_p} = \pm 1 \tag{2.2.102}$$

$$T\,a(\vec{p})\,T^{-1} = e^{-i\eta_T}\,a(-\vec{p}) \quad \longleftrightarrow \quad T\,a^\dagger(\vec{p})\,T^{-1} = e^{i\eta_T}\,a^\dagger(-\vec{p}) \tag{2.2.103}$$
$$T\,b(\vec{p})\,T^{-1} = e^{i\eta_T}\,b(-\vec{p}) \quad \longleftrightarrow \quad T\,b^\dagger(\vec{p})\,T^{-1} = e^{-i\eta_T}\,b^\dagger(-\vec{p}) \tag{2.2.104}$$
$$T\,\phi(x)\,T^{-1} = e^{-i\eta_T}\,\phi(Tx) \quad \longleftrightarrow \quad T\,\phi^\dagger(x)\,T^{-1} = e^{i\eta_T}\,\phi^\dagger(Tx) \tag{2.2.105}$$

dove, se $x = (t, \vec{x})$, allora $Px \equiv (t, -\vec{x})$, $Tx \equiv (-t, \vec{x})$ e dunque
$PTx = TPx \equiv (-t, -\vec{x}) \equiv -x$.

[24] Cfr. pag 42 di *relativistic Quantum Fields* di J.D. Bjorkeen e S.D. Drell, edito da McGraw-Hill, 1965.

Quanto alle simmetrie combinate C e P, abbiamo evidentemente che

$$\begin{array}{lllll} CP\phi(x)(CP)^{-1} & = & e^{-i\eta_p}\, C\phi(Px)C^{-1} & = & e^{-i\eta_p}e^{-i\eta_c}\,\phi^\dagger(Px) \\ CP\phi^\dagger(x)(CP)^{-1} & = & e^{i\eta_p}\, C\phi^\dagger(Px)C^{-1} & = & e^{i\eta_p}e^{i\eta_c}\,\phi(Px) \end{array} \quad (2.2.106)$$

mentre, circa CPT, risulta

$$\begin{array}{lllll} CPT\phi(x)(CPT)^{-1} & = & e^{-i\eta_T}\, CP\phi(Tx)(CP)^{-1} & = & e^{-i\eta_T}e^{-i\eta_p}e^{-i\eta_c}\,\phi^\dagger(PTx) = \\ & = & e^{-i\eta_T}e^{-i\eta_p}e^{-i\eta_c}\,\phi^\dagger(-x) & & \\ CPT\phi^\dagger(x)(CPT)^{-1} & = & e^{i\eta_T}\, CP\phi^\dagger(Px)(CP)^{-1} & = & e^{i\eta_p}e^{i\eta_p}e^{i\eta_c}\,\phi(PTx) \\ & = & e^{i\eta_T}e^{i\eta_p}e^{i\eta_c}\,\phi^\dagger(-x) & & \end{array} \quad (2.2.107)$$

Si osservi poi che la condizione $C^2 = I$, per come agisce la simmetria C, non può dare condizioni sul valore della fase $e^{i\eta_c}$, mentre la condizione $P^2 = I$ implica che, quanto a $e^{i\eta_p}$, non possa essere che $e^{i\eta_p} = \pm 1$. Quanto infine a T^2, evidentemente $T^2 = I$, dato che il campo scalare $\phi(x)$ descrive particelle senza spin, ovvero di spin nullo e quindi intero, essendo T un operatore antiunitario, il fatto che T^2 ne è il quadrato, questo fatto non può fornire condizioni di sorta sulla fase $e^{i\eta_T}$.

Infine un altro operatore di cui è interessante stabilire il modo di trasformarsi sotto le simmetrie C, P e T è senz'altro la quadricorrente $J^\mu(x)$ associata all'invarianza di gauge di prima specie della lagrangiana (2.2.9), cioè l'osservabile[25]

$$J^\mu(x) = i\left[-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\,\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^\dagger)}\,\phi^\dagger\right] = i\left[\partial^\mu\phi(x)\ \ \phi^\dagger(x) - \partial^\mu\phi^\dagger(x)\ \ \phi(x)\right] \quad (2.2.108)$$

Risulta (cfr. in Appendice (B.2.68), (B.2.90) e (B.2.122))

$$C\,J^\mu(x)\,C^{-1} = -J^\mu(x) \quad (2.2.109)$$
$$P\,J^\mu(x)\,P^{-1} = J_\mu(Px) \quad (2.2.110)$$
$$T\,J^\mu(x)\,T^{-1} = J_\mu(Tx) \quad (2.2.111)$$

da cui ricaviamo che

$$\begin{array}{lllll} CP\,J^\mu(x)\,(CP)^{-1} & = & -J_\mu(Px) & & \\ CPT\,J^\mu(x)\,(CPT)^{-1} & = & -J^\mu(PTx) & = & -J^\mu(-x) \end{array} \quad (2.2.112)$$

[25] La quadricorrente (2.2.108) è un operatore autoaggiunto, dunque è un'osservabile, a differenza dei campi stessi che, ovviamente, come gli operatori di creazione e distruzione, non lo sono.

2.3 Il campo vettoriale massivo carico

Le equazioni di moto per i campi[26] classici complessi, che descrivono particelle vettoriali (cioè di spin 1) cariche e con massa $m \neq 0$, sono[27] le seguenti

$$\begin{aligned} (\Box + m^2) W^\mu = 0 = (\Box + m^2) W^{*\mu} \\ \partial_\mu W^\mu = 0 = \partial_\mu W^{*\mu} \end{aligned} \tag{2.3.116}$$

Una densità lagrangiana che, attraverso il principio di minima azione, determina le equazioni di moto (2.3.116) per il campo classico è la seguente

$$\mathcal{L} \;=\; \frac{1}{2}\, F^{\mu\nu} F^*_{\mu\nu} \;-\; m^2\, W^\mu W^*_\mu \tag{2.3.117}$$

dove

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu W^\nu - \partial^\nu W^\mu \tag{2.3.118}$$

Infatti, dalle equazioni di Eulero-Lagrange

$$\begin{aligned} \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu W_\nu)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial W_\nu} = 0 \\ \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu W^*_\nu)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial W^*_\nu} = 0 \end{aligned}$$

otteniamo, rispettivamente

$$\partial_\mu F^{*\mu\nu} + m^2\, W^{*\nu} = 0 \;\;\Rightarrow\;\; \Box W^{*\nu} - \partial^\nu(\partial_\mu W^{*\mu}) + m^2\, W^{*\nu} = 0 \tag{2.3.119}$$
$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2\, W^{\nu} = 0 \;\;\Rightarrow\;\; \Box W^{\nu} - \partial^\nu(\partial_\mu W^{\mu}) + m^2\, W^{\nu} = 0 \tag{2.3.120}$$

D'altronde, essendo $F^{\mu\nu}$ ovviamente antisimmetrico, è

$$\partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} = 0$$

[26] Per un campo vettoriale, se (a, Λ) è l'elemento del gruppo di Poincaré tale che

$$(a, \Lambda): \qquad x \to x' = a + \Lambda x \tag{2.3.113}$$

ecco che, in termini degli operatori unitari $U(a, \Lambda)$ che descrivono l'azione della trasformazione sopra citata sugli stati, come abbiamo visto per il campo scalare (cfr. (2.2.8), abbiamo che la trasformazione del campo vettoriale è tale che

$$U(a, \Lambda)\, W^\mu(x)\, U^{-1}(a, \Lambda) = (\Lambda^{-1})^\mu_{\cdot\,\nu}\, W^\nu(\Lambda x + a) \tag{2.3.114}$$

ovvero, equivalentemente

$$U^{-1}(a, \Lambda) W^\mu(x) U(a, \Lambda) = \Lambda^\mu_{\cdot\,\nu}\, W^\nu(\Lambda^{-1}(x - a)) \tag{2.3.115}$$

[27] Un campo quadrivettoriale come W^μ, dal punto di vista delle rotazioni, è la somma diretta di un campo vettoriale ($s = 1$) e di un campo scalare ($s = 0$).
La condizione $\partial_\mu W^\mu = 0$ elimina la componente scalare e quindi lascia solo lo spin 1.

per cui, usando l'espressione di sinistra dell'equazione del moto (2.3.120) se ne deduce che

$$\partial_\mu [m^2\, W^\mu] = 0 \Rightarrow \partial_\mu W^\mu = 0 \qquad (2.3.121)$$

dove si è fatto uso del fatto che la massa del campo non è nulla.
Analogamente, partendo da $F^{*\mu\nu}$, si dimostra che anche la quadridivergenza di $W^{*\mu}$ è nulla, per cui, in definitiva, risultano così dimostrate le equazioni di moto (2.3.116) sia per W^μ che per $W^{*\mu}$.

La densità lagrangiana (2.3.117) è poi evidentemente invariante per trasformazioni di gauge di prima specie e la corrente conservata che, via il teorema di Noëther, consegue da questa invarianza può essere scritta nel modo seguente[28]

$$J^\mu(x) = i \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu W_\rho)}\, W_\rho - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu W^*_\rho)}\, W^*_\rho \right] \qquad (2.3.122)$$

ovvero

$$\begin{aligned} J^\mu(x) &= i\left[F^{*\mu\rho} W_\rho - F^{\mu\rho} W^*_\rho\right] = i\left[(\partial^\mu W^{*\rho} - \partial^\rho W^{*\mu})\, W_\rho - (\partial^\mu W^\rho - \partial^\rho W^\mu)\, W^*_\rho\right] = \\ &= i\left[(\partial^\mu W^{*\rho})\, W_\rho - (\partial^\rho W^{*\mu})\, W_\rho - (\partial^\mu W^\rho)\, W^*_\rho + (\partial^\rho W^\mu)\, W^*_\rho\right] \qquad (2.3.123) \end{aligned}$$

che, tenendo conto che $\partial_\rho W^\rho = 0$, si può riscrivere come

$$J^\mu(x) = i\left[(\partial^\mu W^{*\rho})\, W_\rho - (\partial^\mu W^\rho)\, W^*_\rho\right] + i\partial_\rho\left[W^{*\mu} W^\rho - W^\mu W^{*\rho}\right] \qquad (2.3.124)$$

ma il termine

$$\hat{J}^\mu \equiv i\partial_\rho\left[W^{*\mu} W^\rho - W^\mu W^{*\rho}\right] \qquad (2.3.125)$$

- essendo la quantità in parentesi quadra antisimmetrica in μ e ρ, essa soddisfa separatamente l'equazione di continuità $\partial_\mu \hat{J}^\mu = 0$;
- il suo contributo all'integrale spaziale di $J^0(x)$ è nullo perché

  $$\hat{J}^0 \equiv i\partial_\rho\left[W^{*0} W^\rho - W^0 W^{*\rho}\right] = i\partial_k\left[W^{*0} W^k - W^0 W^{*k}\right]$$

  coincide con una divergenza nelle sole variabili spaziali.

Per questi motivi si può dunque assumere che l'espressione della corrente conservata per il campo vettoriale carico di massa m sia la seguente

$$J^\mu = i\left[-(\partial^\mu W^\nu)\, W^*_\nu + (\partial^\mu W^*_\nu)\, W^\nu\right] \qquad (2.3.126)$$

[28] Questa definizione è formalmente opposta alla (1.4.158). Abbiamo già notato che il teorema di Noëther definisce la corrente conservata a meno di una costante moltiplicativa: in questo caso, come vedremo, è opportuno scegliere il segno contrario a quello usuale nella definizione di J^μ per coerenza con la metrica di Minkowski.

La quantizzazione dei campi W^μ e $W^{\dagger\mu}$, al solito, viene effettuata espandendoli in termini di operatori di creazione/distruzione, nel modo seguente

$$W^\mu(x) = \sum_{r=1}^{3} \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \left[A(r,\vec{p})\, \epsilon^\mu(r,\vec{p})\, e^{-ipx} + B^\dagger(r,\vec{p})\, \epsilon^{*\mu}(r,\vec{p})\, e^{ipx}\right] \quad (2.3.127)$$

$$W^{\dagger\mu}(x) = \sum_{r=1}^{3} \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \left[B(r,\vec{p})\, \epsilon^\mu(r,\vec{p})\, e^{-ipx} + A^\dagger(r,\vec{p})\, \epsilon^{*\mu}(r,\vec{p})\, e^{ipx}\right] \quad (2.3.128)$$

dove

- $A(r,\vec{p})$ annichila la particella di quadrimpulso $p = (E_p\,, \vec{p}) = (\sqrt{m^2 + |\vec{p}|^2}, \vec{p})$ e di stato di polarizzazione r;
- $A^\dagger(r,\vec{p})$ crea la particella di quadrimpulso p e polarizzazione r;
- $B(r,\vec{p})$ annichila l'antiparticella di quadrimpulso p e polarizzazione r;
- $B^\dagger(r,\vec{p})$ crea l'antiparticella di quadrimpulso p e polarizzazione r;

Questi operatori soddisfano le seguenti regole di commutazione (tutte le altre sono nulle ...)

$$\left[A(r,\vec{p}), A^\dagger(s,\vec{q})\right] = \left[B(r,\vec{p}), B^\dagger(s,\vec{q})\right] = 2\, E_p\, (2\pi)^3\ \delta_{rs}\, \delta^3(\vec{p} - \vec{q}) \quad (2.3.129)$$

dove δ_{rs} è il simbolo di Kronecker.
Quanto allo stato di polarizzazione, esso è specificato dalle tre quantità[29] $\epsilon^\mu(r,\vec{p})$, per $r = 1,2,3$, le quali, affinché sia garantita la condizione di quadridivergenza nulla $\partial_\mu W^\mu = 0$, devono soddisfare il vincolo

$$\forall r: \quad p_\mu\, \epsilon^\mu(r,\vec{p}) = 0 \quad (2.3.130)$$

Sempre nel caso di una particella di massa $m \neq 0$, la scelta consueta è quella di iniziare definendo le polarizzazioni $\epsilon^\mu(r,\vec{0})$ nel sistema di riferimento dove la particella è ferma, ovvero dove essa ha quadrimpulso $\hat{p} \equiv (m,0,0,0)$ e quindi di estendere la definizione al caso in cui essa essa ha impulso spaziale $\vec{p}$, usando il boost che effettua la trasformazione $\mathcal{B}(\vec{p}) \cdot \hat{p} \equiv (E,\vec{p})$ senza ruotare gli assi, cioè attraverso la matrice (boost) di Lorentz

$$\mathcal{B}(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \frac{E}{m} & \frac{p_x}{m} & \frac{p_y}{m} & \frac{p_y}{m} \\ \frac{p_x}{m} & 1 + \frac{p_x\,p_x}{m(E+m)} & \frac{p_x\,p_y}{m(E+m)} & \frac{p_x\,p_z}{m(E+m)} \\ \frac{p_y}{m} & \frac{p_y\,p_x}{m(E+m)} & 1 + \frac{p_y\,p_y}{m(E+m)} & \frac{p_y\,p_z}{m(E+m)} \\ \frac{p_z}{m} & \frac{p_z\,p_x}{m(E+m)} & \frac{p_z\,p_y}{m(E+m)} & 1 + \frac{p_z\,p_z}{m(E+m)} \end{pmatrix} \quad (2.3.131)$$

[29] Anche se possono averne l'apparenza, come vedremo fra breve, gli ϵ^μ *non* sono propriamente dei quadrivettori.

definendo

$$\epsilon^\mu(r,\vec{p}) \equiv \mathcal{B}(\vec{p})^{\mu}_{\cdot\,\nu}\, \epsilon^\nu(r,\vec{0}) \qquad (2.3.132)$$

Nel riferimento di quiete, la polarizzazione, dovendo essere ortogonale (nella metrica di Minkowski) al quadrimpulso, deve essere tale che

$$\epsilon^\mu(r,\vec{0}) = (0, \vec{\epsilon}(r))$$

dove gli $\vec{\epsilon}(r)$ sono tre versori indipendenti, individuati ciascuno dall'indice r. Se indichiamo con $\vec{e}_1 = \vec{e}_x$, $\vec{e}_2 = \vec{e}_y$ e $\vec{e}_3 = \vec{e}_z$ i versori dei tre assi coordinati, allora una scelta possibile è semplicemente la seguente[30] (polarizzazioni lineari)

$$\vec{\epsilon}(r) \equiv \vec{e}_r \quad \Leftrightarrow \quad \epsilon^\mu(r,\vec{0}) = \delta^\mu_r$$

la quale conduce, secondo la regola sopra indicata, a funzioni $\epsilon^\mu(r,\vec{p})$ di polarizzazione reali e coincidenti semplicemente con le colonne della matrice $\mathcal{B}(\vec{p})$, ovvero queste polarizzazioni[31] risultano essere espresse dalla relazione

$$\epsilon^\mu(r,\vec{p}) = \mathcal{B}(\vec{p})^{\mu}_{\cdot\,\nu}\, \epsilon^\nu(r,\vec{0}) = \mathcal{B}(\vec{p})^{\mu}_{\cdot\,r} = \left(\frac{p^r}{m}\ ,\quad \delta^r_i + \frac{p^i\, p^r}{m(E+m)}\right) \qquad (2.3.134)$$

dove p_r indica la componente $r-$esima del vettore $\vec{p}$ e δ_{ir} è il simbolo di Kronecker.
Le polarizzazioni lineari così definite soddisfano evidentemente la condizione

$$\epsilon^\mu(r,\vec{p}) = -\epsilon_\mu(r,-\vec{p}) \qquad (2.3.135)$$

Esse soddisfano inoltre la condizione di completezza[32] seguente

$$\sum_{r=1}^{3} \epsilon^\mu(r,\vec{p})\epsilon^{*\nu}(r,\vec{p}) = -\delta^{\mu\nu} + \frac{p^\mu p^\nu}{m^2} \qquad (2.3.140)$$

[30]Un'altra scelta possibile è quella delle polarizzazioni circolari che vedremo fra breve.

[31]Si osservi che se indichiamo con $\vec{n}$ il versore dell'impulso spaziale della particella, essendo allora $p_r = m\gamma\beta n_r$, ne segue che

$$\epsilon^\mu(r,\vec{p}) = (\gamma\beta\, n_r\ ,\quad \delta_{ir} + (\gamma-1) n_r\, n_i) \qquad (2.3.133)$$

dove abbiamo usato il fatto che $\frac{\beta^2\gamma^2}{\gamma+1} = \gamma - 1$.

[32]Osserviamo che, dalla definizione, è

$$\epsilon^\mu(r,\vec{p}) = \mathcal{B}(\vec{p})^{\mu}_{\cdot\,\nu}\, \epsilon^\nu(r,\vec{0}) = \mathcal{B}(\vec{p})^{\mu}_{\cdot\,\nu}\delta^\nu_r = \mathcal{B}(\vec{p})^{\mu}_{\cdot\,r} = -\mathcal{B}(\vec{p})^{\mu\, r} \qquad (2.3.136)$$

Dunque

$$\sum_{r=1}^{3} \epsilon^\mu(r,\vec{p})\epsilon^{*\nu}(r,\vec{p}) = -\sum_{r=1}^{3} \mathcal{B}(\vec{p})^{\mu}_{\cdot\,r}\, \mathcal{B}(\vec{p})^{\nu\, r} = -\mathcal{B}(\vec{p})^{\mu}_{\cdot\,\rho}\, \mathcal{B}(\vec{p})^{\nu\,\rho} + \mathcal{B}(\vec{p})^{\mu}_{\cdot\,0}\, \mathcal{B}(\vec{p})^{\nu\, 0} \qquad (2.3.137)$$

ma, per le ben note proprietà delle matrici di Lorentz, risulta

$$\mathcal{B}(\vec{p})^{\mu}_{\cdot\,\rho}\, \mathcal{B}(\vec{p})^{\nu\,\rho} = \mathcal{B}(\vec{p})^{\mu}_{\cdot\,\rho}\, \mathcal{B}(\vec{p})^{\cdot\,\rho}_{\sigma}\delta^{\sigma\nu} = \delta^\mu_\sigma\, \delta^{\sigma\nu} = \delta^{\mu\nu} \qquad (2.3.138)$$

dunque, essendo

$$\mathcal{B}(\vec{p})^{\mu}_{\cdot\,0}\, \mathcal{B}(\vec{p})^{\nu\, 0} = \frac{p^\mu}{m}\,\frac{p^\nu}{m} = \frac{p^\mu p^\nu}{m^2}$$

insieme alla relazione di ortogonalità[33]

$$\epsilon^\mu(s,\vec{p})\ \epsilon^*_\mu(r,\vec{p}) = \delta_{sr} \equiv g_{sr} \tag{2.3.143}$$

dove abbiamo voluto rendere esplicito che la δ_{sr} di cui sopra indica l'elemento (sr) del tensore metrico di Minkowski.

Le polarizzazioni lineari, però, non descrivono stati nei quali la terza componente dello spin è definita.
Questo accade, invece, per le polarizzazioni circolari. Scegliendo l'asse z come asse di quantizzazione, nel CM esse vengono definite come

$$\tilde{\epsilon}^\mu_{(\pm1)}(\vec{0}) = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,\pm i,0) = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\epsilon^\mu(1,\vec{0}) \pm i\epsilon^\mu(2,\vec{0})\right] \tag{2.3.144}$$

$$\tilde{\epsilon}^\mu_{(0)}(\vec{0}) = \epsilon^\mu(3,\vec{0}) \tag{2.3.145}$$

e quindi, in termini delle polarizzazioni lineari, abbiamo

$$\tilde{\epsilon}^\mu_{(\pm1)}(\vec{p}) = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\epsilon^\mu(1,\vec{p}) \pm i\epsilon^\mu(2,\vec{p})\right]; \qquad \tilde{\epsilon}^\mu_{(0)}(\vec{p}) = \epsilon^\mu(3,\vec{p}) \tag{2.3.146}$$

da cui, ricordando che le polarizzazioni lineari sono reali, si ricava in particolare che

$$\left(\tilde{\epsilon}^\mu_{(\pm1)}(\vec{p})\right)^* = -\tilde{\epsilon}^\mu_{(\mp1)}(\vec{p}) \qquad \left(\tilde{\epsilon}^\mu_{(0)}(\vec{p})\right)^* = \tilde{\epsilon}^\mu_{(0)}(\vec{p}) \tag{2.3.147}$$

$$\Rightarrow \left(\tilde{\epsilon}^\mu_{(s)}(\vec{p})\right)^* = (-1)^s\,\tilde{\epsilon}^\mu_{(-s)}(\vec{p}) \tag{2.3.148}$$

mentre risulta, per qualunque $s = 0, \pm1$

$$\tilde{\epsilon}^\mu_{(s)}(-\vec{p}) = -\tilde{\epsilon}_{(s)\mu}(\vec{p}) \tag{2.3.149}$$

Poichè, come è facile convincersi, si passa dalle polarizzazioni lineari a quelle circolari (e viceversa) attraverso una trasformazione unitaria, le condizioni di completezza e di ortogonalità permangono nella forma già vista.

---

abbiamo infine la relazione di completezza cercata, ovvero

$$\sum_{r=1}^{3}\epsilon^\mu(r,\vec{p})\epsilon^{*\nu}(r,\vec{p}) = -\delta^{\mu\nu} + \frac{p^\mu p^\nu}{m^2} \tag{2.3.139}$$

[33]Infatti si ha

$$\epsilon^\mu(s,\vec{p})\ \epsilon^*_\mu(r,\vec{p}) = \left(\mathcal{B}(p)\,\epsilon(s,\vec{0})\right)^\mu \cdot \left(\mathcal{B}(p)\,\epsilon(r,\vec{0})\right)^*_\mu \tag{2.3.141}$$

e per il fatto che le matrici di Lorentz sono reali e le ben note proprietà del prodotto scalare fra quadrivettori, questa quantità è pari, in effetti, a

$$\epsilon^\mu(s,\vec{0})\ \epsilon^*_\mu(r,\vec{0}) = \delta^\mu_s\delta_{\mu r} = \delta_{sr} \tag{2.3.142}$$

visto come sono definite le polarizzazioni lineari nel sistema del CM.

Più esplicitamente, se definiamo la matrice unitaria V seguente

$$V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad V^\dagger = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.3.150}$$

allora accade che

$$\tilde{\epsilon}^\mu_{(s)}(\vec{p}) = \sum_{r=1}^{3} V_{sr}\,\epsilon^\mu(r,\vec{p}) \tag{2.3.151}$$

dove l'indice $s = -1,\, 0,\, +1$ descrive la componente z dello spin associata alla polarizzazione circolare considerata, mentre l'indice $r = 1,\, 2,\, 3$ si riferisce alla polarizzazione lineare definita dalla (2.3.134).
Poiché le polarizzazioni lineari sono reali, evidentemente si ha altresì che

$$\tilde{\epsilon}^{*\mu}_{(s)}(\vec{p}) = \sum_{r=1}^{3} V^*_{sr}\,\epsilon^\mu(r,\vec{p}) = \sum_{r=1}^{3} V^\dagger_{rs}\,\epsilon^\mu(r,\vec{p}) = \sum_{r=1}^{3} V^\dagger_{rs}\,\epsilon^{*\mu}(r,\vec{p}) \tag{2.3.152}$$

e dunque

$$\epsilon^\mu(r,\vec{p}) = \sum_{s=-1}^{1} V^\dagger_{rs}\,\tilde{\epsilon}_{(s)}(\vec{p}) \tag{2.3.153}$$

$$\epsilon^{*\mu}(r,\vec{p}) = \sum_{s=-1}^{1} V_{sr}\,\tilde{\epsilon}^*_{(s)}(\vec{p}) \tag{2.3.154}$$

per cui la rappresentazione spettrale del campo, scritta usando le polarizzazioni circolari, diviene

$$\begin{aligned} W^\mu(x) &= \sum_{r=1}^{3} \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \left[A(r,\vec{p})\,\epsilon^\mu(r,\vec{p})\,e^{-ipx} \;+\; B^\dagger(r,\vec{p})\,\epsilon^{*\mu}(r,\vec{p})\,e^{ipx} \right] = \\ &= \sum_{r=1}^{3}\sum_{s=-1}^{+1} \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \left[A(r,\vec{p})\,V^\dagger_{rs}\tilde{\epsilon}^\mu_{(s)}(\vec{p})\,e^{-ipx} \;+\; B^\dagger(r,\vec{p})\,V_{sr}\tilde{\epsilon}^{*\mu}_{(s)}(\vec{p})\,e^{ipx} \right] \end{aligned} \tag{2.3.155}$$

e dunque, ponendo

$$\tilde{A}_{(s)}(\vec{p}) \equiv \sum_{r=1}^{3} V^\dagger_{rs} A(r,\vec{p}) \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{A}^\dagger_{(s)}(\vec{p}) = \sum_{r=1}^{3} V^t_{rs} A^\dagger(r,\vec{p}) = \sum_{r=1}^{3} V_{sr} A^\dagger(r,\vec{p}) \tag{2.3.156}$$

e procedendo nello stesso modo per B e $B^\dagger$, abbiamo infine che

$$W^\mu(x) = \sum_{s=-1}^{+1} \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \left[\tilde{\epsilon}^\mu_{(s)}(\vec{p})\tilde{A}_{(s)}(\vec{p})\,e^{-ipx} \;+\; \tilde{\epsilon}^{*\mu}_{(s)}(\vec{p})\,\tilde{B}^\dagger_{(s)}(\vec{p})\,e^{ipx} \right] \tag{2.3.157}$$

$$W^{\dagger\mu}(x) = \sum_{s=-1}^{+1} \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \left[\tilde{\epsilon}^\mu_{(s)}(\vec{p})\tilde{B}_{(s)}(\vec{p})\,e^{-ipx} \;+\; \tilde{\epsilon}^{*\mu}_{(s)}(\vec{p})\,\tilde{A}^\dagger_{(s)}(\vec{p})\,e^{ipx} \right] \tag{2.3.158}$$

Quanto alle regole di commutazione, ovviamente le uniche non nulle sono quelle fra $\tilde{A}$ e $\tilde{A}^\dagger$ e fra $\tilde{B}$ e $\tilde{B}^\dagger$. Data la trasformazione unitaria che lega questi operatori a quelli introdotti per le polarizzazioni lineari per cui valevano le (2.3.129), queste regole di commutazione restano formalmente le stesse. Procediamo riguardo ad $\tilde{A}$ e $\tilde{A}^\dagger$ (per $\tilde{B}$ e $\tilde{B}^\dagger$ è lo stesso). Risulta

$$\begin{aligned}
\left[\tilde{A}_{(s)}(\vec{p}),\, \tilde{A}^\dagger_{(t)}(\vec{q})\right] &= \sum_{a=1}^{3}\sum_{b=1}^{3}\left[V^\dagger_{as}A(a,\vec{p}),\, V_{tb}A^\dagger(b,\vec{q})\right] = \\
&= \sum_{a=1}^{3}\sum_{b=1}^{3} V^\dagger_{as}V_{tb}\left[A(a,\vec{p},\, A^\dagger(b,\vec{q})\right] = \\
&= \sum_{a=1}^{3}\sum_{b=1}^{3} V^\dagger_{as}V_{tb}\; 2E_p\,(2\pi)^3\;\delta_{ab}\;\delta^3(\vec{p}-\vec{q}) = \\
&= \sum_{a=1}^{3} V^\dagger_{as}V_{ta}\; 2E_p\,(2\pi)^3\;\delta^3(\vec{p}-\vec{q}) = \\
&= 2E_p\,(2\pi)^3\;\delta_{st}\;\delta^3(\vec{p}-\vec{q}) \qquad (2.3.159)
\end{aligned}$$

Torniamo alle polarizzazioni lineari e consideriamo la funzione d'onda $\psi^\mu(r,\vec{p};x)$ che, in rappresentazione delle coordinate, descrive lo stato di singola particella di impulso $\vec{p}$ e polarizzazione r. Essa[34] è data[35,36] da

$$\psi^\mu(r,\vec{p};x) = \epsilon^\mu(r,\vec{p})\, e^{-ipx} \equiv <\Omega|\, W^\mu(x)\,|r,\vec{p}> \qquad (2.3.165)$$

[34]Per lo stato $B^\dagger(r,\vec{p})|\Omega>$ occorre semplicemente scambiare W con il suo hermitiano coniugato $W^\dagger$.

[35]Chiaramente, in rappresentazione delle coordinate, la funzione d'onda dello stato $|r,\vec{p}>$ dovrà essere proporzionale a $\epsilon^\mu(r,\vec{p})\,e^{-ipx}$, visto che questa funzione, per definizione, descrive appunto uno stato di polarizzazione r e quadrimpulso p. Ovviamente la funzione d'onda può essere scalata per una costante complessa arbitraria, il cui modulo ne cambia la normalizzazione. La scelta fatta corrisponde ad avere una densità spaziale di particelle pari a $2E$.

[36]Può essere interessante osservare che, posto

$$\psi^\mu(r,\vec{p};x) = \epsilon^\mu(r,\vec{p})\, e^{-ipx} \equiv <\Omega|\, W^\mu(x)\,|r,\vec{p}> \qquad (2.3.160)$$

allora, essendo

$$U(a,I)\,W^\mu(x)\,U^{-1}(a,I) = W^\mu(x+a) \quad \Rightarrow \quad U(x,I)\,W^\mu(0)\,U^{-1}(x,I) = W^\mu(x) \qquad (2.3.161)$$

ecco che risulta

$$\psi^\mu(r,\vec{p};x) = <\Omega|\,U(x,I)\,W^\mu(0)\,U^{-1}(x,I)\,|r,\vec{p}> \qquad (2.3.162)$$

ma ($U(a,I) = e^{iaP}$)

$$<\Omega|U(a,I) = <\Omega|; \qquad U^{-1}(x,I)\,|r,\vec{p}> = e^{-ipx}\,|r,\vec{p}> \qquad (2.3.163)$$

per cui ne concludiamo che

$$\psi^\mu(r,\vec{p};x) = e^{-ipx}\; <\Omega|\,W^\mu(0)\,|r,\vec{p}> \qquad (2.3.164)$$

fattorizzando così la dipendenza spaziale da quella legata alla polarizzazione.

Coerentemente con l'espressione (2.3.126) della corrente conservata a causa dell'invarianza di gauge di prima specie della Lagrangiana (2.3.117),

$$\begin{aligned} J^\mu &= -i\left[(\partial^\mu W^\nu)\, W^\dagger_\nu - (\partial^\mu W^\dagger_\nu)\, W^\nu\right] \;\Rightarrow\; \int d^3x\, J^0(x,t) = cost \\ &\Rightarrow\; -i\frac{\partial}{\partial t}\int d^3x \left[(\partial^0 W^\nu)\, W^\dagger_\nu - (\partial^0 W^\dagger_\nu)\, W^\nu\right] = 0 \end{aligned} \tag{2.3.166}$$

la densità di particelle associata alla funzione d'onda (2.3.165), ovvero allo stato $|r,\vec{p}>$, vale $2E$, infatti, per la (2.3.143), risulta

$$\begin{aligned} \rho(x) = J^0(x) &= -i\left[(\partial^0\psi^\mu(r,\vec{p};x))\psi^*_\mu(r,\vec{p};x) - (\partial^0\psi^{*\mu}(r,\vec{p};x))\psi^\mu(r,\vec{p};x)\right] = \\ &= 2p^0 \equiv 2E \end{aligned} \tag{2.3.167}$$

Ed è ancora per lo stesso motivo che il prodotto scalare fra due stati di singola particella $|a>$ e $|b>$, rappresentati rispettivamente dalle funzioni d'onda $\psi^\mu_{(a)}(x)$ e $\psi^\mu_{(b)}(x)$ si deve scrivere[37]

$$< a|b> = -i\int d^3x \left[\left(\partial^0\psi^\mu_{(b)}(\vec{x},t)\right)\psi^*_{(a)\mu}(\vec{x},t) - \left(\partial^0\psi^{*\mu}_{(a)}(\vec{x},t)\right)\psi^\mu_{(b)}(\vec{x},t)\right] \tag{2.3.170}$$

Passiamo adesso a considerare la legge di trasformazione sotto il gruppo di Poincaré degli operatori di creazione e distruzione del campo vettoriale, allo scopo di determinare come queste trasformazioni agiscono sugli stati di particella/antiparticella.
Ricordiamo che il campo vettoriale gode della proprietà per cui

$$U(a,\Lambda)\, W^\mu(x)\, U^{-1}(a,\Lambda) = (\Lambda^{-1})^\mu_{\cdot\nu}\, W^\nu(\Lambda x + a) \tag{2.3.171}$$

La presenza nella rappresentazione del campo delle funzioni che descrivono gli stati di polarizzazione

$$W^\mu(x) = \sum_{r=1}^{3}\int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\left[A(r,\vec{p})\,\epsilon^\mu(r,\vec{p})\,e^{-ipx} + B^\dagger(r,\vec{p})\,\epsilon^{*\mu}(r,\vec{p})\,e^{ipx}\right] \tag{2.3.172}$$

richiede che, per stabilire la legge di trasformazione degli operatori di creazione e distruzione in modo coerente con la (2.3.171), si debbano conoscere

[37]Per gli autostati dell'impulso di cui sopra, si ha

$$< r,\vec{p}|s,\vec{q}> = -i\int d^3x \left[\left(\partial^0\psi^\mu(s,\vec{q};x)\right)\psi^*_\mu(r,\vec{p};x) - \left(\partial^0\psi^{*\mu}(r,\vec{p};x)\right)\psi^\mu(s,\vec{q};x)\right] \tag{2.3.168}$$

cioè, coerentemente con le regole di commutazione, risulta

$$\begin{aligned} < r,\vec{p}|s,\vec{q}> &= -i\int d^3x\left[(\partial^0 e^{-iqx})\epsilon^\mu(s,\vec{q})\,\epsilon^*_\mu(r,\vec{p})\,e^{ipx} - \epsilon^*_\mu(r,\vec{p})\,(\partial^0 e^{ipx})e^{-iqx}\epsilon^\mu(s,\vec{q})\right] = \\ &= i^2\int d^3x\,(q^0+p^0)e^{ix(p-q)}\,\epsilon^*_\mu(r,\vec{p})\,\epsilon^\mu(s,\vec{q}) = 2p^0\,\delta_{rs}\,(2\pi^3)\,\delta^3(\vec{p}-\vec{q}) \end{aligned} \tag{2.3.169}$$

preventivamente come gli $\epsilon^\mu(r,\vec{p})$ cambiano sotto la generica trasformazione $p \;\to\; \Lambda p$.
Ricordiamo che, secondo la definizione (2.3.134), risulta

$$\epsilon^\mu(s,\vec{p}) \equiv \mathcal{B}(\vec{p})^\mu_{\cdot\nu}\; \epsilon^\nu(s,\vec{0}) \tag{2.3.173}$$

Questa definizione, però, *non* implica affatto che essi siano quadrivettori !
Per esplicitare le loro proprietà di trasformazione, iniziamo dimostrando che la quantità $\Lambda\,\cdot\,\epsilon(s,\vec{p})$ è una combinazione lineare non banale (purtroppo) delle polarizzazioni $\epsilon(r,\vec{\Lambda p})$, ovvero che qualsiasi siano Λ e $\vec{p}$, risulta

$$\Lambda\,\cdot\,\epsilon(s,\vec{p}) = \sum_{r=1,3} M_{rs}\,\epsilon(r,\vec{\Lambda p}) \tag{2.3.174}$$

con M matrice opportuna, che adesso determineremo.
La (2.3.174) può essere riscritta equivalentemente usando la definizione (2.3.173), come segue

$$\Lambda\cdot\mathcal{B}(\vec{p})\cdot\epsilon(s,\vec{0}) = \sum_{r=1,3} M_{rs}\,\mathcal{B}(\vec{\Lambda p})\cdot\epsilon(r,\vec{0}) \tag{2.3.175}$$

e dunque essa è equivalente all'equazione

$$\mathcal{B}^{-1}(\vec{\Lambda p})\cdot\Lambda\cdot\mathcal{B}(\vec{p})\cdot\epsilon(s,\vec{0}) = \sum_{r=1,3} M_{rs}\,\epsilon(r,\vec{0}) \tag{2.3.176}$$

la quale si riferisce così solo alle polarizzazioni nel sistema del CM della particella.
La matrice di Lorentz $\mathcal{B}^{-1}(\vec{\Lambda p})\cdot\Lambda\cdot\mathcal{B}(\vec{p})$ è in effetti una rotazione, poiché trasforma $\hat{p}$ in se stesso: si tratta della *rotazione di Wigner* $\mathcal{R}(\Lambda,\vec{p})$ definita da

$$\mathcal{R}(\Lambda,\vec{p}) \equiv \mathcal{B}^{-1}(\vec{\Lambda p})\;\cdot\;\Lambda\;\cdot\;\mathcal{B}(\vec{p}) \tag{2.3.177}$$

Sia dunque R_{js} la matrice ortogonale definita dalla rotazione di Wigner di cui sopra in tre dimensioni. Si ha

$$\mathcal{R}(\Lambda,\vec{p})^0_{\cdot\nu}\;\epsilon^\nu(s,\vec{0}) \;=\; 0 \tag{2.3.178}$$

$$\mathcal{R}(\Lambda,\vec{p})^j_{\cdot\nu}\;\epsilon^\nu(s,\vec{0}) \;=\; \mathcal{R}(\Lambda,\vec{p})^j_{\cdot\nu}\delta^\nu_s = \mathcal{R}(\Lambda,\vec{p})^j_{\cdot s} \equiv R_{js} \tag{2.3.179}$$

Ma $M_{rs}\,\epsilon^\mu(r,\vec{p})$ ha la componente temporale ovviamente nulla e la componente spaziale j-esima pari a M_{js}, per cui resta così dimostrato che vale la (2.3.174) con $M = R$, ovvero che

$$\Lambda\cdot\epsilon(s,\vec{p}) = R_{rs}\,\epsilon(r,\vec{\Lambda p}) \tag{2.3.180}$$

dove R è la matrice di $O(3)$ individuata dalla rotazione di Wigner $\mathcal{R}(\Lambda,\vec{p})$ definita sopra. Partendo ora dalla (2.3.180), otteniamo che

$$\Lambda^{-1}\cdot\Lambda\cdot\epsilon(s,\vec{p}) \equiv \epsilon(s,\vec{p}) = R_{rs}\,\Lambda^{-1}\cdot\epsilon(r,\vec{\Lambda p}) \tag{2.3.181}$$

da, cui, ricordando che R è ortogonale, ovvero che $R^{-1} = R^t$, concludiamo altresì che

$$R_{ts}\, \epsilon(s, \vec{p}) = \Lambda^{-1} \cdot \epsilon(t, \vec{\Lambda p}) \;\; \Leftrightarrow \;\; R_{ts}\, \epsilon^\mu(s, \vec{p}) = (\Lambda^{-1})^\mu_{.\nu} \epsilon^\nu(t, \vec{\Lambda p}) \qquad (2.3.182)$$

Dato questo modo di trasformarsi dei vettori di polarizzazione, la legge di trasformazione degli operatori di creazione e distruzione che garantisce la (2.3.171) risulta essere la seguente

$$\begin{aligned} U(a,\Lambda)\, A(s,\vec{p})\, U^{-1}(a,\Lambda) &= e^{-ia\cdot\Lambda p}\, R_{rs}\, A(r, \vec{\Lambda p}) && (2.3.183)\\ U(a,\Lambda)\, A^\dagger(s,\vec{p})\, U^{-1}(a,\Lambda) &= e^{ia\cdot\Lambda p}\, R^*_{rs}\, A^\dagger(r, \vec{\Lambda p}) && (2.3.184) \end{aligned}$$

e lo stesso accade per gli operatori B e $B^\dagger$.
Risulta infatti ($U \equiv U(a,\Lambda)$...)

$$\begin{aligned} U(a,\Lambda)\, W^\mu(x)\, U^{-1}(a,\Lambda) &= \sum_{r=1}^{3} \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \Big[U\, A(r,\vec{p})\, U^{-1}\, \epsilon^\mu(r,\vec{p})\, e^{-ipx} + \\ &+ U\, B^\dagger(r,\vec{p})\, U^{-1}\, \epsilon^{*\mu}(r,\vec{p})\, e^{ipx} \Big] = \\ &= \sum_{r,k} \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \Big[e^{-ia\cdot\Lambda p}\, R_{kr}\, A(k, \vec{\Lambda p})\, \epsilon^\mu(r,\vec{p})\, e^{-ipx} + \\ &+ e^{ia\cdot\Lambda p}\, R^*_{kr}\, B^\dagger(k, \vec{\Lambda p})\, \epsilon^{*\mu}(r,\vec{p})\, e^{ipx} \Big] \end{aligned}$$

Ponendo $q = \Lambda p \Rightarrow p \cdot x = (\Lambda p) \cdot (\Lambda x) = q \cdot \Lambda x$, abbiamo allora

$$\begin{aligned} &U(a,\Lambda)\, W^\mu(x)\, U^{-1}(a,\Lambda) = \\ &\quad = \sum_{r,k} \int \frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3} \Big[e^{-iq\cdot(a+\Lambda x)}\, R_{kr}\, A(k,\vec{q})\, \epsilon^\mu(r,\vec{p}) + \\ &\quad + e^{iq\cdot(a+\Lambda x)}\, R^*_{kr}\, B^\dagger(k,\vec{q})\, \epsilon^{*\mu}(r,\vec{p}) \Big] \qquad (2.3.185) \end{aligned}$$

ma, per la (2.3.182), ed essendo sia la R che i vettori di polarizzazione reali, risulta

$$\begin{aligned} \sum_r R_{kr}\, \epsilon^\mu(r,\vec{p}) &= (\Lambda^{-1})^\mu_{\;.\nu}\; \epsilon^\nu(k,\vec{q}) && (2.3.186)\\ \sum_r R^*_{kr}\, \epsilon^{*\mu}(r,\vec{p}) &= (\Lambda^{-1})^\mu_{\;.\nu}\; \epsilon^{*\nu}(k,\vec{q}) && (2.3.187) \end{aligned}$$

per cui, sostituendo nella (2.3.185), otteniamo immediatamente la (2.3.171), che risulta così dimostrata.

Quanto infine all'azione delle simmetrie C, P e T, nel caso di polarizzazioni lineari per le quali risulta

$$\epsilon_\mu(r,\vec{p}) = -\epsilon^\mu(r,-\vec{p}) = \epsilon^*_\mu(r,\vec{p}) \tag{2.3.188}$$

abbiamo (cfr.Appendice (B.4.175)-(B.4.176), (B.4.177)-(B.4.178); (B.4.187)-(B.4.188); (B.4.217)-(B.4.218))

$$C\,A(r,\vec{p})\,C^{-1} = e^{-i\eta_C} B(r,\vec{p}) \quad\longleftrightarrow\quad C\,A^\dagger(r,\vec{p})\,C^{-1} = e^{i\eta_C} B^\dagger(r,\vec{p}) \tag{2.3.189}$$

$$C\,B(r,\vec{p})\,C^{-1} = e^{i\eta_C} A(r,\vec{p}) \quad\longleftrightarrow\quad C\,B^\dagger(r,\vec{p})\,C^{-1} = e^{-i\eta_C} A^\dagger(r,\vec{p}) \tag{2.3.190}$$

$$P\,A(r,\vec{p})\,P^{-1} = e^{-i\eta_P}\,A(r,-\vec{p}) \longleftrightarrow P\,A^\dagger(r,\vec{p})\,P^{-1} = e^{i\eta_P}\,A^\dagger(r,-\vec{p}) \tag{2.3.191}$$

$$P\,B(r,\vec{p})\,P^{-1} = e^{i\eta_P}\,B(r,-\vec{p}) \longleftrightarrow P\,B^\dagger(r,\vec{p})\,P^{-1} = e^{-i\eta_P}\,B^\dagger(r,-\vec{p}) \tag{2.3.192}$$

dove $e^{i\eta_P} = \pm 1$

$$T\,A(r,\vec{p})\,T^{-1} = e^{-i\eta_T}\,A(r,-\vec{p}) \longleftrightarrow T\,A^\dagger(r,\vec{p})\,T^{-1} = e^{i\eta_T}\,A^\dagger(r,-\vec{p}) \tag{2.3.193}$$

$$T\,B(r,\vec{p})\,T^{-1} = e^{i\eta_T}\,B(r,-\vec{p}) \longleftrightarrow T\,B^\dagger(r,\vec{p})\,T^{-1} = e^{-i\eta_T}\,B^\dagger(r,-\vec{p}) \tag{2.3.194}$$

mentre sugli operatori di creazione e distruzione associati alle polarizzazioni circolari, si ha (cfr.(B.4.181); (B.4.189) - (B.4.190); (B.4.213))

$$\begin{array}{rcl}
C\,\tilde{A}_{(s)}(\vec{p})\,C^{-1} &=& e^{-i\eta_C}\,\tilde{B}_{(s)}(\vec{p})\\
C\,\tilde{A}^\dagger_{(s)}(\vec{p})\,C^{-1} &=& e^{i\eta_C}\,\tilde{B}^\dagger_{(s)}(\vec{p})\\
C\,\tilde{B}_{(s)}(\vec{p})\,C^{-1} &=& e^{i\eta_C}\,\tilde{A}_{(s)}(\vec{p})\\
C\,\tilde{B}^\dagger_{(s)}(\vec{p})\,C^{-1} &=& e^{-i\eta_C}\,\tilde{A}^\dagger_{(s)}(\vec{p})
\end{array} \tag{2.3.195}$$

$$\begin{array}{rcl}
P\,\tilde{A}_{(s)}(\vec{p})\,P^{-1} &=& \pm\,\tilde{B}_{(s)}(\vec{p})\\
P\,\tilde{A}^\dagger_{(s)}(\vec{p})\,P^{-1} &=& \pm\,\tilde{B}^\dagger_{(s)}(\vec{p})\\
P\,\tilde{B}_{(s)}(\vec{p})\,P^{-1} &=& \pm\,\tilde{A}_{(s)}(\vec{p})\\
P\,\tilde{B}^\dagger_{(s)}(\vec{p})\,P^{-1} &=& \pm\,\tilde{A}^\dagger_{(s)}(\vec{p})
\end{array} \tag{2.3.196}$$

$$\begin{array}{rcl}
T\,\tilde{A}^\dagger_{(s)}(\vec{p})\,T^{-1} &=& e^{i\eta_T}\,(-1)^s\,\tilde{A}^\dagger_{(-s)}(-\vec{p})\\
T\,\tilde{A}_{(s)}(\vec{p})\,T^{-1} &=& e^{-i\eta_T}\,(-1)^s\,\tilde{A}_{(-s)}(-\vec{p})\\
T\,\tilde{B}^\dagger_{(s)}(\vec{p})\,T^{-1} &=& e^{-i\eta_T}\,(-1)^s\,\tilde{B}^\dagger_{(-s)}(-\vec{p})\\
T\,\tilde{B}_{(s)}(\vec{p})\,T^{-1} &=& e^{i\eta_T}\,(-1)^s\,\tilde{B}_{(-s)}(-\vec{p})
\end{array} \tag{2.3.197}$$

e comunque, per i campi, risulta (cfr.(B.4.179)-(B.4.180); B.4.195)-(B.4.196); (B.4.211)-(B.4.212))

$$C\,W^\mu(x)\,C^{-1} = e^{-i\eta_C}\,W^{\dagger\mu}(x) \quad\longleftrightarrow\quad C\,W^{\dagger\mu}(x)\,C^{-1} = e^{i\eta_C}\,W^\mu(x) \tag{2.3.198}$$

$$P\,W^\mu(x)\,P^{-1} = \mp\,W_\mu(Px) \quad\longleftrightarrow\quad P\,W^{\dagger\mu}(x)\,P^{-1} = \mp\,W^\dagger_\mu(Px) \tag{2.3.199}$$

$$T\,W^\mu(x)\,T^{-1} = -e^{-i\eta_T}\,W_\mu(Tx) \quad\longleftrightarrow\quad T\,W^{\dagger\mu}(x)\,T^{-1} = -e^{i\eta_T}\,W^\dagger_\mu(Tx) \tag{2.3.200}$$

dalle quali, per quanto riguarda la densità di corrente (2.3.126)

$$J^\mu = -i\left[(\partial^\mu W^\nu)\, W_\nu^\dagger - (\partial^\mu W_\nu^\dagger)\, W^\nu\right] \tag{2.3.201}$$

ricaviamo (cfr.(B.4.182); (B.4.197) e (B.4.224))

$$\begin{aligned} C\, J^\mu(x)\, C^{-1} &= -J^\mu(x) && (2.3.202)\\ P\, J^\mu(x)\, P^{-1} &= J_\mu(Px) && (2.3.203)\\ T\, J^\mu(x)\, T^{-1} &= J_\mu(Tx) && (2.3.204) \end{aligned}$$

2.4 Il campo elettromagnetico

Consideriamo adesso un caso molto particolare di campo vettoriale cioè quello del campo elettromagnetico $A^\mu(x)$.
Ricordiamo che, classicamente, in assenza di cariche e correnti, il campo A^μ soddisfa la seguente equazione del moto

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} \equiv \Box\, A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) = 0 \tag{2.4.205}$$

la quale può essere dedotta dalla lagrangiana già usata nel caso massivo (2.3.117), ponendo $m = 0$, ovvero dalla lagrangiana[38,39]

$$\mathcal{L} \;=\; \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \tag{2.4.207}$$

dove $F^{\mu\nu}$ è il tensore di cui alla (2.3.118), ovvero

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \tag{2.4.208}$$

che, nel caso attuale, è proprio il consueto tensore del campo elettromagnetico

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \;\;=\;\; \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{2.4.209}$$

A differenza del caso massivo, dall'equazione di moto (2.4.205) *non* discende la condizione (2.3.121) della quadridivergenza nulla.
Questa condizione deve essere imposta indipendentemente, usando il fatto che, fissato $F_{\mu\nu}$, cioè fissati i campi elettromagnetici $\vec{E}$ e $\vec{B}$, il potenziale A_μ è indeterminato a meno di una trasformazione di gauge

$$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \chi \tag{2.4.210}$$

dove $\chi = \chi(x)$ è una funzione scalare, a priori qualsiasi.

---

[38]Rispetto al caso del campo vettoriale carico di massa m, la lagrangiana presenta adesso un fattore $\frac{1}{4}$ invece di $\frac{1}{2}$ perché adesso $\partial^\mu A^\nu$ compare quattro volte in essa, visto che compare sia in $F^{\mu\nu}$ che in $F_{\mu\nu}$ essendo il campo A^μ intrinsecamente reale.
Chiaramente il fattore moltiplicativo non ha comunque effetto sulle equazioni di moto, essendo esse omogenee nella lagrangiana: volendo scriverla correttamente normalizzata nel sistema c.g.s. elettrostatico, il fattore sarebbe in realtà $-\frac{1}{16\pi}$.

[39]Si noti che, nello scrivere la lagrangiana abbiamo usato il fatto che, proprio per il suo significato fisico in termini dei campi classici $\vec{E}$ e $\vec{B}$, $F^{\mu\nu}$ è reale, i.e.

$$F^{\mu\nu} = F^{*\mu\nu} \tag{2.4.206}$$

e dunque al campo quantizzato A^μ dovrà poi essere richiesto di essere autoaggiunto.

Questa arbitrarietà può essere usata per scegliere A_μ in modo che soddisfi la condizione (gauge) di Lorentz[40], cioè

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \tag{2.4.211}$$

In questo modo, le equazioni di moto si semplificano e diventano

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} \equiv \Box\, A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) = 0 \Rightarrow \Box A^\nu = 0 \tag{2.4.212}$$

L'equazione

$$\Box A^\nu = 0 \tag{2.4.213}$$

ha soluzioni piane della forma

$$A^\mu = N\,\epsilon^\mu\, e^{-ikx} \tag{2.4.214}$$

dove $k_\mu k^\mu \equiv k^2 = 0$, N è un fattore di normalizzazione ed ϵ^μ descrive lo stato di polarizzazione.
La condizione di Lorentz, come abbiamo già visto nel caso massivo, implica il fatto che non esistono tutte e quattro le polarizzazioni possibili, bensì solo quelle per cui

$$k_\mu\,\epsilon^\mu = 0 \tag{2.4.215}$$

Questa condizione riduce ovviamente a tre le polarizzazioni[41] compatibili con le equazioni del moto.

Però noi sappiamo che gli stati di polarizzazione indipendenti per un fotone avente impulso $\vec{k}$ sono solo due !
L'ulteriore riduzione avviene, come è noto, tenendo conto che la gauge di Lorentz non esaurisce i gradi di arbitrarietà che abbiamo su A^μ, infatti l'ulteriore trasformazione di gauge *ristretta*

$$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu\chi; \qquad \Box\chi = 0 \tag{2.4.216}$$

lascia inalterate sia la condizione di Lorentz che il tensore $F^{\mu\nu}$.
Quest'ultima libertà di gauge corrisponde, per le soluzioni piane con k^μ fissato, a traslare la polarizzazione nel modo seguente, dove λ è un coefficiente a priori arbitrario

$$\epsilon^\mu \to \epsilon^{'\mu} = \epsilon^\mu + \lambda k^\mu \tag{2.4.217}$$

[40] Come è ben noto dall'elettromagnetismo classico, basta che $\chi(x)$ sia scelto in modo che soddisfi l'equazione $\Box\chi = \partial^\mu A_\mu$: evidentemente il campo A'_μ che discende dalla (2.4.210) ha quadridivergenza nulla ed è equivalente ad A_μ per quanto riguarda la descrizione dei campi elettromagnetici.

[41] Nel caso massivo, la condizione sulla quadridivergenza eliminava il contributo scalare, lasciando solo quello di spin 1.
Nel caso di massa nulla, un'affermazione simile perderebbe di significato perché, in questo caso, è lo spin come variabile a non essere più definito.
Per massa nulla, si può parlare, infatti, solo di stati di elicità definita (e questo è sempre uno solo ...). La condizione sulla quadridivergenza elimina uno stato di elicità che corrisponde a $\lambda = 0$.

Questa possibilità ha conseguenze importanti, infatti proviamo a considerare una soluzione con

$$k^\mu = (k^0, \vec{k}); \qquad \epsilon^\mu = (\epsilon^0, \vec{\epsilon}) \tag{2.4.218}$$

che soddisfa la condizione di Lorentz, cioè

$$\epsilon \cdot k = 0 \tag{2.4.219}$$

La condizione di gauge (2.4.217) implica che si possa sommare a ϵ^μ un qualunque multiplo di k^μ e avere ancora una polarizzazione equivalente a quella di partenza. Essendo certamente $k^0 \neq 0$ dato che k è sul cono luce, possiamo allora, in ogni sistema di riferimento, fare sempre in modo che risulti

$$\epsilon^0 = 0 \Rightarrow \epsilon^\mu = (0, \vec{\epsilon}) \tag{2.4.220}$$

La condizione di Lorentz diviene allora

$$\vec{k} \cdot \vec{\epsilon} = 0 \tag{2.4.221}$$

ovvero implica che $\vec{\epsilon}$, a sua volta, sia *trasverso all'impulso spaziale del fotone* e dunque esistano solo due polarizzazioni indipendenti.
In questa gauge, evidentemente, $div\vec{A} = 0$ e, in assenza di cariche e correnti, il potenziale scalare è nullo, ovvero $A^0 \equiv 0$: si tratta della *gauge di radiazione*, detta anche *gauge di Coulomb*[42] o anche *gauge trasversa*.

[42] Il punto di partenza è sempre rappresentato, naturalmente, dalle equazioni di Maxwell per i campi elettrico $\vec{E}$ e magnetico $\vec{B}$, cioè

$$div\vec{E} = 4\pi\rho \qquad rot\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{2.4.222}$$

$$div\vec{B} = 0 \qquad rot\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{2.4.223}$$

Dall'equazione sulla divergenza di $\vec{B}$ si conclude, come è noto, che possiamo trovare un potenziale vettore $\vec{A}$ tale che

$$\vec{B}(\vec{x}, t) \equiv rot\vec{A}(\vec{x}, t) \tag{2.4.224}$$

Questo potenziale, proprio perché è definito a meno di un termine irrotazionale, è indeterminato a meno della somma con il gradiente di una funzione scalare $\Gamma(\vec{x}, t)$ qualsiasi, cioè vale la libertà di gauge per cui

$$\vec{A}(\vec{x}, t) \to \vec{A}(\vec{x}, t) + \vec{\nabla}\Gamma(\vec{x}, t) \tag{2.4.225}$$

Venendo ora al campo elettrico $\vec{E}$, dall'equazione relativa alla sua rotazione abbiamo che

$$rot\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} rot\vec{A} \quad \Rightarrow \quad rot\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = 0 \tag{2.4.226}$$

e dunque è possibile trovare una funzione $V(\vec{x}, t)$ tale che

$$\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla}V \tag{2.4.227}$$

Questa gauge non è covariante al cambiare del sistema di riferimento

---

Sostituendo adesso nella equazione della divergenza del campo elettrico, si ha

$$4\pi\rho = div\vec{E} = div\left(-\vec{\nabla}V - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = -\nabla^2 V - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}div\vec{A} \tag{2.4.228}$$

ovvero otteniamo l'equazione

$$\nabla^2 V = -4\pi\rho - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}div\vec{A} \tag{2.4.229}$$

Analogamente, dall'equazione per la rotazione di $\vec{B}$, ricaviamo che

$$\frac{4\pi}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = rot\vec{B} \quad\Rightarrow\quad \frac{4\pi}{c}\vec{J} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\vec{\nabla}V - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) + rot\ rot\vec{A} \tag{2.4.230}$$

D'altronde, per un qualunque campo vettoriale $\vec{a}$ risulta che

$$rot\ rot\,\vec{a} = -\nabla^2\vec{a} + \vec{\nabla}\left(div\,\vec{a}\right) \tag{2.4.231}$$

e dunque abbiamo che

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{c}\vec{J} &= \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}V + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \nabla^2\vec{A} + \vec{\nabla}\left(div\vec{A}\right) \\ \Rightarrow\quad \nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}V + \vec{\nabla}\left(div\vec{A}\right) \end{aligned} \tag{2.4.232}$$

Usiamo adesso la libertà di gauge (2.4.225) per imporre che $div\vec{A} = 0$.
Partendo infatti da un qualunque potenziale vettore $\vec{\hat{A}}$ che riproduca, attraverso la sua rotazione il campo magnetico $\vec{B}$ assegnato, possiamo sommargli il gradiente della funzione Γ che soddisfa l'equazione

$$\nabla^2\Gamma = -div\,\vec{\hat{A}} \tag{2.4.233}$$

E' immediato allora che il nuovo potenziale $\vec{A} = \vec{\hat{A}} + \vec{\nabla}\Gamma$ avrà divergenza nulla, infatti

$$div\vec{A} = div\left(\hat{A} + \vec{\nabla}\Gamma\right) = div\hat{A} + \nabla^2\Gamma \equiv 0 \tag{2.4.234}$$

Questa gauge è appunto la *gauge* di Coulomb, detta anche gauge di *radiazione* perché particolarmente utile per descrivere la radiazione elettromagnetica ovvero i campi elettromagnetici in assenza di cariche e correnti.
In questa gauge, essendo $div\vec{A} = 0$, i potenziali soddisfano le equazioni

$$\nabla^2 V = -4\pi\rho \tag{2.4.235}$$

$$\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}V \tag{2.4.236}$$

Il potenziale scalare appare propagarsi in modo istantaneo, cioè a velocità infinita, mentre questo non accade per il potenziale vettore che, in questa gauge, soddisfa l'equazione delle onde con un termine di sorgente che è $-\frac{4\pi}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}V$.
Data anche questa differenza di comportamento, nessuna meraviglia che la gauge di Coulomb non sia covariante per trasformazioni di Lorentz !
Comunque, riguardo alla propagazione istantanea del potenziale scalare, sia chiaro che essa non prefigura alcuna inconsistenza con la Relatività Ristretta perché, in effetti, ciò che determina il moto delle cariche sono i campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$ e non il quadripotenziale e questi campi sono evidentemente invarianti rispetto alla gauge !

inerziale: lo risulta unicamente a meno di una trasformazione di gauge *ristretta*!

Per un'onda che viaggia nella direzione $\vec{k}$ dell'asse z, possiamo scegliere

$$\vec{\epsilon}_z(1) = (1,0,0) \tag{2.4.244}$$
$$\vec{\epsilon}_z(2) = (0,1,0) \tag{2.4.245}$$

e questo corrisponde a scegliere polarizzazioni[43] lineari e reali, per cui risulta quindi che

$$\vec{\epsilon}_z(j)^* = \vec{\epsilon}_z(j), \quad j = 1,2 \tag{2.4.246}$$

Concludiamo infine con una osservazione circa il significato della sorgente del potenziale vettore (nella gauge di Coulomb). Abbiamo visto che

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla} V \tag{2.4.237}$$

Ricordiamo adesso che, come qualunque campo vettoriale, anche la corrente $\vec{J}$ può essere decomposta in modo univoco nella somma di una parte irrotazionale $\vec{J}_L$ e una parte a divergenza nulla $\vec{J}_T$

$$\vec{J} = \vec{J}_L + \vec{J}_T \qquad con \quad rot\vec{J}_L = 0 \quad e \quad div\vec{J}_T = 0 \tag{2.4.238}$$

Il potenziale $\vec{A}$ nella gauge scelta ha divergenza nulla per costruzione e dunque la sua sorgente di cui alla (2.4.237) deve essere la parte a divergenza nulla della corrente $\vec{J}$, infatti

$$\begin{aligned} div\left(-\frac{4\pi}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}V\right) &= -\frac{4\pi}{c}div\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2 V = -\frac{4\pi}{c}div\vec{J} - \frac{4\pi}{c}\frac{\partial}{\partial t}\rho = \\ &= -\frac{4\pi}{c}\left(div\vec{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t}\right) = 0 \end{aligned} \tag{2.4.239}$$

Essa può essere espressa in termini della sola corrente $\vec{J}$, infatti se partiamo dall'identità

$$rot(rot\vec{J}) = \vec{\nabla}(div\vec{J}) - \nabla^2\vec{J} \Rightarrow \nabla^2(\vec{J}_L + \vec{J}_T) = \vec{\nabla}(div\vec{J}_L) - rot(rot\vec{J}_T) \tag{2.4.240}$$

essendo, come ben noto, la funzione di Green del laplaciano data da $-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}$, ovvero

$$\nabla_x^2\left(-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}\right) = \delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \tag{2.4.241}$$

ecco che, per quanto detto sopra circa l'indipendenza di $\vec{J}_L$ e $\vec{J}_T$, risulta

$$\nabla^2\vec{J}_L = \vec{\nabla}(div\vec{J}_L) \equiv \vec{\nabla}(div\vec{J}) \Rightarrow \vec{J}_L(\vec{x},t) = -\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\int d^3y\frac{div\vec{J}(\vec{y},t)}{|\vec{x}-\vec{y}|} \tag{2.4.242}$$
$$\nabla^2\vec{J}_T = -rot(rot\vec{J}_T) \equiv -rot(rot\vec{J}) \Rightarrow \vec{J}_T(\vec{x},t) = \frac{1}{4\pi}rot\,rot\int d^3y\frac{\vec{J}(\vec{y},t)}{|\vec{x}-\vec{y}|} \tag{2.4.243}$$

[43] Rispetto al caso massivo in cui si definivano le polarizzazioni nel sistema dove la particella ha impulso spaziale nullo e si estendevano ai vari impulsi attraverso il boost relativo che opera senza rotazione di assi, in questo caso questo non è possibile perchè non abbiamo il riferimento di quiete. E' comunque questo un aspetto su cui torneremo.

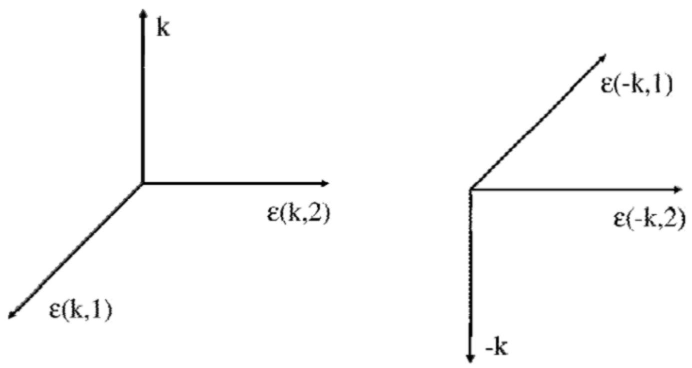

Figura 2.5: *Polarizzazioni lineari del fotone e sua direzione di propagazione*

Per ipotesi, i versori $\vec{\epsilon}_z(1)$, $\vec{\epsilon}_z(2)$ e $\vec{k}/|\vec{k}|$ formano una terna destrorsa come gli assi cartesiani x, y, z: seguendo la convenzione usata da Bjorken e Drell[44] assumeremo che sia

$$\vec{\epsilon}_{-z}(1) = -\vec{\epsilon}_z(1) \tag{2.4.247}$$
$$\vec{\epsilon}_{-z}(2) = \vec{\epsilon}_z(2) \tag{2.4.248}$$

Un'altra scelta equivalente è quella di usare polarizzazioni circolari, cioè, sempre per un fotone che viaggia lungo l'asse z

$$\vec{\epsilon}_z(+) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\vec{\epsilon}_z(1) - i\,\vec{\epsilon}_z(2)\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1, i, 0) \quad elicita'\ \lambda = +1 \tag{2.4.249}$$
$$\vec{\epsilon}_z(-) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{\epsilon}_z(1) - i\,\vec{\epsilon}_z(2)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -i, 0) \quad elicita'\ \lambda = -1 \tag{2.4.250}$$

In questo caso, risulta evidentemente che

$$\vec{\epsilon}_z(\pm)^* = -\vec{\epsilon}_z(\mp) \tag{2.4.251}$$

Sempre riguardo alle polarizzazioni circolari, date le (2.4.247) e (2.4.248), risulta altresì

$$\vec{\epsilon}_{-z}(+) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{\epsilon}_z(1) - i\vec{\epsilon}_z(2)\right) = \vec{\epsilon}_z(-) \tag{2.4.252}$$
$$\vec{\epsilon}_{-z}(-) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\vec{\epsilon}_z(1) - i\vec{\epsilon}_z(2)\right) = \vec{\epsilon}_z(+) \tag{2.4.253}$$

ovvero

$$\vec{\epsilon}_{-z}(\pm) = \vec{\epsilon}_z(\mp) \tag{2.4.254}$$

[44] J.D. Bjorken, S.D. Drell: *Relativistic Quantum Fields*, McGraw-Hill 1965

Fin qui si è sempre assunto che l'impulso fosse diretto come l'asse z del riferimento scelto, nel suo verso oppure in verso opposto.
Vediamo ora che succede nel caso generico in cui abbiamo

$$k^\mu = (k, \vec{k}) \tag{2.4.255}$$

Posto che sia

$$\vec{k} = k\,(\sin\theta\,\cos\phi,\, \sin\theta\,\sin\phi,\, \cos\theta) \tag{2.4.256}$$

iniziamo definendo la matrice di rotazione seguente

$$R_{\vec{k}} = R_z(-\phi)\,R_y(-\theta)\,R_z^{-1}(-\phi) \equiv e^{-i\phi L_3}\,e^{-i\theta L_2}\,e^{i\phi L_3} \tag{2.4.257}$$

dove gli L_j sono i consueti generatori delle rotazioni in tre dimensioni, cioè le matrici

$$(L_j)_{kl} = -i\,\epsilon_{jkl} \tag{2.4.258}$$

Questa rotazione gode della proprietà per cui[45]

$$R_{\vec{k}}\,(0,0,1) = (\sin\theta\,\cos\phi,\, \sin\theta\,\sin\phi,\, \cos\theta) \Rightarrow R_{\vec{k}}\,(0,0,k) = \vec{k} \tag{2.4.263}$$

[45] Ricordiamo, per prima cosa, che una generica rotazione di riferimento R in tre dimensioni può essere sempre scritta come $R = e^{i\,\vec{\alpha}\cdot\vec{L}}$ dove $\vec{\alpha}/|\vec{\alpha}|$ è l'asse di rotazione (lasciato invariato dalla stessa ...) e $|\vec{\alpha}|$ è l'ampiezza della rotazione stessa (in senso antiorario, intorno all'asse di cui sopra): la rotazione (2.4.257) risulta essere una rotazione di $-\theta$ intorno all'asse $\vec{n} = R_z(-\phi)\vec{n}_0$, dove $\vec{n}_0 \equiv (0,1,0)$.
Per dimostarlo, partiamo dal fatto che, in generale, risulta che $R\,e^{i\vec{\alpha}\cdot\vec{L}}\,R^{-1} = e^{i(R\vec{\alpha})\cdot\vec{L}}$, ovvero la trasformazione in questione sulla generica rotazione $e^{i\vec{\alpha}\cdot\vec{L}}$ non altera l'ampiezza della rotazione ma solo l'asse intorno cui essa avviene che, invece di essere individuato dall'originale $\vec{\alpha}$, è individuato da $R\vec{\alpha}$.
Essendo nel nostro caso

$$R_y(-\theta) = e^{-i\theta\,\vec{n}_0\cdot\vec{L}} \tag{2.4.259}$$

$$R_z(-\phi) \equiv e^{-i\phi\,L_3} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.4.260}$$

è evidente che $R_z(-\phi)\vec{n}_0 = (-sin\phi, cos\phi, 0) \equiv \vec{n}$ è l'effettivo asse intorno a cui avviene la rotazione (2.4.257) e dunque che $R_z(-\phi)\,R_y(-\theta)\,R_z^{-1}(-\phi)$ descrive una rotazione di $-\theta$ intorno all'asse $\vec{n}$ che, su basi semplicemente geometriche, manda evidentemente il vettore $(0,0,k)$ in $\vec{k}$.

Poniamo dunque, per definizione[46]

$$\vec{\epsilon}(s,\vec{k}) \equiv R_{\vec{k}}\ \vec{\epsilon}_z(s) \quad \Rightarrow \quad \epsilon^\mu(s,\vec{k}) \equiv \left(0, \vec{\epsilon}(s,\vec{k})\right) \tag{2.4.264}$$

Essendo R reale, ne segue in particolare che, per polarizzazioni circolari, risulta (si ricordi che le componenti delle polarizzazioni sono comunque solo spaziali...)

$$\vec{\epsilon}_z(\pm)^* = -\vec{\epsilon}_z(\mp) \quad \Rightarrow \quad \epsilon^*_\mu(\lambda,\vec{k}) = -\epsilon_\mu(-\lambda,\vec{k}) = \epsilon^\mu(-\lambda,\vec{k}) \tag{2.4.265}$$
$$\vec{\epsilon}_z(\pm) = \vec{\epsilon}_{-z}(\mp) \quad \Rightarrow \quad \epsilon^\mu(\lambda,\vec{k}) = \epsilon^\mu(-\lambda,-\vec{k}) = -\epsilon_\mu(-\lambda,-\vec{k}) \tag{2.4.266}$$

Riguardo allo sviluppo del campo elettromagnetico in termini di operatori di creazione e distruzione, questo è dato[47] da ($E_p \equiv |\vec{p}|$)

$$\begin{aligned} A^\mu(x) &= \sum_{s=1}^{2} \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \left[a(s,\vec{p})\,\epsilon^\mu(s,\vec{p})\,e^{-ipx} + a^\dagger(s,\vec{p})\,\epsilon^{*\mu}(s,\vec{p})\,e^{ipx}\right] = \\ &= \sum_{\lambda=\pm 1} \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \left[a(\lambda,\vec{p})\,\epsilon^\mu(\lambda,\vec{p})\,e^{-ipx} + a^\dagger(\lambda,\vec{p})\,\epsilon^{*\mu}(\lambda,\vec{p})\,e^{ipx}\right] \end{aligned} \tag{2.4.267}$$

dove la somma è fatta solo sui due stati di polarizzazione fisici e $\epsilon^\mu(\lambda,\vec{p})$ descrive appunto lo stato[48] di polarizzazione del fotone generato dall'operatore di creazione $a^\dagger(\lambda,\vec{p})$, quando esso viene applicato al vuoto.

Verifichiamolo adesso direttamente. Si ha infatti

$$\begin{aligned} R_z(-\phi)\,R_y(-\theta)\,R_z(\phi)\ (0,0,k) &= R_z(-\phi)\,R_y(-\theta)\ (0,0,k) = R_z(-\phi)\,(k\,\sin\theta, 0, k\,\cos\theta) = \\ &= k(\sin\theta\,\cos\phi, \sin\theta\,\sin\phi, \cos\theta) \end{aligned}$$

che è quanto volevamo dimostrare.
In forma esplicita, la matrice di rotazione in questione è data da

$$R_{\vec{k}} = \begin{pmatrix} \sin^2\phi + \cos^2\phi\,\cos\theta & \sin\phi\,\cos\phi(\cos\theta - 1) & \sin\theta\,\cos\phi \\ \sin\phi\,\cos\phi(\cos\theta-1) & \cos^2\phi + \sin^2\phi\,\cos\theta & \sin\theta\,\sin\phi \\ -\sin\theta\,\cos\phi & -\sin\theta\,\sin\phi & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{2.4.261}$$

Per concludere, ricordiamo infine che

$$\left(e^{i\phi\,\vec{n}\cdot\vec{L}}\right)_{jk} = \cos\phi\,\delta_{jk} + \sin\phi\,\epsilon_{jkm}n_m + (1-\cos\phi)n_j n_k \tag{2.4.262}$$

[46]Ne segue, allora, per esempio, che la convenzione sopracitata di Bjorken e Drell (2.4.247) e (2.4.248) corrisponde, semplicemente, a individuare il vettore $(0,0,-k)$ rispetto al vettore $(0,0,k)$ attraverso gli angoli di Eulero $\theta = \pi,\ \phi = 0$ ...

[47]cfr. J.D. Bjorkeen, S.D. Drell: *Relativistic Quantum Fields*, McGraw-Hill 1965, pag.74
Si faccia attenzione che, come vedremo fra breve, l'espressione (2.4.267) non conduce a una legge di trasformazione del campo A^μ di tipo quadrivettoriale, come potrebbe apparentemente sembrare !

[48]Infatti la funzione d'onda del fotone individuato dallo stato $a^\dagger(\vec{p},\lambda)\,|\Omega>$ è data, per

Si osservi altresì che, per come è stato definito, il campo $A^\mu(x)$ risulta certamente autoaggiunto[49].

Quanto poi all'algebra del campo, essa è definita attraverso le seguenti uniche regole di commutazione non banali

$$[a(s,\vec{p})\,,a^\dagger(r,\vec{q})] = 2E_p\,(2\pi)^3\,\delta(\vec{q}-\vec{p})\,\delta_{sr} \tag{2.4.273}$$

E veniamo adesso alla determinazione delle proprietà di trasformazione del campo $A^\mu(x)$ sotto il gruppo di Poincaré.
E' evidente, a questo riguardo, come sia fondamentale determinare per prima cosa le proprietà di trasformazione delle polarizzazioni ϵ^μ sotto il gruppo di Lorentz.

Procediamo per questo in modo strettamente simile a quanto fatto nel caso massivo e iniziamo fissando arbitrariamente un quadrimpulso "canonico" del fotone $\hat{k}$ così fatto

$$\hat{k}^\mu \equiv (\hat{k},0,0,\hat{k}) \tag{2.4.274}$$

che, come vedremo, giocherà il ruolo del quadrimpulso $\hat{p}=(m,0,0,0)$ per le particelle provviste di massa.

---

le ragioni già considerate, per esempio, nel caso del campo scalare, da

$$\begin{aligned}\psi^\mu(\lambda,\vec{p};x) &= \;<\Omega|\,A^\mu(x)\,a^\dagger(\vec{p},\lambda)\,|\Omega>= \\ = \sum_{\lambda'}\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3\,2E_q} &<\Omega|\,\left[a(\lambda',\vec{q})\,\epsilon^\mu(\lambda',\vec{q})\,e^{-iqx}+a^\dagger(\lambda',\vec{q})\,\epsilon^{*\mu}(\lambda',\vec{q})\,e^{iqx}\right]\,a^\dagger(\lambda,\vec{p})\,|\Omega>= \\ = \sum_{\lambda'}\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3\,2E_q} &\,\epsilon^\mu(\lambda',\vec{q})\;e^{-iqx}\;(2\pi)^3\,\delta_{\lambda\lambda'}\,\delta(\vec{q}-\vec{p})\,2E_q \;=\; \epsilon^\mu(\lambda,\vec{p})\;e^{-ipx}\end{aligned} \tag{2.4.268}$$

[49] Essendo il campo A^μ autoaggiunto, la lagrangiana che ne descrive la dinamica non può essere invariante per trasformazioni di gauge di prima specie e dunque non può esistere una corrente legata ad una carica conservata ... che, del resto, il fotone non possiede.
Questo però non significa che non sia possibile associare alla funzione d'onda (2.4.268) una corrente di probabilità conservata dalla dinamica, che continueremo a chiamare $J^\mu(x)$, la cui componente temporale $J^0(x)\equiv\rho(x)$ fornisca la densità di fotoni per unità di volume associata alla funzione d'onda di cui sopra. Come nel caso massivo, risulta

$$J^\mu(x) = -i\,[(\partial^\mu\psi^\nu)\psi^*_\nu - (\partial^\mu\psi^*_\nu)\psi^\nu] \tag{2.4.269}$$

Questa corrente è conservata e gauge-invariante. Per la funzione d'onda (2.4.268) abbiamo

$$J^\mu(x) = -i\,[(-i)p^\mu\,\epsilon^\nu(\lambda,\vec{q})\,\epsilon^*_\nu(\lambda,\vec{q}) - i\,p^\mu\,\epsilon^*_\nu(\lambda,\vec{q})\,\epsilon^\nu(\lambda,\vec{q})] \tag{2.4.270}$$

e usando un risultato che dimostreremo fra breve, secondo cui

$$\epsilon^\nu(r,\vec{q})\,\epsilon^*_\nu(s,\vec{q}) = \delta_{rs} \tag{2.4.271}$$

ne segue che

$$J^\mu(x) = 2\,p^\mu \quad\rightarrow\quad J^0(x)\equiv\rho(x) = 2E \tag{2.4.272}$$

ovvero che anche questi stati rappresentano $2E$ particelle (fotoni) per unità di volume.

Come si è detto, per questo quadrimpulso $\hat{k}$, possiamo scegliere le due seguenti polarizzazioni indipendenti

$$\epsilon^\mu(+,\hat{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,-i,0); \qquad \epsilon^\mu(-,\hat{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-i,0) \tag{2.4.275}$$

E' immediato verificare che le polarizzazioni che noi abbiamo già definito nel caso di impulso spaziale di modulo qualsiasi k, *ma* comunque diretto lungo l'asse z, si possono ottenere anche attraverso la legge di trasformazione

$$\epsilon^\mu(\pm,k) = \mathcal{B}(k)^\mu_{\cdot\nu}\,\epsilon^\nu(\pm,\hat{k}) \tag{2.4.276}$$

dove $\mathcal{B}(k)$ è il boost lungo l'asse z che trasforma $\hat{k}^\mu = (\hat{k},0,0,\hat{k})$ in $k^\mu = (k,0,0,k)$. Essendo infatti le componenti di $\epsilon^\mu(\pm,\hat{k})$ trasverse rispetto all'asse z, evidentemente questo boost non è in grado di modificarle, per cui, in accordo con la (2.4.276), risulta, come deve essere, che

$$\epsilon^\mu(\pm,k) = \epsilon^\mu(\pm,\hat{k}) \tag{2.4.277}$$

Nel caso in cui $\vec{k}$ non sia diretto lungo l'asse z, abbiamo poi stabilito che

$$\epsilon^\mu(\pm,\vec{k}) \equiv R(\vec{k})\,\epsilon^\mu(\pm,k) = R(\vec{k})\,\mathcal{B}(k)\,\epsilon^\mu(\pm,\hat{k}) \equiv L(\vec{k})\;\epsilon^\mu(\pm,\hat{k}) \tag{2.4.278}$$

dove $R(\vec{k})$ è definita dalla (2.4.261) e la matrice di Lorentz $L(\vec{k})$, funzione del quadrivettore $k = (|\vec{k}|,\vec{k})$, è definita quindi come

$$L(\vec{k}) \equiv R(\vec{k})\,\mathcal{B}(|\vec{k}|) \tag{2.4.279}$$

e dunque è evidentemente tale anche che

$$L(\vec{k})^\mu_{\cdot\nu}\hat{k}^\nu = \Big(R(\vec{k})\,\mathcal{B}(|\vec{k}|)\Big)^\mu_{\cdot\nu}\,\hat{k}^\nu = k^\mu \tag{2.4.280}$$

Si osservi adesso che le polarizzazioni $\epsilon^\mu(\pm,\vec{k})$, qualunque sia il quadrimpulso del fotone, hanno comunque sempre parte temporale nulla (oltre, naturalmente a essere tali che $k_\mu\epsilon^\mu = 0$), sinonimo, questo, del fatto di operare nella gauge di Coulomb. Inoltre, per le ben note proprietà delle trasformazioni di Lorentz, risulta evidentemente che

$$\begin{aligned}\epsilon^\mu(r,\vec{k})\,\epsilon^*_\mu(s,\vec{k}) &= \Big(L(\vec{k})^\mu_{\cdot\nu}\,\epsilon^\nu(r,\hat{k})\Big)\Big(L(\vec{k})^{\cdot\tau}_\mu\,\epsilon^*_\tau(r,\hat{k})\Big) = \\ &= \epsilon^\nu(r,\hat{k})\,\epsilon^*_\nu(s,\hat{k}) = \delta_{rs}\end{aligned} \tag{2.4.281}$$

dove l'ultima uguaglianza consegue direttamente dalla definizione delle polarizzazioni nel sistema dove il quadrimpulso è proprio $k^\mu = \hat{k}(1,0,0,1)$ in cui esse sono ortogonali e space-like.
Osserviamo adesso che, data la (2.4.267), le componenti del campo A^μ sono direttamente legate a quelle della polarizzazione ϵ^μ, per cui, mancando in

quest'ultima la componente temporale, ne segue che $A^0 \equiv 0$, e questo chiaramente pone un problema riguardo al modo di trasformarsi del campo A^μ sotto il gruppo di Lorentz !
Cerchiamo dunque di capire meglio questo aspetto della questione.
Supponiamo per questo di voler determinare la quantità $\Lambda \cdot \epsilon(\pm, \vec{k})$: abbiamo che

$$\Lambda \cdot \epsilon(\pm, \vec{k}) = \Lambda \cdot L(\vec{k}) \cdot \epsilon(\pm, \hat{k}) = L(\vec{\Lambda k}) \cdot L^{-1}(\vec{\Lambda k}) \cdot \Lambda \cdot L(\vec{k}) \cdot \epsilon(\pm, \hat{k}) \qquad (2.4.282)$$

ma

$$L^{-1}(\vec{\Lambda k}) \cdot \Lambda \cdot L(\vec{k}) \cdot \hat{k} = \hat{k} \qquad (2.4.283)$$

e dunque la matrice di Lorentz

$$\mathcal{P}(\Lambda, \vec{k}) \equiv L^{-1}(\vec{\Lambda k}) \cdot \Lambda \cdot L(\vec{k}) \qquad (2.4.284)$$

appartiene al piccolo gruppo del quadrivettore $\hat{k}$: si tratta dell'esatto analogo per la massa nulla della rotazione di Wigner che abbiamo discusso nel caso del campo W^μ.
Sostituendo nella (2.4.282), ricaviamo

$$\Lambda \cdot \epsilon(\pm, \vec{k}) = L(\vec{\Lambda k}) \cdot \mathcal{P}(\Lambda, \vec{k}) \cdot \epsilon(\pm, \hat{k}) \qquad (2.4.285)$$

la quale mostra come, in ultima analisi, per conoscere $\Lambda \cdot \epsilon(\pm, \vec{k})$ sia fondamentale esplicitare l'azione di $\mathcal{P}(\Lambda, \vec{k})$ su $\epsilon(\pm, \hat{k})$.

Siccome, come si è detto, $\mathcal{P}(\Lambda, \vec{k})$ appartiene al piccolo gruppo di $\hat{k}$, iniziamo con lo studiare questo sottogruppo del gruppo di Lorentz.
Si può dimostrare che esso è un gruppo di Lie a tre parametri, i cui generatori, in termini dei consueti generatori del gruppo di Lorentz, sono i seguenti

$$X \equiv J_1 + K_2; \qquad Y \equiv J_2 - K_1; \qquad J_3 \qquad (2.4.286)$$

e l'algebra di Lie del gruppo, di conseguenza, è definita dai commutatori[50]

$$[X, Y] = 0; \qquad [J_3, X] = i\,Y; \qquad [J_3, Y] = -i\,X \qquad (2.4.290)$$

Come si vede, il piccolo gruppo di $\hat{k}$ è isomorfo al gruppo euclideo in due dimensioni $E(2)$, fatto dalle trasformazioni rigide del piano in sé (due traslazioni indipendenti e una rotazione ...).

[50]Infatti abbiamo

$$\begin{aligned} [X, Y] &= [J_1 + K_2,\, J_2 - K_1] = [J_1,\, J_2] - [K_2,\, K_1] = i\,J_3 - iJ_3 = 0 & (2.4.287)\\ [J_3,\, X] &= [J_3,\, J_1 + K_2] = i\,J_2 - iK_1 = i\,Y & (2.4.288)\\ [J_3,\, Y] &= [J_3,\, J_2 - K_1] = -i\,J_1 - iK_2 = -i\,X & (2.4.289) \end{aligned}$$

Osserviamo adesso che

$$X = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X^2 = - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow X^3 = 0 \qquad (2.4.291)$$

per cui risulta che, per qualunque numero reale α, è

$$e^{i\alpha X} = I + i\alpha\, X - \frac{\alpha^2}{2}\, X^2 = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\alpha^2}{2} & 0 & -\alpha & -\frac{\alpha^2}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & 1 & \alpha \\ \frac{\alpha^2}{2} & 0 & -\alpha & 1 - \frac{\alpha^2}{2} \end{pmatrix} \qquad (2.4.292)$$

Analogamente abbiamo che

$$Y = i \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y^2 = - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow Y^3 = 0 \qquad (2.4.293)$$

da cui ne segue che

$$e^{i\beta Y} = I + i\beta\, Y - \frac{\beta^2}{2}\, Y^2 = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\beta^2}{2} & \beta & 0 & -\frac{\beta^2}{2} \\ \beta & 1 & 0 & -\beta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\beta^2}{2} & \beta & 0 & 1 - \frac{\beta^2}{2} \end{pmatrix} \qquad (2.4.294)$$

E infine risulta

$$J_3 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow e^{i\phi J_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (2.4.295)$$

Il generico elemento del piccolo gruppo del quadrivettore $\hat{k}$ può dunque essere espresso sempre nella forma seguente[51]

$$\mathcal{P}(\alpha, \beta, \phi) = e^{i(\alpha X + \beta Y)}\, e^{i\phi J_3} \qquad (2.4.302)$$

---

[51] Iniziamo osservando che, siccome X ed Y commutano tra loro, il termine $e^{i(\alpha X+\beta Y)}$ nella (2.4.302) non richiede particolari commenti. Quanto alla posizione della rotazione, si ricordi che $\vec{J}$ e $\vec{K}$ sono operatori vettoriali, per cui

$$R^{-1}\, J_l\, R = R_{lm}\, J_m; \qquad R^{-1}\, K_l\, R = R_{lm}\, K_m \qquad (2.4.296)$$

e dunque, nel caso della rotazione $R = R(\phi) \equiv e^{i\phi J_3}$, abbiamo che

$$R^{-1}\, X\, R = X\, \cos\phi + Y\, \sin\phi; \qquad R^{-1}\, Y\, R = Y\, \cos\phi - X\, \sin\phi \qquad (2.4.297)$$

D'altronde evidentemente risulta

$$e^{i(\alpha X+\beta Y)}\, R = R\, R^{-1}\, e^{i(\alpha X+\beta Y)}\, R \qquad (2.4.298)$$

e, per ipotesi, esso lascia invariante il quadrivettore $\hat{k}$, come del resto è immediato provare direttamente dalle (2.4.292), (2.4.294) e (2.4.295).
Nella (2.4.285), però, $\mathcal{P}(\Lambda, \vec{k})$ agisce sulla polarizzazione e non su $\hat{k}$!
Quale ne è l'effetto ?
La novità rispetto al caso massivo, come vedremo fra breve, è che lo spazio vettoriale costruito con le polarizzazioni $\epsilon(\pm, \hat{k})$ non è stabile sotto le trasformazioni $\mathcal{P}(\alpha, \beta, \phi)$ del piccolo gruppo di $\hat{k}^\mu$.
A questo proposito, iniziamo osservando che dalla (2.4.292) ricaviamo, in generale, il seguente risultato

$$e^{i\alpha X}\,\epsilon^\mu(\pm, \hat{k}) = \epsilon^\mu(\pm, \hat{k}) + \frac{i\alpha}{\sqrt{2}}\,(1,0,0,1) = \epsilon^\mu(\pm, \hat{k}) + \frac{i\alpha}{\sqrt{2}\hat{k}}\,\hat{k}^\mu \tag{2.4.303}$$

e così pure, dalla (2.4.294), otteniamo che

$$e^{i\beta Y}\,\epsilon^\mu(\pm, \hat{k}) = \epsilon^\mu(\pm, \hat{k}) \mp \frac{\beta}{\sqrt{2}\hat{k}}\,\hat{k}^\mu \tag{2.4.304}$$

per cui, ponendo

$$\frac{\alpha + i\beta}{\sqrt{2}\hat{k}} \equiv \rho\, e^{i\xi} \tag{2.4.305}$$

si ha

$$\begin{aligned} e^{i(\alpha X + \beta Y)}\,\epsilon^\mu(\pm, \hat{k}) &= \epsilon^\mu(\pm, \hat{k}) + i\frac{\alpha \pm i\beta}{\sqrt{2}\hat{k}}\,\hat{k}^\mu = \\ &= \epsilon^\mu(\pm, \hat{k}) + i\,\rho\, e^{\pm i\xi}\,\hat{k}^\mu \end{aligned} \tag{2.4.306}$$

mentre, evidentemente, risulta[52]

$$e^{i\phi J_3}\,\epsilon^\mu(\pm, \hat{k}) = e^{\pm i\phi}\,\epsilon^\mu(\pm, \hat{k}) \tag{2.4.309}$$

---

ma

$$R^{-1}\,e^{i(\alpha X + \beta Y)}\,R = e^{iR^{-1}(\alpha X + \beta Y)R} \tag{2.4.299}$$

mentre

$$\begin{aligned} R^{-1}(\alpha X + \beta Y)R &= \alpha(X\,\cos\phi + Y\,\sin\phi) + \beta(Y\,\cos\phi - X\,\sin\phi) = \\ = X(\alpha\,\cos\phi - \beta\,\sin\phi) &+ Y(\beta\,\cos\phi + \alpha\,\sin\phi) \equiv \alpha_R\,X + \beta_R\,Y \end{aligned} \tag{2.4.300}$$

per cui possiamo concludere infine che vale comunque l'identità

$$e^{i(\alpha X + \beta Y)}\,R = R\,e^{i(\alpha_R X + \beta_R Y)} \tag{2.4.301}$$

[52]La (2.4.306) e la (2.4.309) definiscono in ciascuno degli spazi lineari bidimensionali $\left\{\epsilon(+, \hat{k}), \hat{k}\right\}$ e $\left\{\epsilon(-, \hat{k}), \hat{k}\right\}$ una rappresentazione fedele del piccolo gruppo di $\hat{k}$.
E' del tutto evidente che entrambe le rappresentazioni sono irriducibili e quanto ai

per cui si ha

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{P}(\alpha,\beta,\phi)\,\epsilon(\pm,\hat{k})\right)^\mu \quad &\equiv \quad \left(e^{i(\alpha X+\beta Y)}\,e^{i\phi J_3}\,\epsilon(\pm,\hat{k})\right)^\mu = \\ = e^{\pm i\phi}\left(e^{i(\alpha X+\beta Y)}\,\epsilon(\pm,\hat{k})\right)^\mu &= e^{\pm i\phi}\left[\epsilon^\mu(\pm,\hat{k}) + i\rho\,e^{\pm i\xi}\,\hat{k}^\mu\right] \qquad (2.4.310)\end{aligned}$$

Se poniamo allora

$$L^{-1}(\vec{\Lambda k})\,\Lambda\,L(\vec{k}) \equiv \mathcal{P}(\Lambda,\vec{k}) \equiv \mathcal{P}(\alpha,\beta,\phi) \qquad (2.4.311)$$

dove α, β, ϕ saranno, evidentemente, funzioni opportune di Λ e k^μ, ecco che potremo concludere che

$$\begin{aligned}\Lambda\,\epsilon(\lambda,\vec{k}) \quad &= \quad L(\vec{\Lambda k})\,\mathcal{P}(\alpha,\beta,\phi)\,\epsilon(\lambda,\hat{k}) = \\ &= \quad e^{i\lambda\phi}\left[\epsilon(\lambda,\vec{\Lambda k}) + i\,\rho\,e^{i\lambda\xi}(\Lambda k)\right] \qquad (2.4.312)\end{aligned}$$

Come si vede, dunque, sotto l'azione di una trasformazione del gruppo di Lorentz, le polarizzazioni che, in un sistema di riferimento dato abbiamo definito nella gauge di Coulomb, acquistano, in generale, un termine proporzionale a k^μ, essendo ρ e ξ funzioni opportune di Λ e $\vec{k}$.
Questo fatto è ineliminabile dal punto di vista algebrico ma, come vedremo fra breve, è senza conseguenze osservabili, data proprio l'arbitrarietà di gauge ristretta che abbiamo quanto al campo A^μ.
Ma procediamo con ordine.
Definiamo la legge di trasformazione degli operatori di creazione e distruzione associati al campo elettromagnetico, sotto l'azione della rappresentazione unitaria[53] del gruppo di Poincaré $U(a,\Lambda)$ definita nello spazio di Hilbert dei

---

generatori X, Y, J_3, posto per comodità di notazione $\eta \equiv \frac{1}{\sqrt{2}k}$, risulta:

$$\left\{\epsilon(+,\hat{k}),\hat{k}\right\} \quad : \quad X = \eta\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix};\ Y = i\,\eta\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix};\ J_3 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \qquad (2.4.307)$$

$$\left\{\epsilon(-,\hat{k}),\hat{k}\right\} \quad : \quad X = \eta\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix};\ Y = -i\,\eta\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix};\ J_3 = -\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \qquad (2.4.308)$$

per cui le due rappresentazioni sono palesemente entrambe non unitarie.

[53] Anche nel caso di massa nulla, il piccolo gruppo è non abeliano, come nel caso massivo. La novità è che adesso esso è anche non-compatto e dunque non possiede rappresentazioni unitarie fedeli (isomorfismi) di dimensioni finita.
Le uniche rappresentazioni unitarie di dimensione finita che esistono mandano il sottogruppo generato da X e Y nell'identità e quindi sono rappresentazioni del sottogruppo (compatto) $U(1)$ generato da J_3, e dunque, se irriducibili, sono unidimensionali.
Quanto ai quadrivettori di polarizzazione $\epsilon(\pm)$, gli elementi del piccolo gruppo agiscono su di essi mescolando ciascuno di loro con k^μ, per cui la rappresentazione del piccolo gruppo così indotta è definita necessariamente in uno spazio bidimensionale fatto da $\epsilon(+)$ o $\epsilon(-)$, ciascuno insieme a k.
Questa, in ultima analisi, è la ragione della impossibilità di mantenersi nella gauge di Coulomb.

vettori di stato, in modo tale per cui

$$U(a,\Lambda)\, a(\lambda,\vec{k})\, U^{-1}(a,\Lambda) = e^{-ia\cdot\Lambda k} a(\lambda,\vec{\Lambda k})\, e^{-i\lambda\phi} \tag{2.4.313}$$

$$U(a,\Lambda)\, a^{\dagger}(\lambda,\vec{k})\, U^{-1}(a,\Lambda) = e^{ia\cdot\Lambda k} a^{\dagger}(\lambda,\vec{\Lambda k})\, e^{i\lambda\phi} \tag{2.4.314}$$

dove ϕ è la fase definita dalla trasformazione

$$\mathcal{P}(\alpha,\beta,\phi) \equiv \mathcal{P}(\Lambda,\vec{k}) = L^{-1}(\vec{\Lambda k})\,\Lambda\, L(\vec{k}) \equiv e^{i(\alpha X+\beta Y)}\, e^{i\phi J_3} \tag{2.4.315}$$

Abbiamo allora che, posto per semplicità di notazione $U \equiv U(a,\Lambda)$, da quanto sopra risulta che

$$\begin{aligned} U\, A^{\mu}(x)\, U^{-1} &= \sum_{\lambda=\pm1}\int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\left[U\, a(\lambda,\vec{p})\, U^{-1}\, \epsilon^{\mu}(\lambda,\vec{p})\, e^{-ipx} + h.c.\right] = \\ &= \sum_{\lambda=\pm1}\int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\left[a(\lambda,\vec{\Lambda p})\, e^{-ia\cdot\Lambda p}\, e^{-i\lambda\phi}\, \epsilon^{\mu}(\lambda,\vec{p})\, e^{-ipx} + h.c.\right] = \\ &= \sum_{\lambda=\pm1}\int \frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3}\left[a(\lambda,\vec{q})\, e^{-iaq}\, e^{-i\lambda\phi}\, \epsilon^{\mu}(\lambda,\vec{p})\, e^{-iq\cdot\Lambda x} + h.c.\right] \end{aligned} \tag{2.4.316}$$

dove, al solito, si è posto $q = \Lambda p$.
Riprendendo ora la (2.4.312)

$$\Lambda\, \epsilon(\lambda,\vec{k}) = e^{i\lambda\phi}\left(\epsilon(\lambda,\vec{\Lambda k}) + i\rho\, e^{i\lambda\xi}\cdot(\Lambda k)\right) \tag{2.4.317}$$

e moltiplicando per $e^{-i\lambda\phi}\,\Lambda^{-1}$ ambo i membri dell'equazione, si ha

$$e^{-i\lambda\phi}\, \epsilon(\lambda,\vec{p}) = \Lambda^{-1}\epsilon(\lambda,\vec{\Lambda p}) + i\rho\, e^{i\lambda\xi}\cdot p \tag{2.4.318}$$

Sostituendo allora nella (2.4.316), otteniamo

$$\begin{aligned} U\, A^{\mu}(x)\, U^{-1} &= \sum_{\lambda=\pm1}\int \frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3}\left[a(\lambda,\vec{q})\, e^{-iaq}\, e^{-i\lambda\phi}\, \epsilon^{\mu}(\lambda,\vec{p})\, e^{-iq\cdot\Lambda x} + h.c.\right] = \\ = &\sum_{\lambda=\pm1}\int \frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3}\left[a(\lambda,\vec{q})\, e^{-iaq}\, e^{-iq\cdot\Lambda x}\left((\Lambda^{-1})^{\mu}_{.\nu}\epsilon^{\nu}(\lambda,\vec{q}) + i\rho e^{i\lambda\xi}(\Lambda^{-1}q)^{\mu}\right) + h.c.\right] = \\ = &(\Lambda^{-1})^{\mu}_{.\nu}\sum_{\lambda=\pm1}\int \frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3}\left[a(\lambda,\vec{q})\, e^{-iaq}\, e^{-iq\cdot\Lambda x}\epsilon^{\nu}(\lambda,\vec{q}) + h.c.\right] + \\ + &\sum_{\lambda=\pm1}\int \frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3}\left[a(\lambda,\vec{q})\, e^{-iaq}\, e^{-ip\cdot x}\rho e^{i\lambda\xi}\, i\, p^{\mu} + h.c.\right] \end{aligned}$$

Evidentemente, quanto al primo addendo nell'espressione precedente, risulta

$$\begin{aligned} &(\Lambda^{-1})^{\mu}_{.\nu}\sum_{\lambda=\pm1}\int \frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3}\left[a(\lambda,\vec{q})\, e^{-iaq}\, e^{-iq\cdot\Lambda x}\epsilon^{\nu}(\lambda,\vec{q}) + h.c.\right] \equiv \\ &(\Lambda^{-1})^{\mu}_{.\nu}\, A^{\nu}(a+\Lambda x) \end{aligned} \tag{2.4.319}$$

mentre, circa il secondo, esso può essere evidentemente espresso come

$$(\Lambda^{-1})^{\mu}_{.\nu} \sum_{\lambda=\pm 1} \int \frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3} \left[a(\lambda,\vec{q})\, e^{-iaq}\, e^{-iq\cdot\Lambda x} \rho e^{i\lambda\xi}\, i\, q^{\mu} + h.c. \right] \qquad (2.4.320)$$

Definiamo ora la funzione seguente

$$\Phi(x) \quad \equiv \quad \sum_{\lambda=\pm 1} \int \frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3} \left[a(\vec{q},\lambda)\, e^{-iqx}\ \rho\, e^{i\lambda\xi} + h.c. \right] \quad (2.4.321)$$

dove ρ e ξ sono funzioni opportune di Λ e $\vec{q}$.
Dalla definizione è immediato che il campo Φ soddisfa l'equazione di Klein-Gordon a massa nulla e che la quantità (2.4.320) può essere espressa come

$$\begin{aligned} & (\Lambda^{-1})^{\mu}_{.\nu} \sum_{\lambda=\pm 1} \int \frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3} \left[a(\lambda,\vec{q})\, e^{-iq(a+\Lambda x)} \rho e^{i\lambda\xi}\, i\, q^{\mu} + h.c. \right] = \\ = \quad & -(\Lambda^{-1})^{\mu}_{.\nu} \frac{\partial}{\partial(\Lambda x)_{\nu}} \Phi(a+\Lambda x) \qquad (2.4.322) \end{aligned}$$

per cui abbiamo alla fine che

$$U(a,\Lambda)\, A^{\mu}(x)\, U^{-1}(a,\Lambda) = (\Lambda^{-1})^{\mu}_{.\nu} \left(A^{\nu}(a+\Lambda x) - \frac{\partial}{\partial(\Lambda x)_{\nu}} \Phi(a+\Lambda x) \right) \quad (2.4.323)$$

E' solo in questo senso[54], cioè a meno di una trasformazione di gauge (a sua volta intimamente legata alle rappresentazioni del piccolo gruppo di $\hat{k}$ negli spazi $\left\{ \epsilon(\pm,\hat{k}), \hat{k} \right\}$), che possiamo concludere che il campo elettromagnetico, definito attraverso la decomposizione spettrale (2.4.267) e le polarizzazioni (2.4.278), si trasforma come un campo quadrivettoriale, cioè che risulta

$$U(a,\Lambda) A^{\mu}(x)\, U^{-1}(a,\Lambda) = (\Lambda^{-1})^{\mu}_{.\nu}\, A^{\nu}(a+\Lambda x) \qquad (2.4.324)$$

[54] Precisiamo che la conclusione (2.4.323) è quella algebricamente corretta, ma proprio perché il termine aggiuntivo è un termine di gauge, la sua omissione non produce conseguenze osservabili.

Venendo infine all'azione delle simmetrie discrete C, P e T, usando gli stati di polarizzazione circolare, come riportato in Appendice (cfr.(B.6.255), (B.6.256), (B.6.270), (B.6.271), (B.6.276) e (B.6.281)), risulta che

$$C\,a(\lambda,\vec{k})\,C^{-1} = -a(\lambda,\vec{k}) \qquad \longleftrightarrow \quad C\,a^\dagger(\lambda,\vec{k})\,C^{-1} = -a^\dagger(\lambda,\vec{k}) \tag{2.4.325}$$
$$C\,A_\mu(x)\,C^{-1} = -A_\mu(x) \tag{2.4.326}$$

$$P\,a(\lambda,\vec{k})\,P^{-1} = -a(-\lambda,-\vec{k}) \quad \longleftrightarrow P\,a^\dagger(\lambda,\vec{k})\,P^{-1} = -a^\dagger(-\lambda,-\vec{k}) \tag{2.4.327}$$
$$P\,A^\mu(x)\,P^{-1} = A_\mu(Px) \tag{2.4.328}$$

$$T\,a(\lambda,\vec{k})\,T^{-1} = a(\lambda,-\vec{k}) \qquad \longleftrightarrow \quad T\,a^\dagger(\lambda,\vec{k})\,T^{-1} = a^\dagger(\lambda,-\vec{k}) \tag{2.4.329}$$
$$T\,A^\mu(x)\,T^{-1} = A_\mu(Tx) \tag{2.4.330}$$

Osserviamo in particolare che, nel momento in cui richiediamo che sia

$$C\,a(\lambda,\vec{p})\,C^{-1} = -a(\lambda,\vec{p}); \qquad C\,a^\dagger(\lambda,\vec{p})\,C^{-1} = -a^\dagger(\lambda,\vec{p}) \tag{2.4.331}$$

stiamo dicendo che fotone e antifotone sono la stessa particella, cosa del resto ovvia visto che il campo è autoaggiunto ...
Come si vede, però, il fatto che particella e antiparticella in questo caso coincidano, non implica che C non abbia alcun effetto sullo stato di fotone, infatti dalla (2.4.331) segue immediatamente che

$$C\,|\,\vec{k},s>= -\,|\,\vec{k},s> \tag{2.4.332}$$

ovvero che su uno stato di n fotoni, risulta

$$C\,|\,n\ \ fotoni>= (-1)^n\,|\,n\ \ fotoni> \tag{2.4.333}$$

e poiché l'elettrodinamica (QED) è invariante sotto C, da questo segue in particolare che non possono esistere elementi di matrice, dovuti all'interazione elettromagnetica, fra stati iniziali C-dispari e stati finali fatti solo da un numero di fotoni pari, oppure fra stati iniziali C-pari e stati finali fatti solo da un numero di fotoni dispari: è il teorema di Furry[55].

[55] W.H. Furry: *A symmetry theorem in the positron theory*, Phys. Rev. 51, 125 (1937)

2.5 Il campo di Dirac libero

L'evoluzione del campo di Dirac[56] libero è retta dalla lagrangiana[57]

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi \tag{2.5.352}$$

[56]Le matrici γ^μ sono matrici 4×4 che anticommutano fra di loro, risultando (si tratta della loro definizione costitutiva !)

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\,\delta^{\mu\nu} \tag{2.5.334}$$

Per quanto riguarda la loro forma esplicita, salvo diverso avviso, useremo la rappresentazione di Dirac-Pauli, cioè

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \tag{2.5.335}$$

essendo $\vec{\sigma} \equiv (\sigma_i)$ le usuali matrici di Pauli così definite

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.5.336}$$

Le γ^μ sono quindi tutte reali, eccetto la γ^2 che è immaginaria pura.
Accanto alle matrici γ^μ, si definisce altresì la matrice reale γ_5 nel modo seguente

$$\gamma_5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad (\gamma_5)^2 = I \tag{2.5.337}$$

Essa anticommuta con tutte le γ^μ.
La matrice γ^0 (come pure la γ_5 ...) è hermitiana, mentre le γ^i sono antihermitiane (essendo le matrici di Pauli, invece, ovviamente hermitiane...).
Da questo e dalla (2.5.334) segue immediatamente che

$$\gamma^0\,(\gamma^\mu)^\dagger\,\gamma^0 = \gamma^\mu \tag{2.5.338}$$

Venendo adesso all'azione del gruppo di Poincaré sul campo di Dirac, se (a,Λ) è il generico elemento del gruppo, tale che

$$(a,\Lambda): \qquad x \to x' = a + \Lambda x \tag{2.5.339}$$

in termini delle trasformazioni unitarie $U(a,\Lambda)$ che costituiscono la rappresentazione del gruppo di Poincaré definita sullo spazio degli stati del sistema, risulta

$$U(a,\Lambda)\,\psi(x)\,U^{-1}(a,\Lambda) \;=\; S^{-1}(\Lambda)\,\psi(\Lambda x + a) \tag{2.5.340}$$

ovvero, equivalentemente, che

$$U^{-1}(a,\Lambda)\,\psi(x)\,U(a,\Lambda) = \psi'(x) = S(\Lambda)\,\psi(\Lambda^{-1}(x-a)) \tag{2.5.341}$$

La rappresentazione $S(\Lambda)$ del gruppo di Lorentz (ortocrono proprio) è la rappresentazione *spinoriale* ed è definita nel modo seguente

$$S(\Lambda) = e^{\frac{i}{4}\,\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}} \quad con \quad \sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2i}\,[\gamma^\mu,\,\gamma^\nu] \tag{2.5.342}$$

Sotto questa rappresentazione, le γ^μ si trasformano come un quadrivettore, ovvero risulta che

$$S^{-1}(\Lambda)\,\gamma^\mu\,S(\Lambda) = \Lambda^\mu_{\cdot\,\nu}\,\gamma^\nu \tag{2.5.343}$$

Dalla definizione (2.5.342) della rappresentazione $S(\Lambda)$ discende direttamente che

- siccome $(\sigma^{\mu\nu})^\dagger = -\frac{1}{2i}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)^\dagger = \frac{1}{2i}[\gamma^{\mu\dagger}, \gamma^{\nu\dagger}]$ e $\gamma^0\gamma^{\mu\dagger}\gamma^0 = \gamma^\mu$, si ha

$$\gamma^0\, S(\Lambda)^\dagger\, \gamma^0 = S(\Lambda^{-1}) = S^{-1}(\Lambda) \tag{2.5.344}$$

  per cui la rappresentazione $S(\Lambda)$ non è unitaria (né potrebbe esserlo trattandosi di una rappresentazione non banale di dimensione finita di un gruppo non compatto).
  Dalla (2.5.344) segue in particolare che, prendendo l'hermitiana coniugata della (2.5.340) e ricordando che $(\gamma^0)^2 = I$, quanto al campo $\bar\psi$, risulta

$$\begin{aligned} & U(a,\Lambda)\,\psi^\dagger(x)\,U^{-1}(a,\Lambda) = \psi^\dagger(\Lambda x + a)\,S^\dagger(\Lambda^{-1}) \Rightarrow \\ \Rightarrow\quad & U(a,\Lambda)\,\psi^\dagger(x)\,U^{-1}(a,\Lambda)\gamma^0 = \psi^\dagger(\Lambda x + a)\,\gamma^0\gamma^0 S^\dagger(\Lambda^{-1})\gamma^0 \Rightarrow \\ \Rightarrow\quad & U(a,\Lambda)\,\bar\psi(x)\,U^{-1}(a,\Lambda) = \bar\psi(\Lambda x + a)\,S(\Lambda) \end{aligned} \tag{2.5.345}$$

- la generica rotazione $R(\vec\theta) = e^{i\theta\,\vec n\cdot\vec J}$, definita dal vettore di rotazione $\vec\theta \equiv \theta\,\vec n$, viene rappresentata da

$$S(\vec\theta) = e^{\frac{i}{2}\,\vec\theta\cdot\vec\Sigma} = cos(\theta/2)\,I + i(\vec n\cdot\vec\Sigma)\,sin(\theta/2) \tag{2.5.346}$$

  dove si è posto

$$\vec\Sigma \equiv \begin{pmatrix} \vec\sigma & 0 \\ 0 & \vec\sigma \end{pmatrix} \tag{2.5.347}$$

- il generico boost $\mathcal{B}(\vec v) = e^{i\eta\,\vec n\cdot\vec K}$, definito dalla velocità $v\,\vec n$, risulta rappresentato da

$$S(\vec v) = e^{-\frac{1}{2}\,\eta\,\vec n\cdot\vec\alpha} = ch(\eta/2)\,I - (\vec n\cdot\vec\alpha)\,sh(\eta/2) \tag{2.5.348}$$

  dove abbiamo definito la rapidità al solito modo, i.e. $\eta \equiv th^{-1}(v)$ e si è posto

$$\vec\alpha \equiv \begin{pmatrix} 0 & \vec\sigma \\ \vec\sigma & 0 \end{pmatrix} \tag{2.5.349}$$

- siccome la matrice γ_5 anticommuta con tutte del γ^μ, essa commuta con $\sigma^{\mu\nu}$ ed è quindi scalare sotto $S(\Lambda)$, ovvero risulta

$$S^{-1}(\Lambda)\,\gamma_5\,S(\Lambda) = \gamma_5 \quad\Leftrightarrow\quad [S(\Lambda),\,\gamma_5] = 0$$

  Si osservi che, poiché γ_5 non è multipla dell'identità, questo implica che $S(\Lambda)$ *non* è una rappresentazione irriducibile del gruppo di Lorentz !

[57]Al posto della lagrangiana (2.5.352) viene talvolta usata la forma hermitiana seguente

$$\mathcal{L} \;=\; \frac{i}{2}[\overline{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu\psi) \;-\; (\partial_\mu\overline{\psi})\gamma^\mu\psi] \;-\; m\,\overline{\psi}\psi \tag{2.5.350}$$

E' immediato dimostrare che le due lagrangiane conducono alle stesse equazioni di moto, visto che la loro differenza è una quadridivergenza

$$\Delta\mathcal{L} \;=\; \frac{i}{2}[\overline{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu\psi) \;+\; (\partial_\mu\overline{\psi})\gamma^\mu\psi] = \frac{i}{2}\partial_\mu[\bar\psi\gamma^\mu\psi] \tag{2.5.351}$$

la quale, date le equazioni del moto, è anche identicamente nulla sulle soluzioni.

da cui si ricava appunto l'equazione[58] di Dirac per ψ e per $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0$, così espressa

$$(i\,\gamma^\mu \partial_\mu \,-\, m)\,\psi \;=\; 0; \qquad i\,\partial_\mu\,\overline{\psi}\,\gamma^\mu \,+\, m\,\overline{\psi} \;=\; 0 \qquad (2.5.353)$$

In prima quantizzazione, posto $E_p \equiv \sqrt{p^2+m^2}$, le soluzioni piane dell'equazione di Dirac hanno la forma

$$u(\vec{p})\,e^{-ip\cdot x}; \qquad v(\vec{p})\,e^{ip\cdot x} \qquad (2.5.354)$$

con gli spinori $u(\vec{p})$ e $v(\vec{p})$ che soddisfano, rispettivamente, alle seguenti equazioni[59]

$$(\not{p} - m)u(\vec{p}) \;=\; 0 \qquad (2.5.355)$$
$$(\not{p} + m)v(\vec{p}) \;=\; 0 \qquad (2.5.356)$$

dove $p \equiv (E_p\,,\vec{p})$ e abbiamo definito[60] $\not{p} \equiv p_\mu \gamma^\mu$.

Per quanto riguarda, poi, gli spinori $\bar{u}$ e $\bar{v}$, essi soddisfano le stesse equazioni degli spinori u e v, con la sola differenza che adesso l'operatore agisce

[58] Osserviamo che, moltiplicando, per esempio, l'equazione di Dirac relativa alla ψ, a sinistra, per l'operatore $i\,\partial_\mu\,\gamma^\mu \,+\, m$ otteniamo

$$(i^2\,\gamma^\mu\gamma^\nu\partial_\mu\partial_\nu - m^2)\psi = 0$$

La condizione $\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\} = 2\,\delta^{\mu\nu}$ è *costitutiva* della definzione delle γ proprio perché essa assicura che la ψ (come pure la $\overline{\psi}$ ...) descrive una particella libera di massa m, ovvero soddisfa l'equazione di Klein-Gordon

$$(\Box + m^2)\psi = 0$$

Si osservi che questa equazione di $K-G$, comunque, avrebbe quattro soluzioni a energia positiva e quattro a energia negativa, cioè il doppio di quelle dell'equazione di Dirac !
La cosa non deve stupire visto che è stata ottenuta "iterando" in un certo senso l'equazione di Dirac di partenza, passando da un'equazione alle derivate prime a una alle derivate seconde ...

[59] Le equazioni (2.5.355) e (2.5.356) sono le equazioni algebriche in cui prende forma l'equazione di Dirac quando si vada in rappresentazione dell'impulso.

[60] Ricordiamo alcune proprietà algebriche degli operatori che stiamo trattando. Risulta

$$\begin{aligned}(\not{p}\pm m)(\not{p}\pm m) &= (m\pm \not{p})(m\pm \not{p}) = \\ &= (p_\mu\gamma^\mu \pm m)(p_\nu\gamma^\nu \pm m) = p_\mu p_\nu\,\gamma^\mu\gamma^\nu \pm 2m\,\not{p} + m^2 \\ &= \frac{1}{2}p_\mu p_\nu\,\{\gamma^\mu\gamma^\nu\} \pm 2m\,\not{p} + m^2 = p^2 \pm 2m\,\not{p} + m^2 = \\ &= 2m^2 \pm 2m\,\not{p} = 2m(m\pm \not{p}) \qquad (2.5.357)\end{aligned}$$

mentre è

$$(\not{p}\pm m)(\not{p}\mp m) \;=\; p_\mu p_\nu\,\gamma^\mu\gamma^\nu - m^2 = 0 \qquad (2.5.358)$$

sullo spinore a destra, invece che a sinistra per cui risulta[61]

$$\bar{u}(\vec{p})(\not{p} - m) = 0 \tag{2.5.363}$$
$$\bar{v}(\vec{p})(\not{p} + m) = 0 \tag{2.5.364}$$

Gli spinori $u(\vec{p})$ individuano soluzioni a energia positiva, infatti

$$i\frac{\partial}{\partial t}\left[u(\vec{p})\, e^{-i\,p\cdot x}\right] = E_p\, u(\vec{p})\, e^{-i\,p\cdot x} \tag{2.5.365}$$

a differenza degli spinori $v(\vec{p})$ che, invece, per la stessa ragione, individuano soluzioni a energia negativa: per entrambi i tipi di soluzione, poi, esistono due componenti indipendenti dei relativi spinori, i quali, da ora in poi, saranno quindi individuati anche con un indice r opportuno, ovvero

$$u(\vec{p}) \to u^{(r)}(\vec{p}); \qquad v(\vec{p}) \to v^{(r)}(\vec{p}) \qquad r = 1, 2$$

La definizione esplicita degli spinori u e v che noi adotteremo è la seguente[62]

$$u^{(r)}(\vec{p}) \equiv \frac{m + \not{p}}{\sqrt{m + E_p}}\, u_0^{(r)} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{u}^{(r)}(\vec{p}) = \bar{u}_0^{(r)}\, \frac{m + \not{p}}{\sqrt{m + E_p}} \tag{2.5.366}$$
$$v^{(r)}(\vec{p}) \equiv \frac{m - \not{p}}{\sqrt{m + E_p}}\, v_0^{(r)} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{v}^{(r)}(\vec{p}) = \bar{v}_0^{(r)}\, \frac{m - \not{p}}{\sqrt{m + E_p}} \tag{2.5.367}$$

---

[61] Dimostriamo, per esempio, la (2.5.363). Prendiamo dunque l'hermitiana coniugata della (2.5.355) e moltiplichiamola a destra per γ^0.
Evidentemente si ha

$$[(\not{p} - m)u(\vec{p})]^+\,\gamma^0 = 0 \tag{2.5.359}$$

ovvero

$$0 = u(\vec{p})^+(\not{p} - m)^+\gamma^0 = u(\vec{p})^+\gamma^0\gamma^0\,(\not{p} - m)^+\gamma^0 = \bar{u}(\vec{p})\,\gamma^0(\not{p} - m)^+\,\gamma^0 \tag{2.5.360}$$

e siccome le γ^i sono antiermitiane e anticommutano con γ^0, che, invece, è hermitiana e il suo quadrato è pari all'identità, abbiamo

$$\gamma^0(\not{p} - m)^+\,\gamma^0 = (\not{p} - m) \tag{2.5.361}$$

per cui risulta infine che l'equazione per $\bar{u}$ assume la forma seguente

$$[(\not{p} - m)u(\vec{p})]^+\,\gamma^0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{u}(\vec{p})\,(\not{p} - m) = 0 \tag{2.5.362}$$

[62] Data la relazione (2.5.358), è evidente che gli spinori u e v definiti rispettivamente dalle (2.5.366) e (2.5.367) soddisfano le equazioni (2.5.355), (2.5.356), cioè l'equazione di Dirac. In più, occorre osservare che le definizioni in questione servono a fissare la normalizzazione delle soluzioni.

dove abbiamo posto[63]

$$u_0^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad u_0^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad v_0^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \quad v_0^{(2)} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.5.368}$$

per cui, definendo per comodità

$$w^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad w^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.5.369}$$

si ha[64]

$$u^{(r)}(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{m+E_p}} \begin{pmatrix} (m+E_p)\, w^{(r)} \\ (\vec{p}\cdot\vec{\sigma})\, w^{(r)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{E_p+m}\ w^{(r)} \\ \sqrt{E_p-m}\,(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})\ w^{(r)} \end{pmatrix} \tag{2.5.371}$$

dove si è usato il fatto che $\vec{p} = \sqrt{E_p^2 - m^2}\ \vec{n}$.
Per quanto riguarda, poi, gli spinori $v^{(r)}$, ponendo adesso, in analogia con la (2.5.369)

$$\tilde{w}^{(1)} = w^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \tilde{w}^{(2)} = -w^{(1)} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.5.372}$$

dalla loro definizione[65] risulta che

$$v^{(r)}(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{m+E_p}} \begin{pmatrix} (\vec{p}\cdot\vec{\sigma})\, \tilde{w}^{(r)} \\ (m+E_p)\, \tilde{w}^{(r)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{E_p-m}\,(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})\ \tilde{w}^{(r)} \\ \sqrt{E_p+m}\ \tilde{w}^{(r)} \end{pmatrix} \tag{2.5.374}$$

e queste due relazioni (2.5.371) e (2.5.374) mostrano chiaramente come, nel limite di bassa energia, le *piccole* e le *grandi* componenti degli spinori u e v si separino in modo opposto.

[63] Può sembrare che la scelta (2.5.368) per quanto concerne le v sia quantomeno bizzarra. La ragione è che, come vedremo è proprio lo spinore associato a $v_0^{(1)}$ che è associato all'operatore di creazione di una antiparticella con $s_z = 1/2$, mentre quello associato a $v_0^{(2)}$ si riferisce a $s_z = -1/2$.

[64] Risulta infatti che, indicando con I l'identità in due dimensioni, esplicitamente risulta

$$(m + \not{p}) = \begin{pmatrix} (m+E_p)I & -\vec{\sigma}\cdot\vec{p} \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{p} & (m-E_p)I \end{pmatrix} ; \qquad (m - \not{p}) = \begin{pmatrix} (m-E_p)I & \vec{\sigma}\cdot\vec{p} \\ -\vec{\sigma}\cdot\vec{p} & (m+E_p)I \end{pmatrix} \tag{2.5.370}$$

e usando queste espressioni, le (2.5.371) e (2.5.374) seguono immediatamente dalle definizioni (2.5.366) e (2.5.367), rispettivamente di $u^{(r)}(\vec{p})$ e $v^{(r)}(\vec{p})$.

[65] Quanto agli spinori bidimensionali $w^{(i)}$ e $\tilde{w}^{(i)}$, risulta

$$\tilde{w}^{(i)} = (i\,\sigma_2)_{ij}\, w^{(j)} \quad \Longleftrightarrow \quad w^{(i)} = (-i\,\sigma_2)_{ij}\, \tilde{w}^{(j)} \tag{2.5.373}$$

dove σ_2 è la matrice di Pauli, generatore in $SU(2)$ delle rotazioni intorno all'asse y.
La scelta è fatta in modo che la stessa rappresentazione di spin 1/2 sia rappresentata nelle basi $w^{(i)}$ e $\tilde{w}^{(j)}$ da matrici complesse coniugate.

Vediamo adesso quali sono le proprietà di trasformazione degli spinori[66] sotto la rappresentazione $S(\Lambda)$.
Iniziamo dimostrando che, se $\mathcal{B}(\vec{p})$ è il boost di Lorentz definito dalla (2.3.131), tale per cui, posto $\hat{p} \equiv (m,0,0,0)$, allora $\mathcal{B}(\vec{p})\,\hat{p} = p$, allora risulta

$$u^{(s)}(\vec{p}) = S(\mathcal{B}(\vec{p}))\,u^{(s)}(\vec{0}); \qquad v^{(s)}(\vec{p}) = S(\mathcal{B}(\vec{p}))\,v^{(s)}(\vec{0}) \tag{2.5.375}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{u}^{(s)}(\vec{p}) = \bar{u}^{(s)}(\vec{0})\,S^{-1}(\mathcal{B}(\vec{p})); \qquad \bar{v}^{(s)}(\vec{p}) = \bar{v}^{(s)}(\vec{0})\,S^{-1}(\mathcal{B}(\vec{p})) \tag{2.5.376}$$

Ricordiamo intanto che, per quanto si è già visto, per i boosts di Lorentz puri (che agiscono, cioè, senza ruotare gli assi) vale la (2.5.348).
Nel nostro caso, poiché il boost, per sua stessa definizione, avviene con velocità opposta a quella definita dall'impulso $\vec{p}$ della particella stessa, ecco che se poniamo

$$\vec{v} = \frac{\vec{p}}{E} \equiv v\,\vec{n} \quad ed \quad \eta = th^{-1}(v) \tag{2.5.377}$$

ne segue che

$$S(\mathcal{B}(\vec{p})) = ch\,\frac{\eta}{2}\,I + (\vec{n}\cdot\vec{\alpha})\,sh\,\frac{\eta}{2} \tag{2.5.378}$$

dove le matrici $\vec{\alpha}$ sono definite dalla (2.5.349). Risulta dunque

$$S(\mathcal{B}(\vec{p})) = \begin{pmatrix} ch\,\frac{\eta}{2} & sh\,\frac{\eta}{2}\,(\vec{n}\cdot\vec{\sigma}) \\ sh\,\frac{\eta}{2}\,(\vec{n}\cdot\vec{\sigma}) & ch\,\frac{\eta}{2} \end{pmatrix} \tag{2.5.379}$$

per cui, in termini dei vettori a due dimensioni $w^{(r)}$ definiti dalla (2.5.369), per quanto concerne gli spinori u, abbiamo

$$S(\mathcal{B}(\vec{p}))\,u^{(r)}(\vec{0}) = \sqrt{2m}\begin{pmatrix} ch\,\frac{\eta}{2}\;w^{(r)} \\ sh\,\frac{\eta}{2}\,(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})\,w^{(r)} \end{pmatrix} \tag{2.5.380}$$

D'altronde

$$ch\,\alpha = 2\,ch^2\frac{\alpha}{2} - 1 \;\Rightarrow\; ch^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+ch\,\alpha}{2} \;\Rightarrow\; ch\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+ch\,\alpha}{2}} \tag{2.5.381}$$

e si ha anche

$$1 - th^2\alpha = \frac{1}{ch^2\alpha} \;\Rightarrow\; ch^2\alpha = \frac{1}{1-th^2\alpha} \tag{2.5.382}$$

[66] Gli spinori u descrivono direttamente lo stato di spin della particella mentre gli spinori v descrivono, nel modo che vedremo, quelli dell'antiparticella ed entrambi giocano, in buona sostanza, lo stesso ruolo giocato, per esempio, dalla funzione di polarizzazione $\epsilon^\mu(\vec{p})$ del campo vettoriale W^μ e A^μ.

Da quest'ultima relazione, essendo, evidentemente, nel nostro caso $th\,\eta = v$, segue poi che

$$ch\,\eta = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} = \gamma \quad \Rightarrow \quad ch\frac{\eta}{2} = \sqrt{\frac{1+\gamma}{2}} = \sqrt{\frac{1+E/m}{2}} = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \tag{2.5.383}$$

Analogamente abbiamo

$$sh\frac{\eta}{2} = \sqrt{ch^2\frac{\eta}{2} - 1} = \sqrt{\frac{E+m}{2m} - 1} = \sqrt{\frac{E-m}{2m}} \tag{2.5.384}$$

per cui risulta infine che

$$S(\mathcal{B}(\vec{p}))\, u^{(r)}(\vec{0}) = \begin{pmatrix} \sqrt{E+m}\; w^{(r)} \\ \sqrt{E-m}\; (\vec{n}\cdot\vec{\sigma})\, w^{(r)} \end{pmatrix} = u^{(r)}(\vec{p}) \tag{2.5.385}$$

in accordo con la (2.5.375).
Per lo spinore v risulta analogamente che

$$S(\mathcal{B}(\vec{p}))\, v^{(r)}(\vec{0}) = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} sh\,\frac{\eta}{2}\,(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})\,\tilde{w}^{(r)} \\ ch\,\frac{\eta}{2}\;\tilde{w}^{(r)}) \end{pmatrix} = v^{(r)}(\vec{p}) \tag{2.5.386}$$

Esplicitiamo adesso, in generale, l'azione delle trasformazioni $S(\Lambda)$ sugli spinori. Iniziamo dagli spinori u: abbiamo

$$\begin{aligned} S(\Lambda)\, u^{(s)}(\vec{p}) &= S(\Lambda)\, S(\mathcal{B}(\vec{p}))\, u^{(s)}(\vec{0}) = \\ &= S(\mathcal{B}(\vec{\Lambda p}))\, S(\mathcal{B}^{-1}(\vec{\Lambda p}))\, S(\Lambda)\, S(\mathcal{B}(\vec{p}))\, u^{(s)}(\vec{0}) = \\ &= S(\mathcal{B}(\vec{\Lambda p}))\, S(\mathcal{B}^{-1}(\Lambda p)\, \Lambda\, \mathcal{B}(\vec{p}))\, u^{(s)}(\vec{0}) \end{aligned} \tag{2.5.387}$$

ma la matrice di Lorentz $\mathcal{B}^{-1}(\vec{\Lambda p})\ \Lambda\ \mathcal{B}(\vec{p}) \equiv \mathcal{R}(\Lambda,\vec{p})$ è una rotazione poiché manda evidentemente $\hat{p}$ in sé: si tratta della rotazione di Wigner (cfr. (2.3.177)) individuata da $\vec{p}$ e Λ.
Come ogni rotazione, essa sarà individuata da un opportuno vettore $\vec{\theta} \equiv \theta\,\vec{n}$, e avremo allora, per la (2.5.346), che, in termini di questo vettore, risulterà

$$S(\mathcal{R}(\Lambda,\vec{p})) = cos(\theta/2)\, I + i\, sin(\theta/2)\, (\vec{n}\cdot\vec{\Sigma}) \tag{2.5.388}$$

dove le matrici $\vec{\Sigma}$ sono definite dalla (2.5.347).
Siccome $S(\mathcal{R})$, come qualunque rotazione, è diagonale rispetto alle grandi/piccole componenti, possiamo definire in modo ovvio la matrice $R(\theta,\vec{n})$ di $SU(2)$, corrispondente alla rotazione $\mathcal{R}(\Lambda,\vec{p})$, nel modo seguente

$$R(\theta,\vec{n}) = cos(\theta/2)\, I + i\, sin(\theta/2)(\vec{n}\cdot\vec{\sigma}) \equiv R(\Lambda,\vec{p}) \tag{2.5.389}$$

e risulta allora immediato che

$$S(\mathcal{R}(\Lambda,\vec{p}))u^{(s)}(\vec{0}) = R(\Lambda,\vec{p})_{ks}\, u^{(k)}(\vec{0}) \tag{2.5.390}$$

per cui, sostituendo nella (2.5.387), si ha finalmente che

$$S(\Lambda)\, u^{(s)}(\vec{p}) \quad = \quad R(\Lambda,\vec{p})_{ks}\, u^{(k)}(\vec{\Lambda p}) \tag{2.5.391}$$

Per quanto riguarda poi lo spinore v, siccome le rotazioni sono diagonali rispetto alle piccole e grandi componenti e agiscono su di loro nello stesso modo, la conclusione sarebbe esattamente la stessa di quella tratta per lo spinore u se, nella definizione di $v^{(s)}(p)$, fosse stato scelto il vettore $w^{(s)}$ di cui alla (2.5.369), invece del vettore $\tilde{w}^{(s)}$ di cui alla (2.5.372), legati fra loro da una rotazione di 180^0 intorno all'asse y, essendo infatti

$$\tilde{w}^{(r)} = (-i\,\sigma_2)_{sr}\, w^{(s)} \quad \Longleftrightarrow \quad w^{(s)} = (i\,\sigma_2)_{rs}\, \tilde{w}^{(r)} \tag{2.5.392}$$

Si dimostra[67] allora che, in termini della stessa matrice $R(\Lambda,\vec{p})$ che compare nella (2.5.391), cioè dell'elemento $R(\Lambda,\vec{p})$ di $SU(2)$ definito dalla rotazione

---

[67] Dimostriamo direttamente la (2.5.404).
Applicando le stesse considerazioni svolte per $u^{(s)}(p)$, giungiamo evidentemente alla conclusione per cui

$$S(\Lambda)\, v^{(s)}(\vec{p}) = S(\mathcal{B}(\vec{\Lambda p}))\, S(\mathcal{R}(\Lambda,\vec{p}))\, v^{(s)}(\vec{0}) \tag{2.5.393}$$

Ma, essendo $\mathcal{R}$ una rotazione, data la sua struttura (2.5.346), potrà solo rimescolare gli spinori $v^{(k)}(\vec{0}),\ k=1,2$ fra di loro, cioè dovrà necessariamente risultare

$$S(\mathcal{R}(\Lambda,\vec{p}))\, v^{(s)}(\vec{0}) = M_{rs}\, v^{(r)}(\vec{0}) \Rightarrow S(\Lambda)\, v^{(s)}(\vec{p}) = M_{rs}\, v^{(r)}(\vec{\Lambda p}) \tag{2.5.394}$$

dove M sarà una matrice 2×2 opportuna, che adesso vogliamo determinare.
A questo scopo, osserviamo che, ponendo

$$(i\,\sigma_2)_{sa}\, v^{(s)}(\vec{0}) \equiv \hat{v}^{(a)}(\vec{0}) \tag{2.5.395}$$

data la (2.5.392), risulta che lo spinore $\hat{v}^{(a)}(\vec{0})$ è definito in termini del vettore $w^{(a)}$ esattamente come $u^{(a)}(\vec{0})$ (a parte l'inversione grandi/piccole componenti, irrilevante per le considerazioni che stiamo svolgendo vista la struttura "diagonale" di $S(\mathcal{R})$), per cui possiamo senz'altro concludere che

$$S(\mathcal{R}(\Lambda,\vec{p}))\, \hat{v}^{(a)}(\vec{0}) = R_{ba}\, \hat{v}^{(b)}(\vec{0}) \tag{2.5.396}$$

ovvero che

$$(i\,\sigma_2)_{sa}\, S(\mathcal{R}(\Lambda,\vec{p}))\, v^{(s)}(\vec{0}) \equiv S(\mathcal{R}(\Lambda,\vec{p}))\, \hat{v}^{(a)}(\vec{0}) = R_{ba}\, \hat{v}^{(b)}(\vec{0}) \equiv R_{ba}\, (i\,\sigma_2)_{tb}\, v^{(t)}(\vec{0}) \tag{2.5.397}$$

Moltiplicando allora ambo i membri dell'espressione precedente per $(-i\sigma_2)_{ak}$ e sommando sull'indice a, ricaviamo $\big((\sigma^2) = I\big)$ che

$$S(\mathcal{R}(\Lambda,\vec{p}))\, v^{(k)}(\vec{0}) = (\sigma_2\, R\, \sigma_2)_{tk}\, v^{(t)}(\vec{0}) \quad \Rightarrow \quad M = \sigma_2\, R\, \sigma_2 \tag{2.5.398}$$

D'altronde, la rotazione $R \equiv R(\Lambda,\vec{p})$ di $SU(2)$ avrà la struttura usuale di una rotazione, ovvero, se $\vec{n}$ individua l'asse di rotazione intorno a cui si procede per un angolo θ, sarà

$$R = e^{\frac{i}{2}\theta\, \vec{n}\cdot\vec{\sigma}} = I\cdot cos(\theta/2) + i(\vec{n}\cdot\vec{\sigma}) sin(\theta/2) \tag{2.5.399}$$

per cui

$$\sigma_2\, R\, \sigma_2 = I\cdot cos(\theta/2) + i[\vec{n}\cdot(\sigma_2\vec{\sigma}\sigma_2)] sin(\theta/2) \tag{2.5.400}$$

di Wigner

$$\mathcal{R}(\Lambda, \vec{p}) \equiv \mathcal{B}^{-1}(\vec{\Lambda p})\,\Lambda\,\mathcal{B}(\vec{p}) \tag{2.5.403}$$

risulta adesso

$$S(\Lambda)\, v^{(s)}(\vec{p}) \quad = \quad R^*(\Lambda, \vec{p})_{ks}\, v^{(k)}(\vec{\Lambda p}) \tag{2.5.404}$$

Quanto infine agli spinori $\bar{u}$ e $\bar{v}$, siccome vale l'identità $\gamma^0 S^\dagger(\Lambda)\gamma^0 = S^{-1}(\Lambda)$, è facile dimostrare da quanto precede che risulta

$$\bar{u}^{(s)}(\vec{p})\, S^{-1}(\Lambda) \quad = \quad R(\Lambda, p)^*_{ks}\, \bar{u}^{(k)}(\vec{\Lambda p}) \tag{2.5.405}$$
$$\bar{v}^{(s)}(\vec{p})\, S^{-1}(\Lambda) \quad = \quad R(\Lambda, p)_{ks}\, \bar{v}^{(k)}(\vec{\Lambda p}) \tag{2.5.406}$$

D'altronde è facile verificare che

$$-\sigma_i^* = \sigma_2 \sigma_i \sigma_2 \tag{2.5.401}$$

visto che σ_2 e l'unica matrice di Pauli immaginaria pura e che le altre due anticommutano con essa. Dunque

$$M = \sigma_2\, R\, \sigma_2 = e^{-\frac{i}{2}\vec{\theta}\cdot\vec{\sigma}^*} = R^* \tag{2.5.402}$$

che dimostra, appunto, la (2.5.404).

Ricordiamo a questo riguardo quanto già visto nel $Vol\, I$, che, dato un gruppo G e una sua rappresentazione matriciale $g \to M(g)$, possiamo definire in modo canonico altre tre rappresentazioni del gruppo G nello stesso insieme di matrici, nel modo seguente:

- $g \to M(g)^*$
- $g \to \left(M(g)^t\right)^{-1}$
- $g \to \left(M(g)^\dagger\right)^{-1}$

Nel caso di rappresentazioni unitarie, evidentemente $\left(M(g)^t\right)^{-1} = \left(M(g)^t\right)^\dagger = M(g)^*$ e analogamente $\left(M(g)^\dagger\right)^{-1} = M(g)$ per cui le rappresentazioni inequivalenti, in questo caso, sono al massimo solo due.
Nel caso particolare di $SU(2)$ queste due rappresentazioni sono in realtà una sola, risultando legate dalla trasformazione di verosimiglianza $U^* = \sigma_2\, U\, \sigma_2$ e dunque essendo equivalenti tra loro.

Ritornando alle proprietà degli spinori u e v, dalle definizioni (2.5.366) e (2.5.367) segue[68] inoltre che essi soddisfano le relazioni algebriche seguenti

$$\bar{u}^{(s)}(\vec{p})\, u^{(r)}(\vec{p}) = 2m\,\delta_{sr} \tag{2.5.407}$$
$$u^{\dagger(s)}(\vec{p})\, u^{(r)}(\vec{p}) = 2E_p\,\delta_{sr} \tag{2.5.408}$$
$$\bar{v}^{(s)}(\vec{p})\, v^{(r)}(\vec{p}) = -2m\,\delta_{sr} \tag{2.5.409}$$
$$v^{\dagger(s)}(\vec{p})\, v^{(r)}(\vec{p}) = 2E_p\,\delta_{sr} \tag{2.5.410}$$

dove la δ è quella di Kronecker.

Passiamo adesso a definire i proiettori $\Lambda_\pm$ sugli stati di energia positiva e negativa. Dalla definizione delle u e delle v, unitamente alle (2.5.357) e (2.5.358), risulta evidente che questi proiettori, una volta fissato il quadrim-

[68]Dalla definizione (2.5.366), usando la (2.5.357) e la (2.5.371), segue immediatamente che

$$\begin{aligned}\bar{u}^{(s)}(p)\, u^{(r)}(p) &= \bar{u}_0^{(s)} \frac{(\not p + m)\,(\not p + m)}{m+E_p}\, u_0^{(r)} = \\ &= \frac{2m}{m+E_p} \bar{u}_0^{(s)}\,(\not p + m)\, u_0^{(r)} = 2m\,\delta_{rs}\end{aligned}$$

la quale dimostra appunto la (2.5.407).
Un altro modo per arrivare alla stessa conclusione è quello di osservare che, date la (2.5.375) e la (2.5.376), $\bar{u}\,u$ è scalare per trasformazioni di Lorentz e dunque basta valutarlo nel sistema del centro di massa dove, evidentemente, esso vale proprio $2m\,\delta_{rs}$
Veniamo ora alla dimostrazione della (2.5.408). Abbiamo

$$\bar{u}^{(s)}(p)\gamma^\mu u^{(r)}(p) = \bar{u}^{(s)}(\vec{0})\, S^{-1}(\mathcal{B}(\vec{p}))\,\gamma^\mu\, S(\mathcal{B}(\vec{p}))\, u^{(r)}(\vec{0}) = (\mathcal{B}(\vec{p}))^{\mu}_{\cdot\,\nu}\, \bar{u}^{(s)}(\vec{0})\gamma^\nu u^{(r)}(\vec{0})$$

D'altronde, per come sono definiti, $\bar{u}^{(s)}(\vec{0})\gamma^\nu u^{(r)}(\vec{0}) = (2m, 0, 0, 0)\delta_{sr} = 2\hat{p}\;\delta_{rs}$ e dunque, per le proprietà di $\mathcal{B}(\vec{p})$, risulta così provata la relazione

$$\bar{u}^{(s)}(p)\gamma^\mu u^{(r)}(p) = 2p^\mu\,\delta_{sr}$$

Riguardo agli spinori di tipo v, osserviamo che è naturalmente ancora vero che

$$\bar{v}^{(s)}(p)\, v^{(r)}(p) = \bar{v}^{(s)}(\vec{0})\, v^{(r)}(\vec{0})$$

ma adesso accade che l'azione della γ^0 conduce ad un cambiamento di segno rispetto al caso degli spinori di tipo u, infatti

$$\bar{v}^{(s)}(\vec{0})\, v^{(r)}(\vec{0}) = v^{\dagger(s)}(\vec{0})\,\gamma^0\, v^{(r)}(\vec{0}) = -v^{\dagger(s)}(\vec{0})\, v^{(r)}(\vec{0}) = -2m\,\delta_{sr}$$

Questo non accade nel caso di $\bar{v}^{(s)}(p)\gamma^\mu v^{(r)}(p)$ per cui abbiamo

$$\bar{v}^{(s)}(p)\gamma^\mu v^{(r)}(p) = \bar{v}^{(s)}(\vec{0})\gamma^\mu v^{(r)}(\vec{0}) = (\mathcal{B}(\vec{p}))^{\mu}_{\cdot\,\nu}\, \bar{v}^{(s)}(\vec{0})\gamma^\nu v^{(r)}(\vec{0})$$

essendo in questo caso ancora vero che

$$\bar{v}^{(s)}(\vec{0})\gamma^\nu v^{(s)}(\vec{0}) = v^{\dagger(s)}(\vec{0})\gamma^\nu v^{(r)}(\vec{0}) = 2\delta_{sr}(m, 0, 0, 0) = 2\hat{p}\,\delta_{rs}$$

pulso p^μ, non possono che essere i seguenti

$$\Lambda_\pm \equiv \Lambda_\pm(\vec{p}) = \frac{m \pm \not{p}}{2m} \tag{2.5.411}$$

Infatti[69]

$$\begin{aligned}
\Lambda_+ + \Lambda_- &= I && (2.5.414)\\
(\Lambda_\pm)^2 &= \Lambda_\pm && (2.5.415)\\
\Lambda_+ \Lambda_- &= 0 && (2.5.416)\\
\Lambda_+ u &= u; \qquad \Lambda_+ v = 0 && (2.5.417)\\
\Lambda_- u &= 0; \qquad \Lambda_- v = v && (2.5.418)
\end{aligned}$$

ovvero essi proiettano rispettivamente sugli stati individuati dagli spinori $u(\vec{p})$ (il proiettore $\Lambda_+(\vec{p})$), che descrivono, in prima quantizzazione, stati con energia positiva e su quelli individuati dagli spinori $v(\vec{p})$ (il proiettore $\Lambda_-(\vec{p})$), che, sempre in prima quantizzazione, sono associati agli stati con energia negativa.

Un altro modo estremamente utile per rappresentare questi proiettori (teorema di Casimir) passa attraverso le definizioni seguenti[70]

$$\begin{aligned}
(\Gamma_+)_{\alpha\beta} &\equiv \sum_r u_\alpha^{(r)}(\vec{p})\bar{u}_\beta^{(r)}(\vec{p}) = \sum_r \left(u^{(r)}(\vec{p})\,\bar{u}^{(r)}(\vec{p})\right)_{\alpha\beta} && (2.5.419)\\
(\Gamma_-)_{\alpha\beta} &\equiv \sum_r v_\alpha^{(r)}(\vec{p})\bar{v}_\beta^{(r)}(\vec{p}) = \sum_r \left(v^{(r)}(\vec{p})\,\bar{v}^{(r)}(\vec{p})\right)_{\alpha\beta} && (2.5.420)
\end{aligned}$$

Iniziamo esplicitando Γ_+: dalla definizione, risulta

$$\begin{aligned}
(\Gamma_+)_{\alpha\beta} &= \frac{1}{m+E_p}\left\{\sum_r (\not{p}+m)u_0^{(r)}\bar{u}_0^{(r)}(\not{p}+m)\right\}_{\alpha\beta} = \\
&= \frac{1}{m+E_p}\left\{(\not{p}+m)\left[\sum_r u_0^{(r)}\bar{u}_0^{(r)}\right](\not{p}+m)\right\}_{\alpha\beta} && (2.5.421)
\end{aligned}$$

ma in rappresentazione di Dirac-Pauli risulta (gli u_0 sono reali ...)

$$\sum_r u_0^{(r)}\bar{u}_0^{(r)} = \frac{1+\gamma^0}{2} \equiv \sum_r u_0^{(r)} u_0^{\dagger(r)} \tag{2.5.422}$$

[69] Si osservi che, poiché per la (A.2.11) risulta che $(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$, essendo $\gamma^0\gamma^0 = 1$, ne segue che

$$(\Lambda_\pm)^\dagger = \gamma^0\,\Lambda_\pm\,\gamma^0 \tag{2.5.412}$$

e dunque, data comunque una soluzione ψ, se definiamo $\psi_\pm \equiv \Lambda_\pm\psi$, risulta che

$$\bar{\psi}_\pm \equiv (\psi_\pm)^\dagger\,\gamma^0 = \psi^\dagger\,(\Lambda_\pm)^\dagger\,\gamma^0 = \psi^\dagger\gamma^0\,\Lambda_\pm\,\gamma^0\,\gamma^0 = \bar{\psi}\Lambda_\pm \tag{2.5.413}$$

ovvero i proiettori $\Lambda_\pm$ agiscono nella stessa forma sia sulla ψ che sulla $\bar{\psi}$.

[70] La sommatoria sull'indice r è estesa, ovviamente, da 1 a 2.

dunque

$$\begin{aligned}\Gamma_+ &= \frac{1}{m+E_p}(\not p+m)\frac{1+\gamma^0}{2}(\not p+m) = \\ &= \frac{1}{m+E_p}\left[\frac{1}{2}(\not p+m)(\not p+m)+\frac{1}{2}(\not p+m)\gamma^0(\not p+m)\right] \qquad (2.5.423)\end{aligned}$$

D'altronde, tenendo conto delle proprietà di anticommutazione delle matrici gamma, risulta

$$\begin{aligned}\gamma^0(\not p+m) &= m\gamma^0+p_0\gamma^0\gamma^0+p_i\gamma^0\gamma^i = m\gamma^0+p_0\gamma^0\gamma^0-p_i\gamma^i\gamma^0 = \\ &= m\gamma^0+2p_0\gamma^0\gamma^0-\not p\gamma^0 = 2E_p+(m-\not p)\gamma^0 \qquad (2.5.424)\end{aligned}$$

quindi, usando anche la (2.5.357), si ha infine che

$$\begin{aligned}\Gamma_+ &= \frac{1}{m+E_p}\left\{m(\not p+m)+\frac{1}{2}(\not p+m)\left[2E_p+(m-\not p)\gamma^0\right]\right\} = \\ &= \frac{1}{m+E_p}\left\{m(\not p+m)+E_p(\not p+m)\right\} = \not p+m \;\Rightarrow\; \Lambda_+ = \frac{1}{2m}\Gamma_+ \qquad (2.5.425)\end{aligned}$$

Analogamente si dimostra che risulta[71] altresì che

$$\Gamma_- = \not p-m \;\Rightarrow\; \Lambda_- = \frac{-1}{2m}\Gamma_- \qquad (2.5.427)$$

Torniamo adesso alle soluzioni dell'equazione di Dirac.
Noi sappiamo che, fissato un impulso spaziale qualunque $\vec{p}$, esse sono quattro, per cui è ragionevole aspettarci che possano esistere altri operatori di proiezione i quali

- commutano con $\Lambda_\pm$;
- separano le soluzioni con $r = 1, 2$.

D'altronde, queste soluzioni, distinte dall'indice r, hanno a che fare con i due possibili stati di spin, per cui ci dobbiamo attendere che questi operatori $\Pi_\pm$ siano una sorta di generalizzazione del proiettore non relativistico dello spin che, nella direzione del generico versore $\vec{n}$, come è noto, è dato, a seconda che il verso sia quello di $\vec{n}$ oppure il suo opposto, da

$$P_\pm(\vec{n}) \equiv \frac{1\pm\vec{n}\cdot\vec{\sigma}}{2} \qquad (2.5.428)$$

[71] Si ricordi che, pur essendo anche in questo caso gli spinori v_0 reali, risulta però

$$\sum_r v_0^{(r)}\bar{v}_0^{(r)} = -\frac{1-\gamma^0}{2} \equiv -\sum_r v_0^{(r)}v_0^{\dagger(r)} \qquad (2.5.426)$$

Il primo problema da risolvere, ovviamente, riguarda il modo di descrivere la direzione $\vec{n}$ in cui effettuare la proiezione: se vogliamo rendere la definizione compatibile con la Relatività Ristretta, occorre che questa sia definita tramite un quadrivettore[72] che, nel sistema del centro di massa individui una direzione spaziale, ovvero sia della forma $(0, \vec{n})$.
Questa richiesta è praticamente già sufficiente allo scopo, infatti ci dice che il quadrivettore n^μ che stiamo cercando dovrà essere tale che

$$n^\mu\, n_\mu = -1; \qquad n^\mu\, p_\mu = 0 \tag{2.5.429}$$

Queste condizioni restringono i gradi di libertà su n^μ solo a due, e questo è appunto il numero di gradi di libertà che ci aspettiamo per n^μ, visto che una direzione nello spazio è fissata in termini di soli due angoli.
Osserviamo altresì che le condizioni (2.5.429) non possono fissare il segno del quadrivettore n, e questa ambiguità di segno corrisponde ai due versi possibili associati alla direzione data.
Proviamo, tentativamente, a definire i proiettori di spin nel modo seguente

$$\Pi_\pm \equiv \Pi_\pm(n) = \frac{1}{2}\,(1 \pm \gamma_5\ \not{n}) \tag{2.5.430}$$

dove γ_5, come si è già detto, è definita dalla (2.5.337).
Risulta[73] allora quanto segue

$$\begin{aligned} [\Pi_\pm\,, \Lambda_\pm] &= 0 && (2.5.438)\\ (\Pi_\pm)^2 &= \Pi_\pm && (2.5.439)\\ \Pi_+ + \Pi_- &= I && (2.5.440)\\ \Pi_+ \Pi_- &= 0 && (2.5.441) \end{aligned}$$

[72]Su questo aspetto particolare, dovremo tornarci sopra ...
[73]Iniziamo dimostrando la (2.5.438).
Si ha (l'arbitrarietà di segno è presente in entrambi i proiettori ...)

$$\left[\frac{1 \pm \gamma_5\,\not{n}}{2}\,,\ \frac{m \pm \not{p}}{2m}\right] = \frac{\pm 1}{4m}\,[\gamma_5\,\not{n}, \not{p}] \tag{2.5.431}$$

ma

$$[\gamma_5\,\not{n}, \not{p}] = n_\mu\, p_\nu (\gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma_5 \gamma^\mu) \tag{2.5.432}$$

e poiché γ_5 anticommuta con le γ^μ, ne segue che

$$[\gamma_5\,\not{n}, \not{p}] = n_\mu\, p_\nu \gamma_5 (\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) = n_\mu p_\nu \gamma_5 \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\,\gamma_5\, n_\mu p^\mu = 0 \tag{2.5.433}$$

che prova quindi la (2.5.438).

Gli operatori[74] $\Pi_\pm(n)$ così definiti hanno quindi le caratteristiche di proiettori che commutano con le $\Lambda_\pm(\vec{p})$.
Ma che proiezione descrivono ?
Per capirlo, vediamo che forma essi assumono nel riferimento del CM, dove conosciamo la forma che dovrebbero assumere i proiettori di spin.
Iniziamo assumendo che la particella abbia, nel riferimento del Laboratorio, un impulso spaziale $\vec{p}$ e consideriamo, per esempio, il proiettore $\Pi_+(n) \equiv \Pi_+$.
Essendo un proiettore, i suoi possibili autovalori sono $\lambda = 0$ e $\lambda = 1$ e i suoi autovettori costituiscono una base.
Consideriamo allora un generico spinore $u(\vec{p})$

$$u(\vec{p}) \equiv \alpha_s\, u^{(s)}(\vec{p}) \tag{2.5.446}$$

Passiamo adesso a dimostrare la (2.5.439). Risulta

$$\frac{1 \pm \gamma_5 \not{n}}{2} \cdot \frac{1 \pm \gamma_5 \not{n}}{2} = \frac{1 \pm 2\gamma_5 \not{n} + \gamma_5 \not{n} \gamma_5 \not{n}}{4} \tag{2.5.434}$$

ma

$$\gamma_5 \not{n} \gamma_5 \not{n} = n_\mu n_\nu \gamma_5 \gamma^\mu \gamma_5 \gamma^\nu = -n_\mu n_\nu (\gamma_5)^2 \gamma^\mu \gamma^\nu = -n_\mu n_\nu \frac{1}{2}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = -n_\mu n^\mu = 1 \tag{2.5.435}$$

per cui

$$\frac{1 \pm \gamma_5 \not{n}}{2} \cdot \frac{1 \pm \gamma_5 \not{n}}{2} = \frac{2 \pm 2\gamma_5 \not{n}}{4} = \frac{1 \pm \gamma_5 \not{n}}{2} \tag{2.5.436}$$

che prova appunto la (2.5.439).
Quanto poi alla (2.5.440), essa è evidente.
Passando quindi alla (2.5.441), essa segue dalla (2.5.435), infatti

$$\frac{1 \pm \gamma_5 \not{n}}{2} \cdot \frac{1 \mp \gamma_5 \not{n}}{2} = \frac{1 - \gamma_5 \not{n} \gamma_5 \not{n}}{4} = 0 \tag{2.5.437}$$

[74] Anche per i proiettori $\Pi_\pm$ vale la stessa conclusione già tratta per i proiettori $\Lambda_\pm$ ovvero che essi agiscono nella stessa forma sia sulle ψ che sulle $\bar{\psi}$. Infatti

$$(\Pi_\pm)^\dagger = \left(\frac{1 \pm \gamma_5 \not{n}}{2}\right)^\dagger = \left(\frac{1 \pm \not{n}^\dagger\, \gamma_5^\dagger}{2}\right) \tag{2.5.442}$$

ma, sia per il fatto che $\gamma_5^\dagger = \gamma_5$ che per il fatto che (cfr. (2.5.338)) $(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$, unitamente al fatto che γ^5 anticommuta con le γ^μ, ne segue che

$$\not{n}^\dagger\, \gamma_5^\dagger = n_\mu (\gamma^\mu)^\dagger \gamma_5 = n_\mu \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \gamma_5 = n_\mu \gamma^0 \gamma_5 \gamma^\mu \gamma^0 = \gamma^0 \gamma_5 \not{n} \gamma^0 \tag{2.5.443}$$

e dunque, essendo $\gamma^0 \gamma^0 = 1$, risulta che

$$(\Pi_\pm)^\dagger = \left(\frac{1 \pm \not{n}^\dagger\, \gamma_5^\dagger}{2}\right) = \gamma^0 \Pi_\pm \gamma^0 \tag{2.5.444}$$

per cui, assegnata comunque una soluzione ψ, se definiamo $\psi_\pm \equiv \Pi_\pm \psi$, risulta appunto che

$$\bar{\psi}_\pm \equiv (\psi_\pm)^\dagger\, \gamma^0 = \psi^\dagger\, (\Pi_\pm)^\dagger\, \gamma^0 = \psi^\dagger \gamma^0\, \Pi_\pm\, \gamma^0\, \gamma^0 = \bar{\psi} \Pi_\pm \tag{2.5.445}$$

e supponiamo che esso sia un autovettore di $\Pi_+(n)$ per l'autovalore λ, cioè

$$\Pi_+(n)\, u(\vec{p}) = \lambda\; u(\vec{p}) \tag{2.5.447}$$

Ponendo

$$u(\vec{0}) \equiv \alpha_s\, u^{(s)}(\vec{0}) \tag{2.5.448}$$

ecco che il secondo membro dell'equazione (2.5.447) può scriversi anche come

$$\begin{aligned} \lambda\, u(\vec{p}) &= \lambda \left(\alpha_s\, u^{(s)}(\vec{p})\right) = \lambda \left(\alpha_s\, S(\mathcal{B}(\vec{p}))\, u^{(s)}(\vec{0})\right) = \\ &= \lambda \cdot S(\mathcal{B}(\vec{p}))u(\vec{0}) \end{aligned} \tag{2.5.449}$$

mentre, per quanto riguarda il primo membro, abbiamo

$$\Pi_+(n)\, u(\vec{p}) \;\; = \;\; \Pi_+(n) S(\mathcal{B}(\vec{p}))u(\vec{0}) \tag{2.5.450}$$

Moltiplicando per $S^{-1}(\mathcal{B}(\vec{p}))$ abbiamo dunque che

$$\lambda \cdot u(\vec{0}) = S^{-1}(\mathcal{B}(\vec{p}))\, \Pi_+(n)\, S(\mathcal{B}(\vec{p}))u(\vec{0}) = \Pi_+ \left(\mathcal{B}^{-1}(\vec{p})n\right)\; u(\vec{0}) \tag{2.5.451}$$

dove abbiamo usato le proprietà di trasformazione delle matrici γ^μ e γ_5 sotto la rappresentazione spinoriale, le quali dicono che

$$S^{-1}(\Lambda)\gamma_5 n_\mu \gamma^\mu S(\Lambda) = n_\mu \gamma_5 S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda) = \gamma_5\, \Lambda^\mu_{\cdot\,\nu} n_\mu \gamma^\nu = \gamma_5 (\Lambda^{-1} n)_\nu \gamma^\nu \tag{2.5.452}$$

Se definiamo allora

$$n' = \mathcal{B}^{-1}(\vec{p})\, n \tag{2.5.453}$$

possiamo concludere che $\Pi_+ \left(\mathcal{B}^{-1}(\vec{p})n\right) = \Pi_+(n')$ descrive nel CM la stessa proiezione descritta nel sistema del Laboratorio dal proiettore $\Pi_+(n)$.

Poiché questo vale, naturalmente, anche nello spazio degli spinori di tipo v, così come per i proiettori Π_-, possiamo concludere che il passaggio $Lab \to CM$ si manifesta sul proiettore $\Pi_\pm(n)$ semplicemente attraverso la trasformazione $n \to n' \equiv \mathcal{B}(\vec{p})^{-1} n$, la stessa trasformazione che manda p^μ in $\hat{p}^\mu$, essendo infatti $\mathcal{B}(\vec{p})^{-1}\, p \equiv \hat{p}$.

Vediamo adesso che i proiettori $\Pi_\pm$ nel CM coincidono proprio con proiettori di spin non relativistici $P_\pm(\vec{n})$ di cui alla (2.5.428).
Infatti, nel riferimento di quiete, evidentemente, deve essere

$$n^\mu = (0, \vec{n}) \qquad con \qquad |\vec{n}|^2 = 1 \tag{2.5.454}$$

e dunque

$$\not{n} = n_i \gamma^i = -n^i \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\,\vec{n}\cdot\vec{\sigma} \\ \vec{n}\cdot\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \tag{2.5.455}$$

ovvero risulta

$$\frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5 \not{n}) = \begin{pmatrix} \frac{1 \pm \vec{n}\cdot\vec{\sigma}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1 \mp \vec{n}\cdot\vec{\sigma}}{2} \end{pmatrix} \tag{2.5.456}$$

da cui segue, in particolare, per esempio che, posto $\vec{n} = (0, 0, 1)$, risulta

$$\Pi_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \Pi_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.5.457}$$

e dunque[75] gli stati $u_0^{(1)}$ e $v_0^{(1)}$ sono proiettati in se stessi da Π_+ mentre sono annichilati da Π_- e, viceversa, gli stati $u_0^{(2)}$ e $v_0^{(2)}$ sono proiettati in se stessi da Π_- mentre sono annichilati da Π_+, coerentemente con il fatto che, sia per gli stati di particella che di antiparticella, $r = 1$ individua l'autostato della componente z dello spin con autovalore $+1/2$ e $r = 2$ quello con autovalore $-1/2$, i.e.

$$u^{(1)} \;\rightarrow\; s_z = +1/2; \qquad u^{(2)} \rightarrow s_z = -1/2 \tag{2.5.458}$$

$$v^{(1)} \;\rightarrow\; s_z = +1/2; \qquad v^{(2)} \rightarrow s_z = -1/2 \tag{2.5.459}$$

L'interesse nell'aver scritto il proiettore di spin $\Pi_\pm$ nella forma (2.5.430) sta nel fatto che, per esempio, esso è covariante per boosts di Lorentz $Lab \leftrightarrow CM$ e quindi l'effetto del proiettore può essere valutato facilmente in ogni riferimento inerziale, riportandoci, con il boost relativo, al sistema del CM dove il proiettore coincide con quello ben noto in MQ non relativistica.

Ma che succede, in generale, per quanto riguarda la forma del proiettore, nel passaggio da un riferimento inerziale a un altro che però non sia quello del CM ?
Potrebbe sembrare che, di nuovo, basti trasformare n^μ usando la trasformazione di Lorentz che connette i due riferimenti ... e questo sarebbe corretto se n^μ si trasformasse sempre come un vero quadrivettore, ma purtroppo non è così !

[75] Come mostra la (2.5.456), la forma dei proiettori di spin $\Pi_\pm$ sulle grandi e sulle piccole componenti degli spinori è "*opposta*": questa è la ragione delle scelte apparentemente anomale di $v_0^{(1)}$ e $v_0^{(2)}$, ottenuti per rotazione di 180^0 intorno all'asse y (cioè attraverso la rotazione $-i\,\sigma_y$) degli spinori a due componenti che definiscono, rispettivamente, $u_0^{(1)}$ e $u_0^{(2)}$.
L'opportunità della definizione delle $v_0^{(r)}$ sarà ancora più evidente allorché considereremo (vedi Appendice) la forma che assume la simmetria di coniugazione di carica sulle soluzioni dell'equazione di Dirac.

Supponiamo di partire dunque da un sistema di riferimento inerziale dove il quadrimpulso della particella è p^μ e il quadrivettore (continuiamo a chiamarlo ancora così ...) di spin che ci interessa è n^μ. Se effettuiamo una trasformazione di Lorentz Λ, per cui il quadrimpulso della particella diventa $p' = \Lambda p$, quale deve essere il quadrivettore n' che individua lo stesso proiettore di spin già individuato da n nel riferimento di partenza ?
Come abbiamo visto, la prescrizione è che i boosts inversi definiscano nel CM lo stesso quadrivettore, ovvero che

$$\mathcal{B}(\vec{\Lambda p})^{-1}\, n' = \mathcal{B}(\vec{p})^{-1}\, n \Leftrightarrow n' = \mathcal{B}(\vec{\Lambda p}) \cdot \mathcal{B}(\vec{p})^{-1}\, n \tag{2.5.460}$$

La trasformazione che dovevamo individuare è dunque proprio $\mathcal{B}(\vec{\Lambda p}) \cdot \mathcal{B}(\vec{p})^{-1}$. Ma come è fatta ?
Iniziamo ricordando che la rotazione di Wigner $\mathcal{R}(\Lambda, \vec{p})$ è definita come

$$\mathcal{R}(\Lambda, \vec{p}) \equiv \mathcal{B}(\vec{\Lambda p})^{-1}\, \Lambda\; \mathcal{B}(\vec{p}) \tag{2.5.461}$$

e dunque risulta

$$\mathcal{B}(\vec{\Lambda p}) = \Lambda\, \mathcal{B}(\vec{p})\, \mathcal{R}(\Lambda, \vec{p})^{-1} \tag{2.5.462}$$

per cui abbiamo che

$$\mathcal{B}(\vec{\Lambda p}) \cdot \mathcal{B}(\vec{p})^{-1} = \Lambda \cdot \left(\mathcal{B}(\vec{p}) \cdot \mathcal{R}(\Lambda, \vec{p})^{-1} \cdot \mathcal{B}(\vec{p})^{-1} \right) \tag{2.5.463}$$

la quale coincide quindi con Λ se e solo se la rotazione di Wigner che compare nella sua definizione è la rotazione identica, ovvero se Λ è esso stesso un boost che avviene nella direzione di $\vec{p}$, senza ruotare gli assi[76].

Procediamo adesso a definire una rappresentazione parametrica significativa del quadrivettore di spin n^μ.
Iniziamo dimostrando che se p^μ è il quadrimpulso di una particella di massa m e k^μ è un *qualunque* quadrivettore light-like, allora possiamo sempre trovare uno e un solo (a parte il segno) quadrivettore *di polarizzazione* n^μ della forma seguente

$$n^\mu = \alpha\, p^\mu \; + \; \beta\, k^\mu \tag{2.5.464}$$

che soddisfa, quindi, le condizioni di cui alla (2.5.429).
Cominciamo a imporre la condizione di ortogonalità con il quadrimpulso: si ha

$$np = 0 \Rightarrow \alpha\, m^2 \; + \; \beta\, (pk) = 0 \Rightarrow \beta = -\frac{\alpha\, m^2}{(pk)} \tag{2.5.465}$$

[76] Si osservi che la matrice di Lorentz $\mathcal{B}(\vec{p}) \cdot \mathcal{R}(\Lambda, \vec{p})^{-1} \cdot \mathcal{B}(\vec{p})^{-1}$ manda il quadrimpulso p in se stesso e dunque è un elemento del piccolo gruppo di p, isomorfo a quello di $\hat{p}$, cioè, per quanto abbiamo visto, al gruppo delle rotazioni.

D'altronde, dalla condizione di normalizzazione di n, si ricava che deve anche essere

$$nn = -1 \Rightarrow \alpha^2 m^2 + 2\alpha\beta\,(pk) = -1 \tag{2.5.466}$$

e sostituendo allora la (2.5.465) nella (2.5.466), si ha

$$\alpha^2 m^2 = 1 \Rightarrow \alpha = \pm\frac{1}{m} \tag{2.5.467}$$

e, di conseguenza[77]

$$\beta = \mp\frac{m}{(pk)} \tag{2.5.468}$$

Abbiamo così trovato che il problema che ci eravamo posti ha soluzione, anzi ne ha due opposte[78], che sono

$$n^\mu = \mp\,\frac{1}{m}\left(\frac{m^2}{(pk)}k^\mu - p^\mu\right) \tag{2.5.469}$$

Volendo usare questi quadrivettori per definire il proiettore di spin, il fatto di averne trovati due opposti non amplia il numero delle soluzioni indipendenti perché, evidentemente, si ha

$$\Pi_\pm(n^\mu) = \Pi_\mp(-n^\mu)$$

Dati p^μ e k^μ in un riferimento assegnato, possiamo dunque, senza perdita alcuna di generalità, limitarci a considerare i soli quadrivettori di spin n^μ di cui alla (2.5.469), corrispondenti alla sola scelta di $\alpha = -1/m$, ovvero

$$n^\mu = \frac{1}{m}\left(\frac{m^2}{(pk)}k^\mu - p^\mu\right) \tag{2.5.470}$$

anche se, come vedremo, può essere più comodo mantenere comunque entrambe le scelte possibili di α, ovvero entrambi i segni come dalla (2.5.469). Per conoscere, in generale, quale direzione di polarizzazione è individuata da questa soluzione, occorrerà riportarsi nel centro di massa senza ruotare gli assi, ovvero sarà necessario applicare a n^μ l'inversa della trasformazione di Lorentz definita dalla (2.3.131), cioè il boost $\mathcal{B}(\vec{p})^{-1}$ tale che

[77]Si noti che il prodotto scalare (pk) non può, in nessun caso, essere nullo. Esso è infatti un invariante di Lorentz e nel riferimento in cui la particella è ferma (riferimento del CM) esso vale $m\,\hat{k}^0$, dove abbiamo indicato con $(\hat{k}^0, \vec{\hat{k}})$ la forma assunta dal quadrivettore k^μ nel riferimento del CM. Si osservi altresì che k^μ oppure $\lambda\,k^\mu$ definiscono lo stesso quadrivettore di spin, qualunque sia il numero reale $\lambda \neq 0$.

[78]Il fatto di aver trovato due soluzioni opposte è già scritto nelle equazioni (2.5.429) che definiscono il quadrivettore n^μ: esse non possono distinguerne il segno, quindi se n^μ è soluzione, allora anche $-n^\mu$ lo è.
Su questo punto ritorneremo, comunque, più avanti.

$\mathcal{B}(\vec{p})^{-1}\, p = (m,0,0,0) \equiv \hat{p}$.
Come abbiamo appreso a suo tempo, la matrice $\mathcal{B}(\vec{p})^{-1}$ è così definita

$$\mathcal{B}(\vec{p})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{E}{m} & -\frac{p_x}{m} & -\frac{p_y}{m} & -\frac{p_z}{m} \\ -\frac{p_x}{m} & 1+\frac{p_x\,p_x}{m(E+m)} & \frac{p_x\,p_y}{m(E+m)} & \frac{p_x\,p_z}{m(E+m)} \\ -\frac{p_y}{m} & \frac{p_y\,p_x}{m(E+m)} & 1+\frac{p_y\,p_y}{m(E+m)} & \frac{p_y\,p_z}{m(E+m)} \\ -\frac{p_z}{m} & \frac{p_z\,p_x}{m(E+m)} & \frac{p_z\,p_y}{m(E+m)} & 1+\frac{p_z\,p_z}{m(E+m)} \end{pmatrix} \tag{2.5.471}$$

In questo modo, evidentemente

$$-\frac{1}{m}\, p^\mu \to (-1,0,0,0) \tag{2.5.472}$$

mentre, indicando con $\hat{k}^\mu$ l'espressione assunta dal quadrivettore k nel riferimento del CM definito a partire dal riferimento del Laboratorio attraverso la trasformazione $\mathcal{B}(p)^{-1}$, avremo

$$\frac{m^2}{m(pk)}\, k^\mu \to \frac{1}{\hat{k}^0}\, \hat{k}^\mu = \left(1, \frac{\vec{\hat{k}}}{\hat{k}^0}\right) \tag{2.5.473}$$

e dunque risulta che, nel CM, il quadrivettore n^μ che descrive la direzione di polarizzazione (2.5.470) diventa

$$n^\mu \to (0, \vec{\eta}), \qquad \textit{dove} \qquad \vec{\eta} \equiv \frac{\vec{\hat{k}}}{\hat{k}^0} \tag{2.5.474}$$

per cui, in conclusione, avendo scelto n^μ nella forma (2.5.470), è unicamente la parte spaziale $\vec{\eta}$ del quadrivettore k^μ vista nel sistema di riferimento del CM a definire la *direzione e il verso* nel quale viene effettuata la proiezione[79]

[79] Si può anche scegliere di limitarsi a usare solo il segno positivo nella (2.5.469), perché, come abbiamo già osservato, questo non conduce a nessuna limitazione sui possibili valori di $\vec{\eta}$ e quindi essa è in grado, a priori, di descrivere la proiezione dello spin in qualunque direzione.
L'arbitrarietà nella scelta del segno nella (2.5.469) è dunque una specie di ridondanza.
Cerchiamo di vederne meglio la ragione per la quale è comunque meglio mantenerla !
Immaginiamo dunque di aver fissato in modo arbitrario la direzione del versore $\vec{\eta}$ nel riferimento del CM. Costruiamo dunque il quadrivettore light-like

$$\hat{k}^\mu \equiv (1, \vec{\eta}) \tag{2.5.475}$$

e quindi poniamo

$$k = \mathcal{B}(\vec{p})\, \hat{k} \tag{2.5.476}$$

dove $\mathcal{B}(\vec{p}) = \mathcal{B}(-\vec{p})^{-1}$ essendo $\mathcal{B}(\vec{p})^{-1}$ il boost definito dalla (2.5.471).
Evidentemente allora (si ricordi che, per definizione $p \cdot k = \hat{p} \cdot \hat{k} = m$)

$$n^\mu = \frac{1}{m}\left(\frac{m^2}{(pk)} k^\mu - p^\mu\right) = k^\mu - \frac{p^\mu}{m} \tag{2.5.477}$$

dello spin dagli operatori $\Pi_\pm$ seguenti (con Π_+ che proietta nel verso di $\vec{\eta}$)

$$\Pi_\pm = \frac{1 \pm \gamma_5 \not{n}}{2}$$

---

individua la polarizzazione lungo $\vec{\eta}$ nel riferimento dove il quadrimpulso della particella è p^μ. Ma noi sappiamo anche che $-n^\mu$ (segno negativo nella (2.5.469)) individua la polarizzazizone opposta, cioè

$$\vec{\eta} \quad \leftrightarrow \quad k^\mu - \frac{p^\mu}{m} \tag{2.5.478}$$

$$-\vec{\eta} \quad \leftrightarrow \quad \frac{p^\mu}{m} - k^\mu \tag{2.5.479}$$

Però il proiettore nella direzione $-\vec{\eta}$, secondo la definizione di cui sopra, dovrebbe essere costruito a partire dal quadrivettore light-like (che ovviamente non è l'opposto del quadrivettore $\hat{k}$ definito dalla (2.5.475 !)

$$\hat{k'}^\mu \equiv (1, -\vec{\eta}) \tag{2.5.480}$$

definendo poi, analogamente a quanto sopra,

$$k' = \mathcal{B}(\vec{p})\, \hat{k'} \tag{2.5.481}$$

e quindi ponendo (segno positivo nella (2.5.469))

$$n'^\mu = \hat{k'}^\mu - \frac{p^\mu}{m} \tag{2.5.482}$$

Quale è dunque il legame fra i due quadrivettori $\frac{p^\mu}{m} - k^\mu$ e $\hat{k'}^\mu - \frac{p^\mu}{m}$?

La risposta è che essi coincidono.
Possiamo vedere questo in vari modi, per esempio applicando loro il boost $\mathcal{B}(\vec{p})^{-1}$, abbiamo

$$\mathcal{B}(\vec{p})^{-1}\left(\frac{p^\mu}{m} - k^\mu\right) = (1, \vec{0}) - (1, \vec{\eta}) = (0, -\vec{\eta}) \tag{2.5.483}$$

$$\mathcal{B}(\vec{p})^{-1}\left(\hat{k'}^\mu - \frac{p^\mu}{m}\right) = (1, -\vec{\eta}) - (1, \vec{0}) = (0, -\vec{\eta}) \tag{2.5.484}$$

Siccome il boost è una trasformazione invertibile, è provato che $\frac{p^\mu}{m} - k^\mu = \hat{k'}^\mu - \frac{p^\mu}{m}$.
Un altro modo per dimostrare la stessa cosa fa uso del fatto che, dalla loro definizione, risulta

$$k'^\mu + k^\mu = \mathcal{B}(\vec{p})(2, \vec{0}) = \frac{2}{m}\,\mathcal{B}(\vec{p})\,\hat{p} = \frac{2}{m} p^\mu \tag{2.5.485}$$

e quindi abbiamo che

$$\begin{aligned} n^\mu(-\vec{\eta}) &= k'^\mu - \frac{p^\mu}{m} = (k'^\mu + k^\mu) - k^\mu - \frac{p^\mu}{m} = \\ &= \frac{2}{m} p^\mu - k^\mu - \frac{p^\mu}{m} = \frac{p^\mu}{m} - k^\mu = -n^\mu(\vec{\eta}) \end{aligned} \tag{2.5.486}$$

Concludendo, se è vero che nella (2.5.469) potremmo certamente limitarci a un solo segno, mantenendo il doppio segno questo, pur non ampliando le soluzioni possibili, facilita, per esempio, l'individuazione del quadrivettore $n^\mu(-\vec{\eta})$ che proietta lo spin nella direzione opposta a quello in cui lo proietta $n^\mu(\vec{\eta})$, potendo porre, semplicemente $n^\mu(-\vec{\eta}) = -n^\mu(\vec{\eta})$.

Un proiettore di spin molto interessante è certamente quello che proietta su stati di elicità definita, ovvero nella direzione del moto della particella. Per quanto abbiamo detto, evidentemente, fissato comunque il quadrimpulso della particella $p^\mu = (E, \vec{p})$, occorrerà cercare un quadrivettore space-like di modulo unitario n^μ che, nel riferimento del CM, punti proprio nella direzione di $\vec{p}$.
Cerchiamolo del tipo (2.5.464), avendo posto

$$k^\mu \equiv (p, \vec{p}) \tag{2.5.487}$$

Per quanto detto sopra, dalla (2.5.470), segue che la soluzione del tipo cercato sarà

$$n^\mu = \frac{1}{m}\left(\frac{m^2}{(pk)}k^\mu - p^\mu\right) \tag{2.5.488}$$

Vediamo se questa soluzione risolve il nostro problema ... .
Intanto osserviamo che

$$(kp) = Ep - p^2 = p(E-p) = p(E-p)\frac{E+p}{E+p} = \frac{m^2 p}{E+p} \tag{2.5.489}$$

e quindi risulta[80]

$$n^\mu = \frac{1}{m}\left(\frac{E+p}{p}\,k^\mu - p^\mu\right) = \frac{1}{m}\,(p\,, E\,\vec{n}) \tag{2.5.491}$$

dove

$$\vec{n} \equiv \frac{\vec{p}}{p} \tag{2.5.492}$$

Applichiamogli ora il boost di Lorentz (2.5.471) per vedere che forma esso assume nel riferimento del CM in modo da determinare la direzione in cui agisce questo proiettore di spin: si ha[81]

$$\begin{aligned} -\frac{1}{m}\,p^\mu &\;\rightarrow\; (-1,0,0,0) \\ \frac{E+p}{mp}\,k^\mu &\;\rightarrow\; \frac{E+p}{mp}\,\frac{E-p}{m}\,k^\mu = \frac{1}{p}\,(p,\vec{p}) \equiv (1,\vec{n}) \quad dove \quad \vec{n} \equiv \frac{\vec{p}}{p} \end{aligned}$$

[80]Infatti si ha

$$\begin{aligned} n^\mu &= \frac{1}{m}\left(\frac{E+p}{p}\,k^\mu - p^\mu\right) = \frac{1}{m}\,\frac{E+p}{p}\,(p,\vec{p}) - \frac{1}{m}p^\mu = \\ &= \frac{1}{m}\,(E+p,\,(E+p)\vec{n}) - \frac{1}{m}\,(E,\,\vec{p}) = \frac{1}{m}\,(p,\,E\,\vec{n}) \end{aligned} \tag{2.5.490}$$

[81]Si dimostra infatti facilmente che, se k è dato dalla (2.5.487) e $\mathcal{B}(\vec{p})^{-1}$ dalla (2.5.471), allora risulta

$$\mathcal{B}(\vec{p})^{-1}\,k = \frac{E-p}{m}\,k$$

Infatti, data la (2.5.496) e vista la prima colonna della (2.5.471), abbiamo che

$$\mathcal{B}(\vec{p})^{-1}\,k = \hat{p} - (E-p)\,\frac{1}{m}\,(E,-\vec{p}) = (m - E\cdot\frac{E-p}{m},\,\frac{E-p}{m}\,\vec{p}) \tag{2.5.493}$$

per cui

$$\mathcal{B}(\vec{p})^{-1}\, n^\mu = (0, \vec{n}) \tag{2.5.495}$$

e dunque n^μ è proprio il quadrivettore che cercavamo per individuare i proiettori di elicità $\Sigma_\pm(\vec{p})$.

Passiamo adesso a considerare l'azione di questi proiettori di elicità sugli spinori di Dirac. Osserviamo che

$$k^\mu = p^\mu \,-\, (E-p, 0, 0, 0) \tag{2.5.496}$$

e quindi risulta

$$\begin{aligned} n^\mu &= \frac{1}{m}\left[\frac{E+p}{p}\,p^\mu - p^\mu\right] - \frac{E+p}{mp}\,(E-p)\,(1,0,0,0) = \\ &= \frac{1}{m}\,\frac{E+p-p}{p}\,p^\mu \,-\, \frac{m^2}{mp}\,(1,0,0,0) = \frac{E}{mp}\,p^\mu \,-\, \frac{m}{p}\,(1,\vec{0}) \end{aligned} \tag{2.5.497}$$

Evidentemente si ha allora che

$$\not{n} \equiv n_\mu \gamma^\mu = \frac{E}{mp}\;\not{p} - \frac{m}{p}\,\gamma^0 \tag{2.5.498}$$

Ne segue quindi che, quando questo operatore viene applicato, per esempio, alla soluzione $u(\vec{p})$ dell'equazione di Dirac, essendo

$$\not{p}\,u(\vec{p}) = m\,u(\vec{p}) \tag{2.5.499}$$

risulta

$$\not{n}\,u(\vec{p}) = \frac{E}{mp}\,m\,u(\vec{p}) \,-\, \frac{m}{p}\,\gamma^0\,u(\vec{p}) = \frac{E}{p}\,u(\vec{p}) \,-\, \frac{m}{p}\,\gamma^0\,u(\vec{p}) \tag{2.5.500}$$

per cui abbiamo

$$\Sigma_\pm(\vec{p})\,u(\vec{p}) \;\equiv\; \frac{1\pm\gamma_5\;\not{n}}{2}\;u(\vec{p}) = \frac{1}{2}\left[1\pm\gamma_5\left(\frac{E}{p} - \frac{m}{p}\gamma^0\right)\right]\,u(\vec{p}) \tag{2.5.501}$$

---

ma

$$m - \frac{E(E-p)}{m} = \frac{m^2 - E^2 + Ep}{m} = \frac{m^2 - m^2 - p^2 + Ep}{m} = \frac{E-p}{m}\,p$$

per cui è così dimostrato che effettivamente risulta

$$\mathcal{B}(\vec{p})^{-1}\,k = \frac{E-p}{m}(p, \vec{p}) = \frac{E-p}{m}\,k \tag{2.5.494}$$

Come si vede, quindi, nel limite ultrarelativistico in cui $E \to +\infty$ (e conseguentemente $E/p \to 1$), ovvero nel limite in cui la massa m diventa trascurabile rispetto all'energia E della particella, si ha che i proiettori $\Sigma_\pm(\vec{p})$, sugli spinori $u(\vec{p})$, diventano[82] tali per cui

$$\Sigma_\pm(\vec{p})\, u(\vec{p}) \longrightarrow \frac{1 \pm \gamma_5}{2}\, u(\vec{p}) \tag{2.5.523}$$

Per quanto riguarda, invece, l'azione di $\Sigma_\pm(\vec{p})$ sugli spinori $v(\vec{p})$, partendo dal fatto che adesso l'equazione di Dirac fornisce

$$\not{p}\, v(\vec{p}) = -m\, v(\vec{p}) \tag{2.5.524}$$

ne risulta che

$$\not{\eta}\, v(\vec{p}) = -\frac{E}{mp}\, m\, v(\vec{p}) \; - \; \frac{m}{p}\, \gamma^0\, v(\vec{p}) = -\frac{E}{p}\, v(\vec{p}) \; - \; \frac{m}{p}\, \gamma^0\, v(\vec{p}) \tag{2.5.525}$$

e dunque si ha

$$\Sigma_\pm(\vec{p})\, v(\vec{p}) \quad \equiv \quad \frac{1 \pm \gamma_5\ \not{\eta}}{2}\ v(\vec{p}) = \frac{1}{2}\left[1 \mp \gamma_5 \left(\frac{E}{p} + \frac{m}{p}\gamma^0\right)\right]\ v(\vec{p}) \tag{2.5.526}$$

[82] E' istruttivo vedere più da vicino le implicazioni della (2.5.523).
Supponiamo, infatti, di considerare uno stato $u(\hat{p}) = \alpha_s\, u^{(s)}(\hat{p})$ con $|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 = 1$, ovvero il generico stato di una particella di Dirac vista nel suo riferimento di quiete.
Usando i proiettori $\chi_\pm$ definiti dalla (2.5.531), possiamo scomporre lo stato in questione nelle sue componenti chirali, ponendo

$$u(\hat{p}) = \chi_+\, u(\hat{p}) + \chi_-\, u(\hat{p}) \equiv u_+(\hat{p}) + u_-(\hat{p}) \tag{2.5.502}$$

e i due vettori $u_\pm(\hat{p})$ sono evidentemente tali che

$$u_\pm(\hat{p}) = \alpha_s\, u_\pm^{(s)}(\hat{p}) \tag{2.5.503}$$

dove

$$u_\pm^{(s)}(\hat{p}) \equiv \chi_\pm\, u^{(s)}(\hat{p}) = \frac{1}{2}\left[u^{(s)}(\hat{p}) \pm (i\sigma_2)_{rs}\, v^{(r)}(\hat{p})\right] \tag{2.5.504}$$

I vettori $u_\pm(\hat{p})$ risultano avere entrambi la stessa norma, infatti

$$\begin{aligned} u_\pm^\dagger(\hat{p}) \cdot u_\pm(\hat{p}) \quad &= \quad u^\dagger(\hat{p}) \cdot \chi_\pm^\dagger \cdot \chi_\pm \cdot u(\hat{p}) = u^\dagger(\hat{p}) \cdot \chi_\pm^2 \cdot u(\hat{p}) = u^\dagger(\hat{p}) \cdot \chi_\pm \cdot u(\hat{p}) = \\ &= \quad \frac{1}{2} u^\dagger(\hat{p}) \cdot u(\hat{p}) = m \end{aligned} \tag{2.5.505}$$

essendo $u^\dagger(\hat{p})\, \gamma_5\, u(\hat{p}) = 0$.

Immaginiamo ora di applicare a $u(\hat{p})$ un boost generico $\mathcal{B}(\vec{p})$: risulta

$$u^{(s)}(\vec{p}) = S(\mathcal{B}(\vec{p}))\, u^{(s)}(\hat{p}) \tag{2.5.506}$$

e si ha ancora, evidentemente, che

$$u(\vec{p}) = \chi_+\, u(\vec{p}) + \chi_-\, u(\vec{p}) \equiv u_+(\vec{p}) + u_-(\vec{p}) \tag{2.5.507}$$

ovvero, nel limite ultrarelativistico in cui $E >> m$, abbiamo che adesso

---

Siccome γ_5 commuta con le $S(\Lambda)$, ne segue che

$$\chi_\pm\, u(\vec{p}) \equiv \chi_\pm S(\mathcal{B}(\vec{p}))\, u(\hat{p}) = S(\mathcal{B}(\vec{p}))\chi_\pm\, u(\hat{p}) = S(\mathcal{B}(\vec{p}))\, u_\pm(\hat{p}) \tag{2.5.508}$$

e dunque risulta

$$u(\vec{p}) = S(\mathcal{B}(\vec{p}))\, u_+(\hat{p}) + S(\mathcal{B}(\vec{p}))\, u_-(\hat{p}) \tag{2.5.509}$$

Ammettiamo ora che lo stato $u(\hat{p})$ rappresenti una particella di Dirac con lo spin allineato nella direzione $\vec{n}$ e che il boost $\mathcal{B}(\vec{p})$ avvenga nella stessa direzione della polarizzazione, conferendo quindi alla particella un impulso spaziale $p\,\vec{n}$. Evidentemente sarà

$$\Sigma_+(\vec{p})\, u(\vec{p}) = u(\vec{p}) \tag{2.5.510}$$

Ma abbiamo detto che, per gli spinori di tipo u, quando $E >> m$, $\Sigma_+(\vec{p}) \to \chi_+$ e dunque, nel limite di alta energia, quanto sopra implica che

$$u(\vec{p}) = \Sigma_+(\vec{p})\, u(\vec{p}) \to \chi_+\, u(\vec{p}) = u_+(\vec{p}) \tag{2.5.511}$$

Vista però la (2.5.507), che ne è di $u_-(\vec{p})$?
Il punto è che la rappresentazione del gruppo di Lorentz $S(\Lambda)$ *non* è unitaria e quindi non conserva la norma dei vettori a cui vengono applicati i suoi operatori. I vettori $u_\pm(\hat{p})$ hanno la stessa norma, ma questo non resta vero per i vettori $u_\pm(\vec{p})$!
Accade, in particolare, che, nel limite di alta energia, se l'impulso spaziale punta nella direzione dello spin relativo allo stato $u_+(\hat{p})$, allora il vettore $u_-(\vec{p})$ tende a zero.
Abbiamo infatti

$$u_-(\vec{p}) \;=\; S(\mathcal{B}(\vec{p}))\, u_-(\hat{p}) = S(\mathcal{B}(\vec{p}))\left[\alpha_s\, u_-^{(s)}(\hat{p})\right] = \frac{1}{2}\alpha_s\, S(\mathcal{B}(\vec{p}))\left[u^{(s)}(\hat{p}) - (i\sigma_2)_{rs} v^r(\hat{p})\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\alpha_s\left[u^{(s)}(\vec{p}) - (i\sigma_2)_{rs} v^r(\vec{p})\right] \tag{2.5.512}$$

Ma essendo u_-, per definizione, autostato di γ_5 per l'autovalore -1, le sue grandi componenti sono necessariamente uguali e opposte alle sue piccole componenti: occupiamoci dunque delle prime, che indicheremo, per semplicità, con $w_-(\vec{p})$. Avendo già definito con $\vec{n}$ la direzione dell'impulso spaziale, dalle definizioni (2.5.371) e (2.5.374) degli spinori u e v, abbiamo che

$$w_-(\vec{p}) = \frac{1}{2}\alpha_s\left[\sqrt{E+m}\; w^{(s)} - (i\sigma_2)_{rs}\sqrt{E-m}\,(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})\;\tilde{w}^{(r)}\right] \tag{2.5.513}$$

ma, come osservato nella (2.5.392), risulta che $(i\sigma_2)_{rs}\;\tilde{w}^{(r)} = w^{(s)}$ per cui

$$w_-(\vec{p}) = \frac{1}{2}\alpha_s\left[\sqrt{E+m}\; w^{(s)} - \sqrt{E-m}\,(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})\; w^{(s)}\right] \tag{2.5.514}$$

D'altronde, per ipotesi lo spinore $u(\hat{p})$ descrive uno stato di spin allineato proprio con la direzione $\vec{n}$, per cui, data la struttura di $u(\hat{p})$ in termini dei vettori bidimensionali $w^{(s)}$, deve essere necessariamente che

$$(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})\cdot\left(\alpha_s\, w^{(s)}\right) = \alpha_s\, w^{(s)} \tag{2.5.515}$$

e dunque risulta

$$w_-(\vec{p}) \;=\; \frac{1}{2}\left[\sqrt{E+m} - \sqrt{E-m}\right]\left(\alpha_s\, w^{(s)}\right) \approx \frac{1}{2}\left[\sqrt{E} + \sqrt{E}\frac{m}{2E} - \sqrt{E} + \sqrt{E}\frac{m}{2E}\right]\left(\alpha_s\, w^{(s)}\right) =$$
$$= \frac{m}{2E}\,\sqrt{E}\,\left(\alpha_s\, w^{(s)}\right) \tag{2.5.516}$$

risulta

$$\Sigma_\pm(\vec{p})\, v(\vec{p}) \longrightarrow \frac{1 \mp \gamma_5}{2}\, v(\vec{p}) \tag{2.5.527}$$

e abbiamo

$$\Sigma_\pm^\dagger = \gamma^0\, \Sigma_\pm\, \gamma^0; \qquad (\chi_\pm)^\dagger = \chi_\pm \tag{2.5.528}$$

Riguardo poi agli spinori barrati, è facile concludere da quanto sopra che risulta

$$\Sigma_\pm(\vec{p})\, u(\vec{p}) \to \frac{1 \pm \gamma_5}{2}\, u(\vec{p}) \quad \Leftrightarrow \quad \bar{u}(\vec{p})\Sigma_\pm(\vec{p}) \to \bar{u}(\vec{p})\frac{1 \mp \gamma_5}{2} \tag{2.5.529}$$

$$\Sigma_\pm(\vec{p})\, v(\vec{p}) \to \frac{1 \mp \gamma_5}{2}\, v(\vec{p}) \quad \Leftrightarrow \quad \bar{v}(\vec{p})\Sigma_\pm(\vec{p}) \to \bar{v}(\vec{p})\frac{1 \pm \gamma_5}{2} \tag{2.5.530}$$

---

il quale, evidentemente, tende a zero nel limite in cui $E \to \infty$.
Per completezza, vediamo adesso che cosa succede, invece, a $u_+(\vec{p})$. Si ha

$$\begin{aligned} u_+(\vec{p}) &= S(\mathcal{B}(\vec{p}))\, u_+(\hat{p}) = S(\mathcal{B}(\vec{p}))\left[\alpha_s\, u_+^{(s)}(\hat{p})\right] = \frac{1}{2}\alpha_s\, S(\mathcal{B}(p))\left[u^{(s)}(\hat{p}) + (i\sigma_2)_{rs} v^r(\hat{p})\right] = \\ &= \frac{1}{2}\alpha_s\left[u^{(s)}(\vec{p}) + (i\sigma_2)_{rs} v^r(\vec{p})\right] \end{aligned} \tag{2.5.517}$$

Stavolta u_+ è autovettore di γ_5 per l'autovalore +1 e dunque le sue grandi componenti coincidono con le piccole: indichiamole con $w_+(\vec{p})$. Risulta

$$w_+(\vec{p}) = \frac{1}{2}\alpha_s\left[\sqrt{E+m}\; w^{(s)} + (i\sigma_2)_{rs}\sqrt{E-m}\,(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})\; \tilde{w}^{(r)}\right] \tag{2.5.518}$$

e quindi, ripetendo le stesse considerazioni di cui sopra, possiamo concludere che

$$\begin{aligned} w_+(\vec{p}) &= \frac{1}{2}\left[\sqrt{E+m} + \sqrt{E-m}\right]\left(\alpha_s\, w^{(s)}\right) \approx \frac{1}{2}\left[\sqrt{E} + \sqrt{E}\frac{m}{2E} + \sqrt{E} - \sqrt{E}\frac{m}{2E}\right]\left(\alpha_s\, w^{(s)}\right) = \\ &= \sqrt{E}\,\left(\alpha_s\, w^{(s)}\right) \end{aligned} \tag{2.5.519}$$

il cui confronto con la (2.5.516) mostra in particolare che

$$w_-(\vec{p}) \approx \frac{m}{2E}\, w_+(\vec{p}) \tag{2.5.520}$$

ovvero che la componente di elicità *sbagliata* si riduce, ad alta energia, proporzionalemte a $\frac{m}{2E}$.
Concludiamo infine l'argomento, occupandoci di $u(\vec{p})$ stesso: dalla definizione risulta che

$$u(\vec{p}) = \alpha_r \begin{pmatrix} \sqrt{E+m}\; w^{(r)} \\ \sqrt{E-m}\,(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})\; w^{(r)} \end{pmatrix} \tag{2.5.521}$$

ovvero, vista la polarizzazione concorde con la direzione dell'impulso, per quanto già osservato

$$u(\vec{p}) = \alpha_r \begin{pmatrix} \sqrt{E+m}\; w^{(r)} \\ \sqrt{E-m}\; w^{(r)} \end{pmatrix} \approx \sqrt{E}\begin{pmatrix} \alpha_r\, w^{(r)} \\ \alpha_r\, w^{(r)} \end{pmatrix} + \frac{m}{2\sqrt{E}}\begin{pmatrix} \alpha_r\, w^{(r)} \\ -\alpha_r\, w^{(r)} \end{pmatrix} \tag{2.5.522}$$

la quale mostra direttamente, in modo evidente, la separazione di $u(\vec{p})$ nelle due componenti $u_+(\vec{p})$ e $u_-(\vec{p})$, unitamente al fatto che, per $E >> m$, $\Sigma_+(\vec{p})u(\vec{p}) \to \chi_+ u(\vec{p})$.

E' opportuno a questo punto ricordare che, indipendentemente dai proiettori di elicità, sono comunque definiti gli operatori[83] *scalari* seguenti

$$\chi_\pm \equiv \frac{1 \pm \gamma_5}{2} \qquad (2.5.531)$$

i quali proiettano su stati di *chiralità*[84] definita[85]: l'operatore χ_- entra direttamente nella definizione della corrente debole carica ed è proprio a causa della sua presenza che le interazioni deboli violano[86] la parità !

---

[83]Occorre mettere in evidenza una differenza importante che esiste fra i proiettori $\Lambda_\pm$ e $\Pi_\pm$ con quelli di chiralità $\chi_\pm$, definiti dalla (2.5.531), almeno nel caso di massa non nulla. Evidentemente, essendo infatti

$$[\Lambda_\pm, \not{p} \pm m] = 0 = [\Pi_\pm, \not{p} \pm m]$$

ne segue che se $\psi(p)$ è soluzione dell'equazione di Dirac per energie positive/negative, allora anche $\Lambda_\pm\, \psi$ e $\Pi_\pm\, \psi$ lo sono (essendo, eventualmente nulle ...).
Questo, se $m \neq 0$, non è vero per $\chi_\pm$ proprio perché

$$[\chi_\pm, \not{p} \pm m] \neq 0$$

Supponiamo infatti, per esempio, che $\psi(p)$ soddisfi l'equazione

$$(\not{p} - m)\, \psi(p) = 0$$

ovvero sia una soluzione dell'equazione di Dirac per energie positive e dunque uno spinore di tipo u: siccome γ_5 anticommuta con le γ^μ, ecco che per $\gamma_5\psi$ vale piuttosto l'equazione

$$(\not{p} + m)\, \gamma_5\, \psi(p) = 0$$

ovvero, si tratta di uno spinore di tipo v. Evidentemente, se la massa è nulla, l'argomento cade perché in quel caso $\not{p} \pm m \to \not{p}$; ma nel caso di massa non nulla possiamo concludere, per quanto riguarda gli stati $\psi_\pm \equiv \chi_\pm \psi$, che essi *non* sono soluzioni dell'equazione di Dirac.

In altre parole, mentre $\Lambda_\pm$ e $\Pi_\pm$ sono proiettori compatibili con la dinamica libera della particella di Dirac, il proiettore di chiralità, se la massa della particella è diversa da zero, non gode di questa proprietà: esso va inteso come un semplice proiettore *cinematico*.

Per esempio, se ψ è il campo del neutrino e questo non ha massa nulla, allora non è corretto dire che esso è descritto da $\frac{1-\gamma_5}{2}\, \psi$ e quindi che lo stato di neutrino è autostato della chiralità per l'autovalore -1. Ciò che è corretto è che la presenza del proiettore di chiralità nell'espressione della corrente debole e quindi nel vertice dell'interazione favorisce lo stato di neutrino di elicità negativa (dato che la massa del neutrino risulta solitamente molto minore della sua energia nel sistema del laboratorio).
In altre parole, in un processo del tipo

$$e^- + A \to B + \nu$$

con A e B anch'essi particelle di Dirac massive, il neutrino, nel sistema del CM del processo, avrà prevalentemente elicità negativa, con una piccola contaminazione di elicità positiva dell'ordine di m/E e, in ogni caso, sarà descritto da uno spinore di tipo u !

[84]La parola *chiralità* deriva dal greco $\chi\epsilon\iota\rho\ \ \chi\epsilon\iota\rho o\varsigma$ che significa *mano*. Indica la proprietà di avere un'immagine speculare non sovrapponibile a sé, come avviene, appunto, nel caso di una mano. Per parità, abbiamo infatti che $\chi_+ \longleftrightarrow \chi_-$.

[85]Come abbiamo visto, è solo nel caso in cui $E >> m$ che questi stati possono essere identificati con quelli di *elicità* definita.

[86]Intuitivamente possiamo già rendercene conto fin da ora in quanto, per esempio, nel

Come abbiamo osservato sopra, il proiettore chirale è scalare per trasformazioni di Lorentz e dunque stati di chiralità definita restano tali anche al cambiare del sistema di riferimento.
Invece abbiamo visto che, quanto al proiettore di spin, per selezionare la stessa direzione al cambiare del riferimento, si deve modificare in modo ben preciso il quadrivettore n^μ, attraverso, appunto, la trasformazione di Lorentz (2.5.463).
Ma che dire del proiettore di elicità ?
Potrebbe sembrare che, poichè i proiettori $\Sigma_\pm(\vec{p})$ sono definiti come degli *opportuni* proiettori di spin, anche questi cambino al cambiare del riferimento nello stesso modo dei primi.
Questo però non è vero.
La ragione è che, fissato un sistema di riferimento, $\Sigma_\pm(\vec{p})$ viene definito attraverso il quadrivettore n^μ dato dalla (2.5.491) e quest'ultima definizione *non* coincide con quella che ha condotto alla trasformazione (2.5.463) nel caso di un proiettore di spin, perché, mentre in questo caso vogliamo mantenere la stessa direzione nel CM, nel caso dell'elicità vogliamo che la direzione nel CM sia allineata con la direzione di moto della particella nel riferimento dato, e quindi, a meno di un boost in questa stessa direzione, in generale avremo direzioni differenti.
Come abbiamo osservato, se in un dato sistema di riferimento è

$$p^\mu \equiv (E,\, p\,\vec{n}) \tag{2.5.532}$$

allora ne segue che, in questo riferimento, il quadrivettore che definisce il proiettore di elicità è il seguente

$$n^\mu = \frac{1}{m}(p,\, E\,\vec{n}) \tag{2.5.533}$$

Dunque, se il quadrimpulso della particella diventa

$$p'^\mu = (E',\, p'\,\vec{n}\,') \tag{2.5.534}$$

dovremo usare semplicemente il nuovo quadrivettore

$$n'^\mu = \frac{1}{m}(p',\, E'\,\vec{n}\,') \tag{2.5.535}$$

Volendo esplicitare la trasformazione di Lorentz che fa passare da n^μ a n'^μ, possiamo osservare che questi "quadrivettori" di spin sono definiti in modo tale che risulti

$$\mathcal{B}(\vec{p})^{-1}\, n^\mu = (0,\, \vec{n}); \qquad \mathcal{B}(\vec{\Lambda p})^{-1}\, n'^\mu = (0,\, \vec{n'}) \tag{2.5.536}$$

caso ultrarelativistico, a causa di χ_-, verrà selezionato nella dinamica del processo, per la particella, lo stato di elicità -1 e per l'antiparticella quello con l'elicità $+1$.
Ed è proprio il fatto che i due stati di elicità non entrano nella dinamica nello stesso modo che è all'origine della violazione della simmetria di parità ...

essendo, per definizione

$$p^\mu = (E,\, p\,\vec{n}); \qquad \Lambda p \equiv p'^\mu = (E',\, p'\vec{n'}) \tag{2.5.537}$$

Dunque, se R è una qualsiasi rotazione[87] tale che

$$R\,\vec{n} = \vec{n'} \tag{2.5.538}$$

allora abbiamo che, come quadrivettori, risulta

$$n' = \mathcal{B}(\vec{\Lambda p})\, R\, \mathcal{B}(\vec{p})^{-1}\, n \tag{2.5.539}$$

da confrontare con la (2.5.460) in cui R manca perché, in quel caso, la direzione di proiezione riportata nel CM restava fissa, mentre, nel caso dell'elicità, essendo questa direzione legata a quella dell'impulso nel sistema del Laboratorio, essa non resta, in generale, fissa al cambiare dello stesso.

[87] Per esempio R può essere la rotazione definita dal versore individuato dal prodotto vettoriale di $\vec{n}$ e $\vec{n'}$ e dall'angolo il cui seno è l'ampiezza del prodotto vettore citato ...

Ma veniamo adesso alla quantizzazione del campo di Dirac.
L'espansione del campo in termini di operatori di creazione/distruzione di particella/antiparticella è la seguente[88]

$$\psi(x) = \sum_{r=1}^{2} \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \left\{ a(r,\vec{p})\, u^{(r)}(\vec{p})\, e^{-ipx} + b^\dagger(r,\vec{p})\, v^{(r)}(\vec{p})\, e^{ipx} \right\} \quad (2.5.540)$$

$$\bar{\psi}(x) = \sum_{r=1}^{2} \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \left\{ b^(r,\vec{p})\, \bar{v}^{(r)}(\vec{p})\, e^{-ipx} + a^\dagger(r,\vec{p})\, \bar{u}^{(r)}(\vec{p})\, e^{ipx} \right\} \quad (2.5.541)$$

dove, al solito[89]

- $a(r,\vec{p})$ annichila la particella di quadrimpulso $(E_p\,,\vec{p}) = (\sqrt{m^2+|\vec{p}|^2},\vec{p})$ e di stato di spin r (terza componente);
- $a^\dagger(r,\vec{p})$ crea la particella di quadrimpulso $(E_p\,,\vec{p})$ e di stato di spin r;
- $b(r,\vec{p})$ annichila l'antiparticella di quadrimpulso $(E_p\,,\vec{p})$ e di spin r;
- $b^\dagger(r,\vec{p})$ crea l'antiparticella di quadrimpulso $(E_p\,,\vec{p})$ di spin r

e questi operatori soddisfano le regole di *anticommutazione* (tutte le altre sono nulle) seguenti

$$\left\{ a(r,\vec{p}), a^\dagger(s,\vec{q}) \right\} = \left\{ b(r,\vec{p}), b^\dagger(s,\vec{q}) \right\} = 2\,E_p\,(2\pi)^3\; \delta_{rs}\; \delta^3(\vec{p}-\vec{q}) \quad (2.5.542)$$

Sotto il gruppo di Poincaré, essi si trasformano secondo la legge seguente[90]

$$U(a,\Lambda)\, a(s,p)\, U^{-1}(a,\Lambda) = e^{-ia\cdot\Lambda p}\; R_{sr}\; a(r,\Lambda p) \quad (2.5.553)$$

$$U(a,\Lambda)\, b(s,p)\, U^{-1}(a,\Lambda) = e^{-ia\cdot\Lambda p}\; R_{sr}\; b(r,\Lambda p) \quad (2.5.554)$$

dove R è la matrice di $SU(2)$ individuata dalla rotazione di Wigner
$\mathcal{R}(\Lambda^{-1},\Lambda\,p) \equiv \mathcal{R}^{-1}(\Lambda,p)$, definita per una generica trasformazione $\Gamma \in \mathcal{L}_+^\uparrow$,

[88]Dato un quadrimpulso p qualsiasi, quando non c'è possibilità di confusione, per comodità useremo equivalentemente i simboli $a(r,p)$ e $u(r,p)$ al posto di $a(r,\vec{p})$ e $u(r,\vec{p})$.

[89]Si osservi che, come nel caso del campo scalare e vettoriale, quelle che nel gergo della prima quantizzazione abbiamo chiamato *soluzioni a energia negativa*, cioe le soluzioni che, nel caso in esame, sono associate agli spinori di tipo v, si riferiscono semplicemente alle antiparticelle.

[90]Questa legge di trasformazione discende direttamente dalle leggi di trasformazione (2.5.391) e (2.5.404) degli spinori u e v sotto il gruppo di Lorentz, assunto che vogliamo che, per il campo $\psi(x)$, valga appunto la legge di trasformazione (2.5.340).

Dimostriamo dunque che le leggi di trasformazione (2.5.553) e (2.5.554) conducono alla (2.5.340). Per fare questo, partiamo dalla definizione della decomposizione spettrale del campo, cioè dalla relazione

$$\psi(x) = \sum_{r=1}^{2} \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \left\{ a(r,p)\, u^{(r)}(p)\, e^{-ipx} + b^\dagger(r,p)\, v^{(r)}(p)\, e^{ipx} \right\} \quad (2.5.543)$$

come si ricorderà, nel modo seguente[91]

$$\mathcal{R}(\Gamma, q) \equiv \mathcal{B}(\Gamma q)^{-1} \; \Gamma \; \mathcal{B}(q) \tag{2.5.557}$$

---

ne segue che

$$\begin{aligned} U(a,\Lambda)\,\psi(x)\,U^{-1}(a,\Lambda) &= \sum_{r=1}^{2}\int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\left\{U(a,\Lambda)\,a(r,p)\,U^{-1}(a,\Lambda)\,u^{(r)}(p)\,e^{-ipx} + \right. \\ &+ \left. U(a,\Lambda)\,b^{\dagger}(r,p)\,U^{-1}(a,\Lambda)\,v^{(r)}(p)\,e^{ipx}\right\} \end{aligned} \tag{2.5.544}$$

e dunque, imponendo la (2.5.553) e la (2.5.554), ne segue che

$$\begin{aligned} U(a,\Lambda)\,\psi(x)\,U^{-1}(a,\Lambda) &= \sum_{r=1}^{2}\int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\left\{e^{-ia\cdot\Lambda p}\,R_{rs}\,a(s,\Lambda p)\,u^{(r)}(p)\,e^{-ipx} + \right. \\ &+ \left. e^{ia\cdot\Lambda p}\,R^*_{rs}\,b^{\dagger}(s,\Lambda p)\,v^{(r)}(p)\,e^{ipx}\right\} \end{aligned} \tag{2.5.545}$$

Ponendo $\Lambda p = q$, essendo $(px) = \Lambda p \cdot \Lambda x = q \cdot \Lambda x$, risulta quindi

$$\begin{aligned} U(a,\Lambda)\,\psi(x)\,U^{-1}(a,\Lambda) &= \sum_{r=1}^{2}\int \frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3}\left\{e^{-iaq}\,R_{rs}\,a(s,q)\,u^{(r)}(\Lambda^{-1}q)\,e^{-iq\cdot\Lambda x} + \right. \\ &+ \left. e^{iaq}\,R^*_{rs}\,b^{\dagger}(s,q)\,v^{(r)}(\Lambda^{-1}q)\,e^{iq\cdot\Lambda x}\right\} \end{aligned} \tag{2.5.546}$$

Ma abbiamo visto (cfr. (2.5.391) e (2.5.404)) che, in generale, risulta

$$S(\Gamma)\,u^{(s)}(q) = R(\Gamma,q)_{ks}\,u^{(k)}(\Gamma q) \tag{2.5.547}$$

$$S(\Gamma)\,v^{(s)}(q) = R^*(\Gamma,q)_{ks}\,v^{(k)}(\Gamma q) \tag{2.5.548}$$

dove la matrice R che compare nella (2.5.547) e (2.5.548) è la matrice di $SU(2)$ individuata dalla rotazione di Wigner $\mathcal{R}(\Gamma, q)$. Facendo allora $\Gamma = \Lambda^{-1}$, si ha

$$S(\Lambda^{-1})\,u^{(s)}(q) = R_{ks}\,u^{(k)}(\Lambda^{-1}q) \tag{2.5.549}$$

$$S(\Lambda^{-1})\,v^{(s)}(q) = R^*_{ks}\,v^{(k)}(\Lambda^{-1}q) \tag{2.5.550}$$

da cui, sostituendo nella (2.5.546), si ottiene appunto che

$$U(a,\Lambda)\,\psi(x)\,U^{-1}(a,\Lambda) = S^{-1}(\Lambda)\,\psi(a+\Lambda x) \tag{2.5.551}$$

e da questa, per quanto già visto

$$U(a,\Lambda)\,\bar{\psi}(x)\,U^{-1}(a,\Lambda) = \bar{\psi}(a+\Lambda x)\,S(\Lambda) \tag{2.5.552}$$

[91] Si osservi che se partiamo dal sistema del CM, cioé se il quadrimpulso di partenza è $\hat{p} \equiv (m,0,0,0)$ mentre $\Gamma = \mathcal{B}(p)$, allora la rotazione di Wigner $\mathcal{R}(\mathcal{B}(p), \hat{p})$ coincide semplicemente con l'indentità, infatti essendo $\mathcal{B}(\hat{p}) = I$, $\mathcal{B}(p)\,\hat{p} \equiv p$, $\mathcal{B}(\Gamma\hat{p})^{-1} = \mathcal{B}(p)^{-1}$ si ha $\mathcal{B}(\Gamma p)^{-1}\;\Gamma\;\mathcal{B}(p) = \mathcal{B}(\Gamma\hat{p})^{-1}\;\Gamma\;I \equiv I$ e quindi risulta in particolare che

$$U(a,\mathcal{B}(p))\,a(r,\hat{p})\,U^{-1}(a,\mathcal{B}(p)) = e^{-iap}\;a(r,p) \tag{2.5.555}$$

$$U(a,\mathcal{B}(p))\,b(r,\hat{p})\,U^{-1}(a,\mathcal{B}(p)) = e^{-iap}\;b(r,p) \tag{2.5.556}$$

Veniamo ora a considerare la normalizzazione dei campi ψ e $\bar{\psi}$.
Anche in questo caso, evidentemente, abbiamo libertà di normalizzazione, essendo l'equazione di Dirac una equazione differenziale lineare e omogenea.

Questa normalizzazione viene fissata a partire dalla funzione[92] d'onda $\Psi(s,\vec{q};x)$ associata in rappresentazione delle coordinate allo stato di particella libera con impulso $\vec{q}$ e stato di spin s, ovvero $|\vec{q}, s> \equiv a^\dagger(s,\vec{q})|\Omega>$, data da

$$\Psi(s,\vec{q};x) = u^{(s)}(\vec{q})\; e^{-iqx} \tag{2.5.575}$$

La densità di corrente associata a questo stato, via il teorema di Noethër per l'invarianza in forma della Lagrangiana sotto una trasformazione di gauge di prima specie, è data da

$$j^\mu(x) = \bar{\Psi}(s,\vec{q};x)\,\gamma^\mu\,\Psi(s,\vec{q};x) = \bar{u}^{(s)}(\vec{q})\,\gamma^\mu\,u^{(s)}(\vec{q})$$

da cui ne segue che la componente temporale, che fornisce la densità di particelle per unità di volume è pari a

$$\rho(x) = j^0(x) = \bar{u}^{(s)}(\vec{q})\,\gamma^0\,u^{(s)}(\vec{q}) = u^{+(s)}(\vec{q})\,u^{(s)}(\vec{q}) = 2E \tag{2.5.576}$$

Lo stesso accade per l'antiparticella.

Per quanto riguarda, poi, l'algebra del campo, essa è definita dalle regole di *anticommutazione* (2.5.542) fra gli operatori di creazione e distruzione. Quanto ai campi ψ e $\bar{\psi}$, il loro anticommutatori si possono evidentemente ottenere a partire dalle decomposizioni (2.5.540) e (2.5.541) degli stessi.
Risulta che

$$\{\psi_\alpha(x),\, \psi_\beta(y)\} = 0 = \left\{\psi^\dagger_\alpha(x),\, \psi^\dagger_\beta(y)\right\} \tag{2.5.577}$$

---

[92] Anche in questo caso la funzione d'onda della particella si può determinare in termini del campo $\psi(x)$, nel modo seguente

$$\begin{aligned}\Psi(s,\vec{q};x) &= \;<\Omega|\psi(x)a^{\dagger(s)}(\vec{q})|\Omega>= \\ &= \sum_{r=1}^{2}\int\frac{d^3p}{2E(2\pi)^3} <\Omega|\left\{a(r,\vec{p})\,u^{(r)}(\vec{p})\,e^{-ipx} \;+\; b^\dagger(r,\vec{p})\,v^{(r)}(\vec{p})\,e^{ipx}\right\}a^{\dagger(s)}(\vec{q})|\Omega>= \\ &= \sum_{r=1}^{2}\int\frac{d^3p}{2E(2\pi)^3}\,u^{(r)}(\vec{p})\,e^{-ipx}\; <\Omega|\left\{a(r,\vec{p})\,,a^\dagger(s,\vec{q})\right\}|\Omega>= u^{(s)}(\vec{q})\,e^{-iqx}\end{aligned} \tag{2.5.558}$$

Lo stesso risultato vale anche per la funzione d'onda dell'antiparticella, anche se questo è meno immediato.
Per convincercene, iniziamo ricordando che se $\Psi(x)$ è soluzione dell'equazione di Dirac libera, allora anche

$$\Psi_C(x) \equiv \mathcal{C}^{-1}\,\bar{\Psi}(x)^t \quad con \quad \mathcal{C} \equiv i\gamma^0\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\mathcal{C}^{-1} \tag{2.5.559}$$

lo è, e Ψ_C è detta *la soluzione coniugata di carica* della Ψ.

La ragione di questo nome risiede nel fatto che, in presenza di interazione elettromagnetica, usando l'accoppiamento canonico minimale, cioè ($\hbar = c = 1$)

$$p^\mu \to p^\mu - \frac{e}{c} A^\mu \quad \Leftrightarrow \quad i\,\partial^\mu \to i\,\partial^\mu - \frac{e}{c} A^\mu \tag{2.5.560}$$

allora se Ψ è soluzione dell'equazione di Dirac in presenza di un dato campo elettromagnetico A^μ, ovvero se accade che

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - e\, A_\mu\, \gamma^\mu)\, \Psi - m\, \Psi = 0 \tag{2.5.561}$$

ne segue che la Ψ_C definita sopra risolve l'equazione di Dirac nello stesso campo esterno ma per una particella di carica opposta (e stessa massa), cioè risulta

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu + e\, A_\mu\, \gamma^\mu)\, \Psi_C - m\, \Psi_C = 0 \tag{2.5.562}$$

Infatti, prendendo l'hermitiana coniugata dell'equazione di partenza (ricordiamo che A^μ è reale), abbiamo

$$\begin{aligned} & (i\gamma^\mu \partial_\mu - e\, A_\mu\, \gamma^\mu)\, \Psi - m\, \Psi = 0 \Rightarrow \partial_\mu \Psi^\dagger (-i\gamma^{\mu\dagger}) - e\, A_\mu\, \Psi^\dagger (\gamma^\mu)^\dagger - m\, \Psi^\dagger = 0 \\ \Rightarrow \quad & -i\partial_\mu \Psi^\dagger \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 - e\, A_\mu\, \Psi^\dagger \gamma_\mu^\dagger \gamma^0 - m\, \Psi^\dagger \gamma^0 = 0 \\ \Rightarrow \quad & -i\partial_\mu \Psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 - e\, A_\mu \Psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \gamma_\mu^\dagger \gamma^0 - m\, \Psi^\dagger \gamma^0 = 0 \end{aligned} \tag{2.5.563}$$

dove abbiamo usato il fatto che $(\gamma^0)^2 = I$.
D'altronde $\Psi^\dagger \gamma^0 = \bar\Psi$ e $\gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 = \gamma^\mu$, dunque otteniamo che vale l'equazione

$$-i\partial_\mu \bar\Psi \gamma^\mu - eA_\mu \bar\Psi \gamma^\mu - m\, \bar\Psi = 0 \tag{2.5.564}$$

per cui trasponendo, si ha

$$-i\partial_\mu (\gamma^\mu)^t\, \bar\Psi^t - eA_\mu (\gamma^\mu)^t\, \bar\Psi^t - m\, \bar\Psi^t = 0 \tag{2.5.565}$$

e se moltiplichiamo a sinistra per la matrice $\mathcal{C}^{-1}$, che gode delle proprietà per cui

$$\mathcal{C}\, (\gamma^\mu)^t = -\gamma^\mu\, \mathcal{C}\,; \quad \mathcal{C}^{-1} = -\mathcal{C} = \mathcal{C}^t \tag{2.5.566}$$

ecco che risulta

$$\begin{aligned} & -i\partial_\mu \mathcal{C}^{-1} (\gamma^\mu)^t \bar\Psi^t - eA_\mu\, \mathcal{C}^{-1} (\gamma^\mu)^t \bar\Psi^t - m\, \mathcal{C}^{-1}\, \bar\Psi^t = 0 \\ \Rightarrow \quad & i\partial_\mu \gamma^\mu\, \mathcal{C}^{-1} \bar\Psi^t + eA_\mu \gamma^\mu\, \mathcal{C}^{-1} \bar\Psi^t - m\, \mathcal{C}^{-1}\, \bar\Psi^t = 0 \end{aligned} \tag{2.5.567}$$

per cui, ponendo appunto $\mathcal{C}^{-1} \bar\Psi^t \equiv \Psi_C$, otteniamo infine l'equazione

$$i\partial_\mu \gamma^\mu \Psi_C + eA_\mu \gamma^\mu \Psi_C - m\, \Psi_C = 0 \tag{2.5.568}$$

che prova appunto la (2.5.562).
In assenza di campo elettromagnetico Ψ e Ψ_c diventano soluzioni libere e se Ψ è una soluzione a energia positiva, allora Ψ_C è, evidentemente (data la coniugazione complessa) una soluzione a energia negativa e viceversa.

In prima quantizzazione, l'associazione degli stati di antiparticella con le soluzioni a energia negativa procede attraverso l'identificazione degli *stati di antiparticella* con *le soluzioni coniugate di carica* delle soluzioni a energia negativa; per cui, se prendiamo la generica soluzione piana a energia negativa $\Psi = v^{(s)}(\vec p)\, e^{ipx}$, essa individua uno stato di antiparticella libera avente funzione d'onda

$$\Psi_C = \mathcal{C}^{-1}\, \bar v^{(s)}(\vec p)^t\, e^{-ipx} \tag{2.5.569}$$

mentre, a tempi uguali, si ha

$$\left\{\psi_\alpha(x),\, \psi^\dagger_\beta(y)\right\}_{x^0=y^0} = \delta_{\alpha\beta}\; \delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \tag{2.5.578}$$

---

che è evidentemente una soluzione a energia positiva, quindi esprimibile mediante gli spinori di tipo u. Abbiamo infatti che (i v_0 sono reali ...)

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^{-1}\, \bar{v}^{(s)}(\vec{p})^t &= \mathcal{C}^{-1} \left(\bar{v}_0^{(s)} \frac{m - \not{p}}{\sqrt{E_p+m}} \right)^t = \mathcal{C}^{-1} \frac{m - \not{p}^t}{\sqrt{E_p+m}} \gamma^0\, v_0^{*(s)} = \\ &= \frac{m + \not{p}}{\sqrt{E_p+m}}\, \mathcal{C}^{-1}\, \gamma^0\, v_0^{(s)} \end{aligned} \tag{2.5.570}$$

Poiché è immediato, dalla definizione, provare che

$$\mathcal{C}^{-1}\, \gamma^0\, v_0^{(s)} = u_0^{(s)} \tag{2.5.571}$$

ecco che, a quadrimpulso fissato, anche per l'antiparticella, la funzione d'onda ha la stessa forma di quella per la particella, ovvero (in realtá, come vedremo, é ancora possibile un fattore di fase arbitrario ...)

$$\Psi_C = \mathcal{C}^{-1}\, \bar{v}^{(s)}(\vec{p})^t\, e^{-ipx} = u^{(s)}(\vec{p})\, e^{-ipx} \tag{2.5.572}$$

E' ragionevole ? Sì perché sia la particella che l'antiparticella, da un punto di vista puramente cinematico, hanno esattamente le stesse proprietà.
Possiamo quindi concludere, nel caso, per esempio, di elettrone e positrone, che

$$\textit{elettrone} \quad : \quad \Psi(s,\vec{q};x) = <\Omega|\, \psi(x)\, a^\dagger(s,\vec{q})\, |\Omega> = u^{(s)}(\vec{q})\, e^{-iqx} \tag{2.5.573}$$

$$\begin{aligned} \textit{positrone} \quad : \quad & \Psi(s,\vec{q};x) = <\Omega|\, \psi_C(x)\, b^{\dagger(s)}(\vec{q})\, |\Omega> = \\ = \quad & <\Omega|\mathcal{C}^{-1} \sum_r \int \frac{d^3p}{2E(2\pi)^3} \left\{ b(r,\vec{p}) \bar{v}^{(r)t}(\vec{p}) e^{-ipx} + a^\dagger(r,\vec{p}) \bar{u}^{(r)t}(\vec{p}) e^{ipx} \right\} b^\dagger(s,\vec{q})\, |\Omega> = \\ = \quad & \mathcal{C}^{-1} \sum_r \int \frac{d^3p}{2E(2\pi)^3} \bar{v}^{(r)t}(\vec{p}) e^{-ipx} <\Omega| b(r,\vec{p})\, b^\dagger(s,\vec{q})\, |\Omega> = \\ = \quad & \mathcal{C}^{-1} \sum_r \int \frac{d^3p}{2E(2\pi)^3} \bar{v}^{(r)t}(\vec{p}) e^{-ipx} <\Omega| \left\{ b(r,\vec{p})\,,\, b^\dagger(s,\vec{q}) \right\} |\Omega> = \\ = \quad & \mathcal{C}^{-1} \bar{v}^{(s)t}(\vec{q}) e^{-iqx} = u^{(s)}(\vec{q})\, e^{-iqx} \end{aligned} \tag{2.5.574}$$

Dimostriamo quest'ultima relazione[93]. Si ha

$$\begin{aligned}
\left\{\psi_\alpha(x),\,\psi^\dagger_\beta(y)\right\}_{x^0=y^0} \;&=\; \left\{\int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\,\sum_r\left[a(r,\vec p)\,u^{(r)}_\alpha(\vec p)\,e^{-ipx}+b^\dagger(r,\vec p)\,v^{(r)}_\alpha(\vec p)\,e^{ipx}\right],\right.\\
&\left.\int \frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3}\,\sum_s\left[b(s,\vec q)\,v^{+(s)}_\beta(\vec q)\,e^{-iqy}+a^\dagger(s,\vec q)\,u^{+(s)}_\beta(\vec q)\,e^{iqy}\right]\right\}=\\
=\int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\,\frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3}&\left[\sum_{r,s}u^{(r)}_\alpha(\vec p)u^{+(s)}_\beta(\vec q)\,e^{-ipx}\,e^{iqy}\,\left\{a(r,\vec p),\,a^\dagger(s,\vec q)\right\}+\right.\\
&\left.+\sum_{r,s}v^{(r)}_\alpha(\vec p)v^{+(s)}_\beta(\vec q)\,e^{ipx}\,e^{-iqy}\,\left\{b^\dagger(r,\vec p),\,b(s,\vec q)\right\}\right]=\\
=\int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\,\frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3}&\,2E_q\,(2\pi)^3\,\delta^3(\vec p-\vec q)\,\cdot\\
&\cdot\left[\sum_r u^{(r)}_\alpha(\vec p)u^{+(r)}_\beta(\vec q)\,e^{-ipx}\,e^{iqy}+\sum_s v^{(s)}_\alpha(\vec p)v^{+(s)}_\beta(\vec q)\,e^{ipx}\,e^{-iqy}\right]
\end{aligned}\tag{2.5.581}$$

Integrando su $\vec q$, otteniamo quindi

$$\begin{aligned}
\left\{\psi_\alpha(x),\,\psi^\dagger_\beta(y)\right\}_{x^0=y^0} \;&=\; \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\left[e^{-ip(x-y)}\sum_r u^{(r)}_\alpha(\vec p)u^{+(r)}_\beta(\vec p)\;+\right.\\
&+\;\left.e^{ip(x-y)}\sum_s v^{(s)}_\alpha(\vec p)v^{+(s)}_\beta(\vec p)\right]
\end{aligned}$$

ma, per ipotesi, $x^0=y^0$, quindi risulta

$$p(x-y)=-\vec p\cdot(\vec x-\vec y)\tag{2.5.582}$$

poi, quanto al prodotto fra gli spinori, essendo $\bar u\equiv u^+\,\gamma^0$, si ha evidentemente che

$$\sum_r u^{(r)}_\alpha(\vec p)u^{+(r)}_\beta(\vec p)=\sum_r u^{(r)}_\alpha(\vec p)\bar u^{(r)}_\tau(\vec p)\,\gamma^0_{\tau\beta}\tag{2.5.583}$$

[93] Osserviamo che, dalla densità lagrangiana (2.5.352) si ricava che il momento coniugato al campo ψ è dato da

$$\Pi=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\psi)}=i\,\bar\psi\gamma^0=i\psi^+\tag{2.5.579}$$

dunque ci aspetteremmo, a priori, che risultasse

$$\left[\psi_\alpha(x),\,i\psi^+_\beta(y)\right]_{x_0=y_0}=i\,\delta_{\alpha\beta}\;\delta(\vec p-\vec q)\tag{2.5.580}$$

Questo però, come mostra la derivazione che conduce alla (2.5.589), richiederebbe che i commutatori fra gli operatori a e $a^\dagger$ siano opposti a quelli fra b e $b^\dagger$.
Ma nel vuoto non c'è differenza fra cosa definiamo particella e cosa chiamiamo antiparticella e dunque gli operatori di creazione e distruzione a loro associati devono ragionevolmente soddisfare la stessa algebra e questo richiede l'anticommutatore.

e usando la (2.5.419) e la (2.5.425), abbiamo quindi che

$$\sum_r u_\alpha^{(r)}(\vec{p})u_\beta^{+(r)}(\vec{p}) = 2m\,(\Lambda_+)_{\alpha\tau}\,\gamma^0_{\tau\beta} = \Big[(\not{p}+m)\gamma^0\Big]_{\alpha\beta} \tag{2.5.584}$$

Analogamente, per la (2.5.420) e (2.5.427), si ha

$$\begin{aligned}\sum_s v_\alpha^{(s)}(\vec{p})v_\beta^{+(s)}(\vec{p}) &= \sum_s v_\alpha^{(s)}(\vec{p})\bar{v}_\tau^{(s)}(\vec{p})\gamma^0_{\tau\beta} = -2m\,(\Lambda_-)_{\alpha\tau}\,\gamma^0_{\tau\beta} = \\ &= \Big[(\not{p}-m)\gamma^0\Big]_{\alpha\beta}\end{aligned} \tag{2.5.585}$$

Sostituendo, si ha quindi

$$\begin{aligned}\Big\{\psi_\alpha(x),\,\psi^\dagger_\beta(y)\Big\}_{x^0=y^0} &= \int\frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})}\Big[(\not{p}+m)\gamma^0\Big]_{\alpha\beta} + \\ &+ \int\frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}e^{-i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})}\Big[(\not{p}-m)\gamma^0\Big]_{\alpha\beta}\end{aligned} \tag{2.5.586}$$

D'altronde, il secondo integrale, se poniamo $\vec{p}\to-\vec{p}$, diventa

$$\int\frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})}\Big[(E_p\,\gamma^0+\vec{p}\cdot\vec{\gamma}-m)\gamma^0\Big]_{\alpha\beta} \tag{2.5.587}$$

da sommare al primo integrale che esplicitamente vale

$$\int\frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})}\Big[(E_p\,\gamma^0-\vec{p}\cdot\vec{\gamma}+m)\gamma^0\Big]_{\alpha\beta} \tag{2.5.588}$$

per cui, in definitiva, essendo $(\gamma^0)^2 = I$, risulta appunto che

$$\begin{aligned}\Big\{\psi_\alpha(x),\,\psi^\dagger_\beta(y)\Big\}_{x^0=y^0} &= \int\frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\,e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})}\,2E_p\;\delta_{\alpha\beta} = \\ &= \delta_{\alpha\beta}\;\delta^3(\vec{x}-\vec{y})\end{aligned} \tag{2.5.589}$$

A tempi non uguali, procedendo in modo del tutto simile a quanto sopra, troviamo che l'unico anticommutatore non nullo vale

$$\begin{aligned}\Big\{\psi_\alpha(x),\,\overline{\psi}_\beta(y)\Big\} &= (i\gamma^\mu\partial_\mu+m)_{\alpha\beta}\;i\Delta(x-y,m) \\ &\equiv i\,S_{\alpha\beta}(x-y,m)\end{aligned} \tag{2.5.590}$$

dove la funzione Δ è già stata definita attraverso la (2.2.49) e si è posto

$$S_{\alpha\beta}(x-y,m) \equiv (i\gamma^\mu\partial_\mu+m)_{\alpha\beta}\;\Delta(x-y,m) \tag{2.5.591}$$

Risulta infatti

$$\begin{aligned}
\left\{\psi_\alpha(x),\,\overline{\psi}_\beta(y)\right\} &= \left\{\int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\sum_r \left[a(r,\vec p)\,u_\alpha^{(r)}(\vec p)\,e^{-ipx} + b^\dagger(r,\vec p)\,v_\alpha^{(r)}(\vec p)\,e^{ipx}\right],\right.\\
&\left.\int \frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3}\sum_s \left[b(s,\vec q)\,\overline{v}_\beta^{(r)}(\vec q)\,e^{-iqy} + a^\dagger(s,\vec q)\,\overline{u}_\beta^{(r)}(\vec q)\,e^{iqy}\right]\right\} =\\
&= \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\,\frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3}\left[\sum_{r,s} u_\alpha^{(r)}(\vec p)\overline{u}_\beta^{(s)}(\vec q)\,e^{-ipx}\,e^{iqy}\,\left\{a(r,\vec p),\,a^\dagger(s,\vec q)\right\} + \right.\\
&\left. + \sum_{r,s} v_\alpha^{(r)}(\vec p)\overline{v}_\beta^{(s)}(\vec q)\,e^{ipx}\,e^{-iqy}\,\left\{b^\dagger(r,\vec p),\,b(s,\vec q)\right\}\right] =\\
&= \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\,\frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3}\,2E_q\,(2\pi)^3\,\delta^3(\vec p-\vec q)\\
&\left[\sum_r u_\alpha^{(r)}(\vec p)\overline{u}_\beta^{(r)}(\vec q)\,e^{-ipx}\,e^{iqy} + \sum_s v_\alpha^{(s)}(\vec p)\overline{v}_\beta^{(s)}(\vec q)\,e^{ipx}\,e^{-iqy}\right] \qquad (2.5.592)
\end{aligned}$$

e integrando su d^3q otteniamo dunque

$$\begin{aligned}
\left\{\psi_\alpha(x),\,\overline{\psi}_\beta(y)\right\} &= \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\left[e^{-ip(x-y)}\sum_r u_\alpha^{(r)}(\vec p)\,\overline{u}_\beta^{(r)}(\vec p) + e^{ip(x-y)}\sum_s v_\alpha^{(s)}(\vec p)\,\overline{v}_\beta^{(s)}(\vec p)\right] =\\
&= \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\left[e^{-ip(x-y)}(m+\not p) - e^{ip(x-y)}(m-\not p)\right]_{\alpha\beta} =\\
&= (i\gamma^\mu\partial_\mu + m)_{\alpha\beta}\int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\left[e^{-ip(x-y)} - e^{ip(x-y)}\right] \qquad (2.5.593)
\end{aligned}$$

ovvero, date la (2.2.41) e la (2.2.48), abbiamo appunto che

$$\left\{\psi_\alpha(x),\,\overline{\psi}_\beta(y)\right\} = (i\gamma^\mu\partial_\mu + m)_{\alpha\beta}\; i\Delta(x-y;m) \qquad (2.5.594)$$

Per le note proprietà della funzione $\Delta(z;m)$ l'anticommutatore che stiamo considerando soddisfa evidentemente la causalità, essendo comunque nullo quando il quadrivettore $z = x - y$ è $space - like$.

Per quanto riguarda poi il propagatore di Feynman $S_F(x-y)_{\alpha\beta}$, il quale è definito in modo che

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)_{\alpha\beta}\;\; S_F(x-y)_{\beta\rho} = \delta_{\alpha\rho}\,\delta^4(x-y) \qquad (2.5.595)$$

procedendo in tutta analogia si dimostra che esso può essere scritto come[94]

$$S_F(x-y)_{\alpha\beta} = (i\gamma^\mu\partial_\mu + m)_{\alpha\beta}\;\Delta_F(x-y;m) \qquad (2.5.597)$$

[94]Si osservi che dalla definizione segue infatti che

$$\begin{aligned}
&(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)_{\alpha\beta}\;\; S_F(x-y)_{\beta\rho} = (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)_{\alpha\beta}\,(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)_{\beta\rho}\;\;\Delta_F(x-y;m) \;=\\
&= -(\Box + m^2)\;\Delta_F(x-y;m)\;\delta_{\alpha\rho} = \delta_{\alpha\rho}\;\delta^4(x-y) \qquad (2.5.596)
\end{aligned}$$

dove $\Delta_F(x-y;m)$ à definito dalla (2.2.90). Si dimostra altresì che risulta

$$iS_F(x-y)_{\alpha\beta} =< \Omega|\mathcal{T}\left(\psi(x)_\alpha\ \bar{\phi}_\beta(y)\right)|\Omega > \tag{2.5.598}$$

dove, adesso, però, il prodotto T-ordinato per due componenti qualsiasi di campi di Dirac è definito in modo tale che[95]

$$\mathcal{T}\left(A(x)\,B(y)\right) = A(x)B(y)\Theta(x^0-y^0) - B(y)A(x)\Theta(y^0-x^0) \tag{2.5.599}$$

Riguardo alle simmetrie discrete (cfr.(B.7.346)-(B.7.349), (B.7.362)-(B.7.363), (B.7.415)-(B.7.418), (B.7.406), (B.7.408), (B.7.432)-(B.7.433) e (B.7.434)-(B.7.435)), come mostrato in Appendice, abbiamo

Coniugazione di Carica C

$$\left.\begin{array}{lcl}
C\,a(r,\vec{p})\,C^{-1} & = & e^{-i\eta_c}\,b(r,\vec{p})\\
C\,a^\dagger(r,\vec{p})\,C^{-1} & = & e^{i\eta_c}\,b^\dagger(r,\vec{p})\\
C\,b(r,\vec{p})\,C^{-1} & = & e^{i\eta_c}\,a(r,\vec{p})\\
C\,b^\dagger(r,\vec{p})\,C^{-1} & = & e^{-i\eta_c}\,a^\dagger(r,\vec{p})\\
 & & \\
C\,\psi(x)\,C^{-1} & = & e^{-i\eta_c}\,\mathcal{C}^{-1}\,\bar{\psi}^t(x)\\
C\,\bar{\psi}(x)\,C^{-1} & = & e^{i\eta_c}\,\psi^t(x)\,\mathcal{C}^{-1}
\end{array}\right\} \tag{2.5.600}$$

dove $\mathcal{C} \equiv i\gamma^0\gamma^2 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{C}^t = \mathcal{C}^{-1} = -\mathcal{C}$.
Parità P

$$\left.\begin{array}{lcl}
P\,a(r,\vec{p})\,P^{-1} & = & e^{-i\eta_p}\,a(r,-\vec{p})\\
P\,a^\dagger(r,\vec{p})\,P^{-1} & = & e^{i\eta_p}\,a^\dagger(r,-\vec{p})\\
P\,b(r,\vec{p})\,P^{-1} & = & -e^{i\eta_p}\,b(r,-\vec{p})\\
P\,b^\dagger(r,\vec{p})\,P^{-1} & = & -e^{-i\eta_p}\,b^\dagger(r,-\vec{p})\\
 & & \\
P\,\psi(x)\,P^{-1} & = & e^{-i\eta_p}\,\gamma^0\,\psi(Px)\\
P\,\bar{\psi}(x)\,P^{-1} & = & e^{i\eta_p}\,\bar{\psi}(Px)\gamma^0
\end{array}\right\} \tag{2.5.601}$$

Time reversal T

$$\left.\begin{array}{lcl}
T\,a(r,\vec{p})\,T^{-1} & = & e^{-i\eta_T}\,\rho_{rs}\,a(s,-\vec{p})\\
T\,a^\dagger(r,\vec{p})\,T^{-1} & = & e^{i\eta_T}\,\rho_{rs}\,a^\dagger(s,-\vec{p})\\
T\,b(r,\vec{p})\,T^{-1} & = & e^{i\eta_T}\,\rho_{rs}\,b(s,-\vec{p})\\
T\,b^\dagger(r,\vec{p})\,T^{-1} & = & e^{-i\eta_T}\,\rho_{rs}\,b^\dagger(s,-\vec{p})\\
 & & \\
T\,\psi(x)\,T^{-1} & = & e^{-i\eta_T}\,\gamma^1\gamma^3\,\psi(Tx)\\
T\,\bar{\psi}(x)\,T^{-1} & = & e^{i\eta_T}\,\bar{\psi}(Tx)\gamma^3\gamma^1
\end{array}\right\} \tag{2.5.602}$$

[95]cfr. J.D. Bjorken, S.D. Drell "Relativistic quantum fields", pag.65.

dove la matrice reale ρ descrive una rotazione di π intorno all'asse y, ovvero risulta

$$\rho \equiv i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.5.603}$$

Sempre in Appendice (cfr.(B.7.369), (B.7.421), (B.7.446)) viene anche mostrato come queste simmetrie agiscono sulla corrente $J^\mu(x)$.

Per completezza, comunque, riportiamo di seguito l'azione di C, P e T sulle forme bilineari[96] costruite con ψ e $\bar\psi$, comprendenti $J^\mu(x)$, le quali si trasformano sotto il gruppo di Poincaré[97] rispettivamente come uno scalare, uno pseudoscalare, un quadrivettore ($J^\mu(x)$ ...), un pseudovettore e un tensore. Abbiamo

Scalare[98] $Sc(x) \equiv \bar\psi(x)\,\psi(x)$

$$\begin{aligned} &U(a,\Lambda)Sc(x)\,U^{-1}(a,\Lambda) = U(a,\Lambda)\bar\psi(x)\,U^{-1}(a,\Lambda)\,U(a,\Lambda)\psi(x)\,U^{-1}(a,\Lambda) = \\ &= \bar\psi(\Lambda x + a)\,S(\Lambda)\,S^{-1}(\Lambda)\psi(\Lambda x + a) = Sc(\Lambda x + a) \end{aligned} \tag{2.5.606}$$

$$\begin{aligned} &C\,Sc(x)\,C^{-1} = C\,\bar\psi(x)\,C^{-1}\,C\,\psi(x)C^{-1} = e^{i\eta_C}\,\psi^t(x)\mathcal{C}^{-1}\cdot e^{-i\eta_C}\,\mathcal{C}^{-1}\,\bar\psi^t(x) = \\ &= -\psi^t(x)\,\bar\psi^t(x) = \left(\bar\psi(x)\,\psi(x)\right)^t = \bar\psi(x)\,\psi(x) = Sc(x) \end{aligned} \tag{2.5.607}$$

$$\begin{aligned} &P\,Sc(x)\,P^{-1} = P\,\bar\psi(x)\,P^{-1}\,P\,\psi(x)P^{-1} = e^{i\eta_P}\,\bar\psi(Px)\,\gamma^0\cdot e^{-i\eta_P}\,\gamma^0\,\psi(Px) = \\ &= \bar\psi(Px)\,\psi(Px) = Sc(Px) \end{aligned} \tag{2.5.608}$$

$$\begin{aligned} &T\,Sc(x)\,T^{-1} = T\,\bar\psi(x)\,T^{-1}\,T\,\psi(x)T^{-1} = e^{i\eta_T}\,\bar\psi(Tx)\,\gamma^3\gamma^1\cdot e^{-i\eta_T}\,\gamma^1\gamma^3\,\psi(Tx) = \\ &= \bar\psi(Tx)\,\psi(Tx) = Sc(Tx) \end{aligned} \tag{2.5.609}$$

---

[96] I campi spinoriali ψ e $\bar\psi$ sono costituiti, ciascuno, da quattro componenti, quindi, per le possibili forme bilineari costruite con essi, si dispone di sedici gradi di libertà indipendenti. Le forme scalare $Sc \equiv \bar\psi\psi$ e pseudoscalare $Ps \equiv \bar\psi\gamma_5\psi$ ne assorbono uno ciascuno; quella vettoriale (la corrente $J^\mu_V \equiv J^\mu = \bar\psi\gamma_\mu\psi$) e pseudovettoriale ($J^\mu_A \equiv \bar\psi\gamma^\mu\gamma_5\psi$) ne assorbono quattro ciascuna mentre le restanti sei entrano nella forma tensoriale $Ts \equiv \bar\psi\sigma^{\mu\nu}\,\psi$ che è antisimmetrica nello scambio degli indici di Lorentz.

[97] Ricordiamo che, quanto ai campi (cfr.(2.5.551) e (2.5.552)), si ha

$$U(a,\Lambda)\,\psi(x)\,U^{-1}(a,\Lambda) = S^{-1}(\Lambda)\,\psi(a+\Lambda x) \tag{2.5.604}$$
$$U(a,\Lambda)\,\bar\psi(x)\,U^{-1}(a,\Lambda) = \bar\psi(a+\Lambda x)\,S(\Lambda) \tag{2.5.605}$$

[98] Si ricordi che

- $-\psi^t(x)\,\bar\psi^t(x) = \left(\bar\psi(x)\,\psi(x)\right)^t = \bar\psi(x)\,\psi(x)$. La prima eguaglianza è dovuta al fatto che l'operazione di trasposizione comporta lo scambio di operatori che anticommutano; la seconda è dovuta al fatto che, dal punto di vista spinoriale, si tratta di una matrice 1×1;
- $\gamma^2 = I$ mentre $(\gamma^1)^2 = (\gamma^3)^2 = -I$.

Pseudoscalare[99] $Ps(x) \equiv \bar{\psi}(x)\,\gamma_5\,\psi(x)$

$$\begin{aligned}
&U(a,\Lambda)Ps(x)\,U^{-1}(a,\Lambda) = U(a,\Lambda)\bar{\psi}(x)\,U^{-1}(a,\Lambda)\,\gamma_5\,U(a,\Lambda)\psi(x)\,U^{-1}(a,\Lambda) = \\
&= \bar{\psi}(\Lambda x + a)\,S(\Lambda)\,\gamma_5\,S^{-1}(\Lambda)\psi(\Lambda x + a) = \bar{\psi}(\Lambda x + a)\,S(\Lambda)\,S^{-1}(\Lambda)\,\gamma_5\,\psi(\Lambda x + a) = \\
&= \bar{\psi}(\Lambda x + a)\,\gamma_5\,\psi(\Lambda x + a) = Ps(\Lambda x + a)
\end{aligned} \tag{2.5.610}$$

$$\begin{aligned}
&C\,Ps(x)\,C^{-1} = C\,\bar{\psi}(x)\,C^{-1}\,\gamma_5\,C\,\psi(x)C^{-1} = e^{i\eta_C}\,\psi^t(x)\mathcal{C}^{-1}\,\gamma_5\,e^{-i\eta_C}\,\mathcal{C}^{-1}\,\bar{\psi}^t(x) = \\
&= -\psi^t(x)\,\gamma_5^t\,\bar{\psi}^t(x) = \left(\bar{\psi}(x)\,\gamma_5\,\psi(x)\right)^t = \bar{\psi}(x)\,\gamma_5\,\psi(x) = Ps(x)
\end{aligned} \tag{2.5.611}$$

$$\begin{aligned}
&P\,Ps(x)\,P^{-1} = P\,\bar{\psi}(x)\,P^{-1}\,\gamma_5\,P\,\psi(x)P^{-1} = e^{i\eta_P}\,\bar{\psi}(Px)\,\gamma^0\,\gamma_5\,e^{-i\eta_P}\,\gamma^0\,\psi(Px) = \\
&= -\bar{\psi}(Px)\,\gamma_5\,(\gamma^0)^2\,\psi(Px) = -\bar{\psi}(Px)\,\gamma_5\,\psi(Px) = -Ps(Px)
\end{aligned} \tag{2.5.612}$$

$$\begin{aligned}
&T\,Ps(x)\,T^{-1} = T\,\bar{\psi}(x)\,T^{-1}\,\gamma_5^*\,T\,\psi(x)T^{-1} = e^{i\eta_T}\,\bar{\psi}(Tx)\,\gamma^3\gamma^1\,\gamma_5\,e^{-i\eta_T}\,\gamma^1\gamma^3\,\psi(Tx) = \\
&= \bar{\psi}(Tx)\,\gamma^3\gamma^1\,\gamma^1\gamma^3\,\gamma_5\,\psi(Tx) = \bar{\psi}(Tx)\,\gamma_5\,\psi(Tx) = Ps(Tx)
\end{aligned} \tag{2.5.613}$$

Vettoriale[100] $J_V^\mu(x) \equiv \bar{\psi}(x)\,\gamma^\mu\,\psi(x)$

$$\begin{aligned}
&U(a,\Lambda)J_V^\mu(x)\,U^{-1}(a,\Lambda) = U(a,\Lambda)\bar{\psi}(x)\,U^{-1}(a,\Lambda)\,\gamma^\mu\,U(a,\Lambda)\psi(x)\,U^{-1}(a,\Lambda) = \\
&= \bar{\psi}(\Lambda x + a)\,S(\Lambda)\,\gamma^\mu\,S^{-1}(\Lambda)\psi(\Lambda x + a) = \bar{\psi}(\Lambda x + a)\,(\Lambda^{-1})^\mu_{\cdot\nu}\gamma^\nu\,\psi(\Lambda x + a) = \\
&= (\Lambda^{-1})^\mu_{\cdot\nu}\,\bar{\psi}(\Lambda x + a)\,\gamma^\nu\,\psi(\Lambda x + a) = (\Lambda^{-1})^\mu_{\cdot\nu}\,J_V^\nu(\Lambda x + a)
\end{aligned} \tag{2.5.614}$$

$$\begin{aligned}
&C\,J_V^\mu(x)\,C^{-1} = C\,\bar{\psi}(x)\,C^{-1}\,\gamma^\mu\,C\,\psi(x)C^{-1} = e^{i\eta_C}\,\psi^t(x)\mathcal{C}^{-1}\,\gamma^\mu\,e^{-i\eta_C}\,\mathcal{C}^{-1}\,\bar{\psi}^t(x) = \\
&= \psi^t(x)\,(\gamma^\mu)^t\,\bar{\psi}^t(x) = -\left(\bar{\psi}(x)\,\gamma^\mu\,\psi(x)\right)^t = -\bar{\psi}(x)\,\gamma^\mu\,\psi(x) = -J_V^\mu(x)
\end{aligned} \tag{2.5.615}$$

$$\begin{aligned}
&P\,J_V^\mu(x)\,P^{-1} = P\,\bar{\psi}(x)\,P^{-1}\,\gamma^\mu\,P\,\psi(x)P^{-1} = e^{i\eta_P}\,\bar{\psi}(Px)\,\gamma^0\,\gamma^\mu\,e^{-i\eta_P}\,\gamma^0\,\psi(Px) = \\
&= \bar{\psi}(Px)\,\gamma_\mu\;\psi(Px) = (J_V)_\mu(Px)
\end{aligned} \tag{2.5.616}$$

$$\begin{aligned}
&T\,J_V^\mu(x)\,T^{-1} = T\,\bar{\psi}(x)\,T^{-1}\,(\gamma^\mu)^*\,T\,\psi(x)T^{-1} = e^{i\eta_T}\,\bar{\psi}(Tx)\,\gamma^3\gamma^1\,(\gamma^\mu)^*\,e^{-i\eta_T}\,\gamma^1\gamma^3\,\psi(Tx) = \\
&= \bar{\psi}(Tx)\,\gamma^3\gamma^1\,(\gamma^\mu)^*\,\gamma^1\gamma^3\,\psi(Tx) = \bar{\psi}(Tx)\,\gamma_\mu\,\psi(Tx) = (J_V)_\mu(Tx)
\end{aligned} \tag{2.5.617}$$

---

[99] Si ricordi che

- la matrice γ_5 commuta con le $S(\Lambda)$ perchè i generatori della rappresentazione spinoriale sono le matrici $\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2i}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]$ e dunque commutano con la γ_5 poiché essa anticommuta con tutte le γ^μ;
- la matrice γ_5 è reale, coincide con γ_5^t, commuta sia con $\mathcal{C} = i\gamma^0\gamma^2$ come con $\gamma^1\gamma^3$.

[100] Si ricordi che

- $S(\Lambda)\,\gamma^\mu\,S^{-1}(\Lambda) = (\Lambda^{-1})^\mu_{\cdot\nu}\gamma^\nu$; $\mathcal{C}^{-1}\,\gamma^\mu\,\mathcal{C}^{-1} = (\gamma^\mu)^t$; $\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 = \gamma_\mu$; $\gamma^3\gamma^1(\gamma^\mu)^*\gamma^1\gamma^3 = \gamma_\mu$.

Assiale[101] *(pseudovettoriale)* $J^\mu_A(x) \equiv \bar\psi(x)\,\gamma^\mu\gamma_5\,\psi(x)$

$$\begin{aligned}&U(a,\Lambda)J^\mu_A(x)\,U^{-1}(a,\Lambda) = U(a,\Lambda)\bar\psi(x)\,U^{-1}(a,\Lambda)\,\gamma^\mu\gamma_5\,U(a,\Lambda)\psi(x)\,U^{-1}(a,\Lambda) =\\ &= \bar\psi(\Lambda x+a)\,S(\Lambda)\,\gamma^\mu\gamma_5\,S^{-1}(\Lambda)\psi(\Lambda x+a) = \bar\psi(\Lambda x+a)\,S(\Lambda)\,\gamma^\mu\,S^{-1}(\Lambda)\gamma_5\psi(\Lambda x+a) =\\ &= \bar\psi(\Lambda x+a)\,(\Lambda^{-1})^\mu_{.\nu}\gamma^\nu\,\gamma_5\psi(\Lambda x+a) = (\Lambda^{-1})^\mu_{.\nu}\,\bar\psi(\Lambda x+a)\,\gamma^\nu\,\gamma_5\,\psi(\Lambda x+a) =\\ &= (\Lambda^{-1})^\mu_{.\nu}\,J^\nu_A(\Lambda x+a)\end{aligned} \tag{2.5.618}$$

$$\begin{aligned}&C\,J^\mu_A(x)\,C^{-1} = C\,\bar\psi(x)\,C^{-1}\,\gamma^\mu\,\gamma_5\,C\,\psi(x)C^{-1} = e^{i\eta_C}\,\psi^t(x)\mathcal{C}^{-1}\,\gamma^\mu\,\gamma_5\,e^{-i\eta_C}\,\mathcal{C}^{-1}\,\bar\psi^t(x) =\\ &= \psi^t(x)\,\mathcal{C}^{-1}\,\gamma^\mu\,\mathcal{C}^{-1}\,\gamma_5\,\bar\psi^t(x) = \psi^t(x)\,(\gamma^\mu)^t\,\gamma_5^t\,\bar\psi^t(x) = -\left(\bar\psi(x)\,\gamma_5\,\gamma^\mu\,\psi(x)\right)^t =\\ &= -\bar\psi(x)\,\gamma_5\,\gamma^\mu\,\psi(x) = \bar\psi(x)\,\gamma^\mu\,\gamma_5\,\psi(x) = J^\mu_A(x)\end{aligned} \tag{2.5.619}$$

$$\begin{aligned}&P\,J^\mu_A(x)\,P^{-1} = P\,\bar\psi(x)\,P^{-1}\,\gamma^\mu\,\gamma_5\,P\,\psi(x)P^{-1} = e^{i\eta_P}\,\bar\psi(Px)\,\gamma^0\,\gamma^\mu\,\gamma_5\,e^{-i\eta_P}\,\gamma^0\,\psi(Px) =\\ &= -\bar\psi(Px)\,\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0\,\gamma_5\,\psi(Px) = -\bar\psi(Px)\,\gamma_\mu\,\gamma_5\,\psi(Px) = -(J_A)_\mu(Px)\end{aligned} \tag{2.5.620}$$

$$\begin{aligned}&T\,J^\mu_A(x)\,T^{-1} = T\,\bar\psi(x)\,T^{-1}\,(\gamma^\mu\gamma^5)^*\,T\,\psi(x)T^{-1} = e^{i\eta_T}\,\bar\psi(Tx)\,\gamma^3\gamma^1\,(\gamma^\mu)^*\,\gamma_5\,e^{-i\eta_T}\,\gamma^1\gamma^3\,\psi(Tx) =\\ &= \bar\psi(Tx)\,\gamma^3\gamma^1\,(\gamma^\mu)^*\,\gamma^1\gamma^3\,\gamma_5\,\psi(Tx) = \bar\psi(Tx)\,\gamma_\mu\,\gamma_5\,\psi(Tx) = (J_A)_\mu(Tx)\end{aligned} \tag{2.5.621}$$

[101] Si ricordi ancora una volta che

- γ_5 commuta sia con $S(\Lambda)$ che con $\mathcal{C}$ che con $\gamma^1\gamma^3$, mentre anticommuta con γ^0;
- γ_5 è reale e simmetrica, ovvero $\gamma_5 = \gamma_5^* = \gamma_5^t$.

$Tensoriale$[102] $(Ts)^{\mu\nu}(x) \equiv \bar{\psi}(x)\,\sigma^{\mu\nu}\,\psi(x)$

$$U(a,\Lambda)\,(Ts)^{\mu\nu}(x)\,U^{-1}(a,\Lambda) = U(a,\Lambda)\,\bar{\psi}(x)\,U^{-1}(a,\Lambda)\,\sigma^{\mu\nu}\,U(a,\Lambda)\psi(x)\,U^{-1}(a,\Lambda) =$$
$$= \bar{\psi}(\Lambda x + a)\;S(\Lambda)\,\sigma^{\mu\nu}\,S^{-1}(\Lambda)\psi(\Lambda x + a) = (\Lambda^{-1})^{\mu}_{\cdot\,\alpha}(\Lambda^{-1})^{\nu}_{\cdot\,\beta}\bar{\psi}(\Lambda x + a)\,\sigma^{\alpha\beta}\,\psi(\Lambda x + a) =$$
$$= (\Lambda^{-1})^{\mu}_{\cdot\,\alpha}\,(\Lambda^{-1})^{\nu}_{\cdot\,\beta}\,(Ts)^{\alpha\beta}(x)(\Lambda x + a) \tag{2.5.626}$$

$$C\,(Ts)^{\mu\nu}(x)\,C^{-1} = C\,\bar{\psi}(x)\,C^{-1}\,\sigma^{\mu\nu}\,C\,\psi(x)C^{-1} = e^{i\eta_C}\,\psi^t(x)\mathcal{C}^{-1}\,\sigma^{\mu\nu}\,e^{-i\eta_C}\,\mathcal{C}^{-1}\,\bar{\psi}^t(x) =$$
$$= \psi^t(x)\,(\sigma^{\mu\nu})^t\,\bar{\psi}^t(x) = -\left(\bar{\psi}(x)\,\sigma^{\mu\nu}\,\psi(x)\right)^t = -\bar{\psi}(x)\,\sigma^{\mu\nu}\,\psi(x) = -(Ts)^{\mu\nu}(x) \tag{2.5.627}$$

$$P\,(Ts)^{\mu\nu}(x)\,P^{-1} = P\,\bar{\psi}(x)\,P^{-1}\,\sigma^{\mu\nu}\,P\,\psi(x)P^{-1} = e^{i\eta_P}\,\bar{\psi}(Px)\,\gamma^0\,\sigma^{\mu\nu}\,e^{-i\eta_P}\,\gamma^0\,\psi(Px) =$$
$$= \bar{\psi}(Px)\;\sigma_{\mu\nu}\;\psi(Px) = (Ts)_{\mu\nu}(Px) \tag{2.5.628}$$

$$T\,(Ts)^{\mu\nu}(x)\,T^{-1} = T\,\bar{\psi}(x)\,T^{-1}\,(\sigma^{\mu\nu})^*\,T\,\psi(x)T^{-1} = e^{i\eta_T}\,\bar{\psi}(Tx)\,\gamma^3\gamma^1\,(\sigma^{\mu\nu})^*\,e^{-i\eta_T}\,\gamma^1\gamma^3\,\psi(Tx) =$$
$$= -\bar{\psi}(Tx)\,\sigma_{\mu\nu}\psi(Tx) = -(Ts)_{\mu\nu}(Tx) \tag{2.5.629}$$

[102] Essendo $\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2i}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ e ricordando sia che $(\gamma^0)^2 = I$ come pure che $\gamma^1\gamma^3\cdot\gamma^3\gamma^1 = I$, accade che

$$S(\Lambda)\sigma^{\mu\nu}S^{-1}(\Lambda) = \frac{1}{2i}\left[S(\Lambda)\gamma^\mu S^{-1}(\Lambda), S(\Lambda)\gamma^\nu S^{-1}(\Lambda)\right] = \frac{1}{2i}(\Lambda)^{\mu}_{\cdot\,\alpha}(\Lambda)^{\mu}_{\cdot\,\beta}[\gamma^\alpha, \gamma^\beta] =$$
$$= (\Lambda)^{\mu}_{\cdot\,\alpha}(\Lambda)^{\mu}_{\cdot\,\beta}\sigma^{\alpha\beta} \tag{2.5.622}$$
$$\mathcal{C}^{-1}\sigma^{\mu\nu}\mathcal{C}^{-1} = \frac{1}{2i}\mathcal{C}^{-1}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\mathcal{C}^{-1} = -\frac{1}{2i}\mathcal{C}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\mathcal{C}^{-1} = -\frac{1}{2i}[\mathcal{C}\gamma^\mu\mathcal{C}^{-1}, \mathcal{C}\gamma^\nu\mathcal{C}^{-1}] =$$
$$= -\frac{1}{2i}[\mathcal{C}^{-1}\gamma^\mu\mathcal{C}^{-1}, \mathcal{C}^{-1}\gamma^\nu\mathcal{C}^{-1}] = -\frac{1}{2i}\left[(\gamma^\mu)^t, (\gamma^\nu)^t\right] = -\frac{1}{2i}[\gamma^\nu, \gamma^\mu]^t = \frac{1}{2i}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]^t = (\sigma^{\mu\nu})^t \tag{2.5.623}$$
$$\gamma^0\,\sigma^{\mu\nu}\,\gamma^0 = \left[\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0, \gamma^0\gamma^\nu\gamma^0\right] = [\gamma_\mu, \gamma_\nu] = \sigma_{\mu\nu} \tag{2.5.624}$$
$$\gamma^1\gamma^3(\sigma^{\mu\nu})^*\gamma^3\gamma^1 = \gamma^1\gamma^3\left(\frac{1}{2i}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\right)^*\gamma^3\gamma^1 = -\frac{1}{2i}\gamma^1\gamma^3\left[(\gamma^\mu)^*, (\gamma^\nu)^*\right]\gamma^3\gamma^1 =$$
$$= -\frac{1}{2i}[\gamma^1\gamma^3(\gamma^\mu)^*\gamma^3\gamma^1, \gamma^1\gamma^3(\gamma^\nu)^*\gamma^3\gamma^1] = -\frac{1}{2i}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] = -\sigma_{\mu\nu} \tag{2.5.625}$$

Ricapitolando, abbiamo che

$$\left.\begin{array}{lcl}
Sc(x) \equiv \bar{\psi}(x)\,\psi(x) & \xrightarrow{C} & Sc(x) \\
 & \xrightarrow{P} & Sc(Px) \\
 & \xrightarrow{T} & Sc(Tx) \\
 & & \\
Ps(x) \equiv \bar{\psi}(x)\,\gamma_5\,\psi(x) & \xrightarrow{C} & Ps(x) \\
 & \xrightarrow{P} & -Ps(Px) \\
 & \xrightarrow{T} & Ps(Tx) \\
 & & \\
J_V^\mu(x) \equiv \bar{\psi}(x)\,\gamma^\mu\,\psi(x) & \xrightarrow{C} & -J_V^\mu(x) \\
 & \xrightarrow{P} & (J_V)_\mu(Px) \\
 & \xrightarrow{T} & (J_V)_\mu(Tx) \\
 & & \\
J_A^\mu(x) \equiv \bar{\psi}(x)\,\gamma^\mu\gamma_5\,\psi(x) & \xrightarrow{C} & J_A^\mu(x) \\
 & \xrightarrow{P} & -(J_A)_\mu(Px) \\
 & \xrightarrow{T} & (J_A)_\mu(Tx) \\
 & & \\
(Ts)^{\mu\nu}(x) \equiv \bar{\psi}(x)\,\sigma^{\mu\nu}\,\psi(x) & \xrightarrow{C} & -(Ts)^{\mu\nu}(x) \\
 & \xrightarrow{P} & (Ts)_{\mu\nu}(Px) \\
 & \xrightarrow{T} & -(Ts)_{\mu\nu}(Tx)
\end{array}\right\} \tag{2.5.630}$$

2.6 L'equazione di Majorana

Come sappiamo, il campo $\psi(x)$ che verifica l'equazione di Dirac

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\,\psi = 0 \tag{2.6.631}$$

si trasforma, sotto il gruppo di Lorentz $\mathcal{L}_+^\uparrow$ secondo la rappresentazione spinoriale $S(\Lambda)$

$$\Lambda = e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}} \to S(\Lambda) = e^{\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}} \tag{2.6.632}$$

dove $\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2i}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$.
Poiché γ_5 commuta con i generatori $\sigma^{\mu\nu}$, essa commuta con tutte le matrici $S(\Lambda)$ che, quindi, è riducibile risultando la somma diretta della $S(\Lambda)$ ristretta al sottospazio spinoriale individuato dal proiettore chirale $\chi_R \equiv \chi_+ = \frac{1+\gamma_5}{2}$ con la $S(\Lambda)$ ristretta al sottospazio spinoriale individuato dal proiettore chirale $\chi_L \equiv \chi_- = \frac{1-\gamma_5}{2}$.
Nel primo caso la rappresentazione è isomorfa a $SL(2,C)$, mentre nel secondo caso è isomorfa a $SL(2,C)^*$.
In ogni caso, quello che deve essere evidenziato è che queste due rappresentazioni nello spazio "right" e "left" non sono equivalenti fra loro e dunque devono essere tenute algebricamente separate e distinte se vogliamo poter rispettare l'invarianza relativistica.
Riprendiamo adesso l'equazione di Dirac e osserviamo che

$$\begin{aligned} &(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\,\psi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\chi_R + \chi_L)\,(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\,\psi = 0 \\ \Leftrightarrow \quad &\chi_R\,(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\,\psi + \chi_L\,(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\,\psi = 0 \end{aligned} \tag{2.6.633}$$

da cui, moltiplicando per χ_R e χ_L otteniamo il sistema delle seguenti due equazioni, evidentemente equivalente all'equazione di Dirac di partenza

$$\chi_R\,(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\,\psi = 0 \tag{2.6.634}$$

$$\chi_L\,(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\,\psi = 0 \tag{2.6.635}$$

D'altronde $\chi_{R/L}\gamma^\mu = \gamma^\mu \chi_{L/R}$ e quindi le due equazioni precedenti, riscritte in termini delle proiezioni chirali

$$\psi_{R/L} \equiv \chi_{R/L}\psi \tag{2.6.636}$$

tenuto conto, appunto, delle proprietà di anticommutazione della γ_5 con le γ^μ, diventano

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_L = m\,\psi_R \tag{2.6.637}$$

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_R = m\,\psi_L \tag{2.6.638}$$

che si disaccoppiano se $m = 0$, dando luogo alle ben note equazioni di Weyl.

E' interessante che la possibilità di descrivere particelle elementari attraverso l'equazione di Weyl fu rifiutata nel 1933 da Pauli poiché conduceva alla violazione della parità. Il motivo è che, per inversione spaziale, $\psi_R \leftrightarrow \psi_L$ e dunque la conservazione della parità richiede l'esistenza di entrambe le componenti chirali associate alla particella[103].
La scoperta della violazione della parità nel $1956-57$ consentì di poter riesumare l'idea di Weyl e infatti, assumendo massa nulla per il neutrino, questa particella è stata incorporata nel Modello Standard delle interazioni elettrodeboli come descritta da uno spinore di Weyl left-handed.
Questo è potuto accadere proprio perché una particella con massa nulla di spin 1/2 può essere descritta da una teoria spinoriale fatta da solo due componenti indipendenti.
Nel caso di massa diversa da zero, come sappiamo, l'equazione di Dirac prevede quattro componenti che sono legate ai due stati di spin e ai due stati di particella/antiparticella.
Ma queste quattro componenti sono comunque sempre necessarie ?
Majorana dimostrò che, se rinunciamo alla distinzione fra particella e antiparticella, ovvero alla possibilità che le particelle descritte dal campo abbiano associata una qualsivoglia "carica" (sia essa elettrica, leptonica, barionica o di altro tipo ...) allora, in questo caso, si può effettivamente costruire una teoria a due sole componenti indipendenti, anche in presenza di massa.
Ma come la mettiamo con le due equazioni (2.6.637) e (2.6.638), in cui compaiono le componenti di ψ con chiralità[104] diversa ?
Dovrà significare, in qualche modo, che nel caso ipotizzato da Majorana ψ_R e ψ_L non sono, in realtà, fra loro indipendenti.
Cerchiamo di capire come questo possa accadere. Ricordiamo che se $\psi(x)$ è un campo che risolve l'equazione di Dirac libera, allora anche il campo a esso coniugato di carica[105]

$$\psi_C(x) = C\,\psi(x)\,C^{-1} = \mathcal{C}^{-1}\bar{\psi}(x)^t \tag{2.6.640}$$

soddisfa la medesima equazione di Dirac libera. Possiamo dunque, anche per ψ_C, scrivere che

$$\begin{aligned} i\gamma^\mu\partial_\mu(\psi_C)_L &= m\,(\psi_C)_R &(2.6.641)\\ i\gamma^\mu\partial_\mu(\psi_C)_R &= m\,(\psi_C)_L &(2.6.642)\end{aligned}$$

[103]Più precisamente accade che

$$\begin{aligned} P\,\psi_{R/L}(x)\,P^{-1} &= P\,\chi_{R/L}\,\psi(x)\,P^{-1} = \chi_{R/L}\,P\,\psi(x)\,P^{-1} = \chi_{R/L}\,\gamma^0\,\psi(Px) = \\ &= \gamma^0\,\chi_{L/R}\,\psi(Px) = \gamma^0\,\psi_{L/R}(Px) \end{aligned} \tag{2.6.639}$$

[104]Come abbiamo visto, la chiralità ha anche rilevanza per quanto riguarda la rappresentazione del gruppo di Lorentz.
[105]Qui abbiamo assunto, senza perdita di generalità, che la fase arbitraria $e^{-i\eta_C}$ sia uguale all'unità.

Ma osserviamo adesso che risulta

$$\begin{aligned}
(\psi_L)_C &\equiv \mathcal{C}^{-1}\,\bar{\psi}_L^t = \mathcal{C}^{-1}\left\{\left[\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\psi\right]^\dagger\gamma^0\right\}^t = \mathcal{C}^{-1}\left[\psi^\dagger\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\gamma^0\right]^t = \\
&= \mathcal{C}^{-1}\,\gamma^0\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)(\psi^\dagger)^t = \mathcal{C}^{-1}\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\gamma^0(\psi^\dagger)^t = \\
&= \left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\mathcal{C}^{-1}\left(\psi^\dagger\gamma^0\right)^t = \left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\mathcal{C}^{-1}\,\bar{\psi}^t = \left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\psi_C = \\
&= (\psi_C)_R
\end{aligned} \tag{2.6.643}$$

e, in modo analogo, troviamo che

$$(\psi_R)_C = (\psi_C)_L \tag{2.6.644}$$

Poiché $(\psi_R)_C$ è in realtà left-handed e $(\psi_L)_C$ è right-handed, questo suggerisce il fatto che potrà essere possibile rispettare le condizioni di chiralità di cui alle equazioni (2.6.637)-(2.6.638) ponendo

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\psi_L = m\,(\psi_L)_C \tag{2.6.645}$$

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\psi_R = m\,(\psi_R)_C \tag{2.6.646}$$

ovvero imponendo la condizione di Majorana, per la quale

$$\psi_R = (\psi_L)_C; \qquad \psi_L = (\psi_R)_C \tag{2.6.647}$$

Si osservi, a questo punto, che le due equazioni (2.6.645) e (2.6.646) sono, in realtà, la stessa equazione, infatti, applicando una seconda volta la simmetria C, per esempio, alla (2.6.645) e usando la (2.6.647) otteniamo la (2.6.646). Si osservi altresì che la condizione di Majorana implica direttamente che il campo ψ sia autoconiugato di carica, cioè che $\psi = \psi_C$, infatti ripartendo dalla decomposizione del campo nelle sue due componenti chirali

$$\psi = \psi_L + \psi_R \tag{2.6.648}$$

e usando la condizione (2.6.647), si ottiene

$$\begin{aligned}
\psi &= \psi_L + \psi_R = \psi_L + (\psi_L)_C \\
&\Leftrightarrow \quad \psi_C \equiv C\,\psi\,C^{-1} = C\,(\psi_L)\,C^{-1} + C\,((\psi_L)_C)\,C^{-1} \\
&\Leftrightarrow \quad \psi_C = (\psi_L)_C + \psi_L = \psi
\end{aligned} \tag{2.6.649}$$

Se usiamo adesso le γ nella rappresentazione di Weyl, dove

$$\gamma_W^\mu \equiv W\,\gamma^\mu\,W^{-1} \tag{2.6.650}$$

con γ^μ che sta per le consuete matrici gamma nella rappresentazione di Pauli-Dirac, mentre

$$W = W^\dagger = W^{-1} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\gamma_0 + \gamma_5) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I & I \\ I & -I \end{pmatrix} \tag{2.6.651}$$

ecco che, poiché risulta che $\gamma_{W5} = \gamma_0$, i proiettori chirali diventano

$$\chi_{W\pm} = \frac{1 \pm \gamma_{W5}}{2} = \frac{1 \pm \gamma_0}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I(1 \pm 1 & 0 \\ 0 & I(1 \mp 1 \end{pmatrix} \tag{2.6.652}$$

e dunque

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix} \tag{2.6.653}$$

da cui è immediato concludere che le due equazioni (2.6.645) e (2.6.646) sono riassunte dalla singola equazione (di Majorana)

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi = m\, \psi_C \tag{2.6.654}$$

che ne costituisce una sintesi, valida indipendentemente dalla rappresentazione delle matrici γ.

Un'altra rappresentazione delle matrici γ^μ molto interessante per l'argomento che stiamo trattando è la rappresentazione di Majorana stessa, in cui accade che tutte le matrici γ^μ risultano immaginarie pure.
Questa rappresentazione, rispetto alla rappresentazione di Pauli-Dirac, è definita dalla relazione

$$\gamma^\mu_M = \tilde{M}\,\gamma^\mu \tilde{M}^\dagger \tag{2.6.655}$$

dove

$$\tilde{M} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I - i\sigma_2 & I + i\sigma_2 \\ -iI - \sigma_2 & iI - \sigma_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \tilde{M}^\dagger = \tilde{M}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I + i\sigma_2 & iI - \sigma_2 \\ I - i\sigma_2 & -\,iI - \sigma_2 \end{pmatrix} \tag{2.6.656}$$

Risulta allora che (si ricordi che $\sigma_i^2 = I$ e che $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 0$ se $i \neq j$)

$$\begin{aligned}
\gamma^0_M &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I & -\,i\sigma_2 \\ -\sigma_2 & -\,iI \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -\,\sigma_2 \\ i\sigma_2 & iI \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 0 & iI \\ -iI & 0 \end{pmatrix} && (2.6.657) \\
\gamma^1_M &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I & -\,i\sigma_2 \\ -\sigma_2 & -\,iI \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\,\sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -\,\sigma_2 \\ i\sigma_2 & iI \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -\,i\sigma_1 \\ -i\sigma_1 & 0 \end{pmatrix} && (2.6.658) \\
\gamma^2_M &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I & -\,i\sigma_2 \\ -\sigma_2 & -\,iI \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\,\sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -\,\sigma_2 \\ i\sigma_2 & iI \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} -iI & 0 \\ 0 & iI \end{pmatrix} && (2.6.659) \\
\gamma^3_M &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I & -\,i\sigma_2 \\ -\sigma_2 & -\,iI \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\,\sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -\,\sigma_2 \\ i\sigma_2 & iI \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -\,i\sigma_3 \\ -i\sigma_3 & 0 \end{pmatrix} && (2.6.660)
\end{aligned}$$

mentre, per quanto riguarda γ_{5M}, abbiamo

$$\begin{aligned}
\gamma_{5M} &= i\,\gamma^0_M\,\gamma^1_M\,\gamma^2_M\,\gamma^3_M = i\begin{pmatrix} 0 & iI \\ -iI & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\,i\sigma_1 \\ -i\sigma_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -iI & 0 \\ 0 & iI \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\,i\sigma_3 \\ -i\sigma_3 & 0 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -\,\sigma_2 \\ -\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} && (2.6.661)
\end{aligned}$$

Il fatto che le matrici γ^μ siano tutte immaginarie pure significa che, nella rappresentazione di Majorana, l'equazione di Dirac

$$(i\gamma^\mu_M \partial_\mu - m)\ \psi_M(x) = 0 \tag{2.6.662}$$

è reale e dunque se $\psi_M(x)$ ne è una soluzione, allora anche $\psi^*_M(x)$ deve esserlo.
Questo significa che, per esempio, se

$$\psi(x) = u(p)\, e^{-ipx} \tag{2.6.663}$$

è una soluzione a energia positiva, allora

$$\psi^*(x) = u^*(p)\, e^{ipx} \tag{2.6.664}$$

sarà certamente una soluzione della stessa equazione, corrispondente però a energia negativa.
Una relazione fra gli spinori $u^*(p)$ e gli spinori $v(p)$ (e viceversa), in realtà, l'abbiamo già incontrata quando, proprio a proposito della coniugazione di carica, abbiamo visto che

$$\mathcal{C}^{-1}\,(\bar{u}^s(\vec{p}))^t = i\gamma^2\, u^*(\vec{p}) = v^s(\vec{p}) \tag{2.6.665}$$
$$\mathcal{C}^{-1}\,(\bar{v}^s(\vec{p}))^t = i\gamma^2\, v^*(\vec{p}) = u^s(\vec{p}) \tag{2.6.666}$$

Ma vediamo adesso cosa succede in rappresentazione di Majorana e iniziamo partendo dagli spinori $u(p)$: abbiamo

$$\begin{aligned} u^{(r)}_M(\vec{p}) &= \tilde{M}\, u^{(r)}(\vec{p}) = \tilde{M}\,\frac{m+\not p}{\sqrt{E_p+m}}\,u^{(r)}_0 \equiv \tilde{M}\,\frac{m+p_\mu\,\gamma^\mu}{\sqrt{E_p+m}}\,u^{(r)}_0 = \\ &= \frac{m+p_\mu\,\gamma^\mu_M}{\sqrt{E_p+m}}\,\tilde{M}\,u^{(r)}_0 \equiv \frac{m+\not p_M}{\sqrt{E_p+m}}\,u^{(r)}_{0M} \end{aligned} \tag{2.6.667}$$

dove abbiamo posto $\not p_M \equiv p_\mu\,\gamma^\mu_M$ e $u^{(r)}_{0M} \equiv \tilde{M}\,u^{(r)}_0$.
Procedendo in modo analogo per gli spinori di tipo v, otteniamo

$$v^{(r)}_M(\vec{p}) = \frac{m-\not p_M}{\sqrt{E_p+m}}\,v^{(r)}_{0M} \tag{2.6.668}$$

Ma essendo le matrici γ immaginarie pure, evidentemente avremo che

$$u^{(r)*}_M(\vec{p}) = \frac{m-\not p_M}{\sqrt{E_p+m}}\,u^{(r)*}_{0M} \tag{2.6.669}$$
$$v^{(r)*}_M(\vec{p}) = \frac{m+\not p_M}{\sqrt{E_p+m}}\,v^{(r)*}_{0M} \tag{2.6.670}$$

D'altronde

$$\begin{aligned} u^{(r)}_{0M} &= \tilde{M}\,u^{(r)}_0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I-i\sigma_2 & I+i\sigma_2 \\ -iI-\sigma_2 & iI-\sigma_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w^{(r)} \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} w^{(r)} - i\sigma_2\,w^{(r)} \\ -i\,w^{(r)} - \sigma_2\,w^{(r)} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.6.671}$$

$$
\begin{aligned}
v_{0M}^{(r)} &= \tilde{M}\, v_0^{(r)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I - i\sigma_2 & I + i\sigma_2 \\ -iI - \sigma_2 & iI - \sigma_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{w}^{(r)} \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \tilde{w}^{(r)} + i\sigma_2\, \tilde{w}^{(r)} \\ i\,\tilde{w}^{(r)} - \sigma_2\, \tilde{w}^{(r)} \end{pmatrix} \qquad (2.6.672)
\end{aligned}
$$

Ma, come già sappiamo, risulta

$$\tilde{w}^{(r)} = -i\sigma_2 w^{(r)} \qquad (2.6.673)$$

e dunque (si ricordi che $\sigma_2^2 = I, \sigma_2 = -\sigma_2^*$)

$$v_{0M}^{(r)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i\sigma_2\, w^{(r)} + w^{(r)} \\ \sigma_2\, w^{(r)} + i\, w^{(r)} \end{pmatrix} = u_{0M}^{(r)*} \qquad (2.6.674)$$

per cui, nella rappresentazione di Majorana, risulta semplicemente che

$$
\begin{aligned}
u_M^{(r)*}(\vec{p}) &= \frac{m - \not{p}_M}{\sqrt{E_p + m}}\, v_{0M}^{(r)} = v_M^{(r)}(\vec{p}) \qquad (2.6.675) \\
v_M^{(r)*}(\vec{p}) &= \frac{m + \not{p}_M}{\sqrt{E_p + m}}\, u_{0M}^{(r)} = u_M^{(r)}(\vec{p}) \qquad (2.6.676)
\end{aligned}
$$

Venendo infine alla rappresentazione spettrale del campo di Majorana, si ha

$$
\begin{aligned}
\psi(x) &= \sum_{r=1}^{2}\int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\{a^{(r)}(\vec{p})\, u^{(r)}(\vec{p})\, e^{-ipx} \;+\; a^{\dagger(r)}(\vec{p})\, v^{(r)}(\vec{p})\, e^{ipx}\} \qquad (2.6.677) \\
\bar{\psi}(x) &= \sum_{r=1}^{2}\int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\{a^{(r)}(\vec{p})\, \bar{v}^{(r)}(\vec{p})\, e^{-ipx} \;+\; a^{\dagger(r)}(\vec{p})\, \bar{u}^{(r)}(\vec{p})\, e^{ipx}\} \qquad (2.6.678)
\end{aligned}
$$

con, in quanto alla coniugazione di carica,

$$C\, a^{(r)}(\vec{p})\, C^{-1} = a^{(r)}(\vec{p}); \qquad C\, a^{\dagger(r)}(\vec{p})\, C^{-1} = a^{\dagger(r)}(\vec{p}) \qquad (2.6.679)$$

per cui risulta appunto che

$$C\,\psi(x)\, C^{-1} \equiv \psi_C(x) = \psi(x) \qquad (2.6.680)$$

Appendice A

Appendix: Generalità

A.1 Le unità di misura

Il sistema di unità di misura di cui faremo uso, se non altrimenti specificato, è il sistema *cgs es* (di Gauss) ed esso fornisce i seguenti valori delle costanti universali più comuni (1 $ues = \frac{1}{2997924580}$ *coulomb*, 1 $erg = 10^{-7}$ J)

$$\begin{array}{rcl} carica\ dell'elettrone & e & = & 4.8032 \times 10^{-10}\, ues \\ massa\ dell'elettrone & m & = & 9.1095 \times 10^{-28}\, g \\ costante\ di\ Planck & \hbar & = & \frac{h}{2\,\pi} = 1.05457266 \times 10^{-27}\, erg \cdot s \\ velocita'\ della\ luce & c & = & 2.99792458 \times 10^{10}\, cm/s \end{array}$$

Comunque, siccome questo sistema di unità di misura non è sempre di pratica applicazione in fisica nucleare e subnucleare, in quanto le sue unità di misura sono spesso troppo grandi per la descrizione di sistemi di particelle,

- per quel che riguarda le distanze, useremo spesso il $fermi$ (equivalente al $femtometro$, definito come

$$1\ fermi = 1\ fm = 10^{-13}\ cm = 10^{-15}\ m = 10^{-5}\,\text{Å}ngstrom;$$

- per l'energia, useremo l'*elettronvolt* (ed i suoi multipli), legato al sistema *cgs* ed SI dalla equivalenza

$$1\ eV = 1.60219 \cdot 10^{-12}\, erg = 1.60219 \cdot 10^{-19}\, J;$$

- per le masse delle particelle, invece dei grammi, useremo gli $\frac{eV}{c^2}$ e relativi multipli, per cui la massa dell'elettrone, per esempio, è

$$m_e = 9.1095 \cdot 10^{-28} \cdot (2.99792458 \cdot 10^{10})^2 \frac{erg}{c^2} = 8.187 \cdot 10^{-7} \frac{erg}{c^2} = 0.511 \frac{MeV}{c^2}$$

poi, siccome molto spesso, sarà più comodo porre $c = 1$, scriveremo anche

$$m_e = 0.511\ MeV;$$

- per l'impulso, coerentemente con quanto sopra, useremo spesso le unità $\frac{eV}{c}$ e relativi multipli. In questo modo, un elettrone che abbia una velocità v, possiede un impulso[1]

$$p = mv = mc\,\beta = 0.511\,\beta\ \frac{MeV}{c}.$$

Nel sistema *cgs es* (di Gauss), le equazioni di Maxwell nel vuoto si scrivono nel modo seguente

$$\begin{array}{rclcrcl} div\vec{E} & = & 4\pi\,\rho; & & rot\vec{E} & = & -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ div\vec{B} & = & 0; & & rot\vec{B} & = & \frac{4\pi}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \end{array} \tag{A.1.1}$$

e la costante di struttura fina α è data da

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar\,c} \tag{A.1.2}$$

Per confronto, invece, nel Sistema Internazionale (SI) ed in quello di Heaviside-Lorentz (HL) risulta[2]

$$\alpha = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\,\hbar c}\right)_{SI} = \left(\frac{e^2}{4\pi\,\hbar c}\right)_{HL} = \left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)_{Gauss} = \frac{1}{137.035\,099\,76} \tag{A.1.4}$$

Ricordiamo infine che, sempre nel SI, i prefissi relativi ai multipli e sottomultipli delle unità di misura sono i seguenti:

[1]Se $\beta \equiv v/c \approx 1$, allora, in realtà, come è dimostrato nel testo, $p = mc\,\gamma\,\beta$, dove $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$, comunque, è un numero puro e quindi senza dimensioni.

[2]Ricordiamo che nel sistema LH i campi e le cariche sono quelli del sistema cgs di Gauss, ma divisi per $\sqrt{4\pi}$, e dunque le equazioni di Maxwell si scrivono nel modo seguente

$$\begin{array}{rclcrcl} div\vec{E} & = & \rho; & & rot\vec{E} & = & -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ div\vec{B} & = & 0; & & rot\vec{B} & = & \frac{1}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \end{array} \tag{A.1.3}$$

In particolare, $q_{HL} = \sqrt{4\pi}\,q_{cgs}$, da cui, se $\hbar = c = 1$, ne segue che $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$.

Factor	Name	Symbol	Factor	Name	Symbol
10^{24}	yotta	Y	10^{-1}	deci	d
10^{21}	zetta	Z	10^{-2}	centi	c
10^{18}	exa	E	10^{-3}	milli	m
10^{15}	peta	P	10^{-6}	micro	µ
10^{12}	tera	T	10^{-9}	nano	n
10^{9}	giga	G	10^{-12}	pico	p
10^{6}	mega	M	10^{-15}	femto	f
10^{3}	kilo	k	10^{-18}	atto	a
10^{2}	hecto	h	10^{-21}	zepto	z
10^{1}	deka	da	10^{-24}	yocto	y

Figura A.1: *Prefissi nel Sistema Internazionale*

A.2 Le notazioni

La convenzione sugli indici che seguiremo è quella usata nel libro *Relativistic Quantum Mechanics* di Bjorken e Drell. Gli indici greci (α, β, ..) vanno da 0 a 3, mentre gli indici italici (i, j, ..) vanno da 1 a 3.

Il tensore metrico $g_{\mu\nu} \equiv \delta_{\mu\nu} = \delta^{\mu\nu} \equiv g^{\mu\nu}$ è tale che

$$\delta^{00} = +1 \qquad\qquad \delta^{11} = \delta^{22} = \delta^{33} = -1 \tag{A.2.5}$$

ed il prodotto scalare di due quadrivettori p e q è indicato semplicemente con il simbolo pq, oppure (pq), se il simbolo senza parentesi può dar luogo ad errori di interpretazione

$$pq \equiv p^\mu q_\mu \equiv p^\mu \delta_{\mu\nu} q^\nu \tag{A.2.6}$$

Dato un quadrivettore p, rappresenteremo poi con p^2 la sua lunghezza invariante

$$p^2 \equiv (p\,p) = p^\mu\, p_\mu \tag{A.2.7}$$

che, come è noto, può essere sia positiva che negativa o nulla.

L'operatore di D'Alembert è definito come

$$\Box \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \partial_0^2 - \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i} \tag{A.2.8}$$

Per quanto riguarda, poi, le matrici γ^μ di Dirac, ricordiamo che esse soddisfano le seguenti condizioni generali:

$$(\gamma^0)^2 = I \tag{A.2.9}$$
$$(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0 \tag{A.2.10}$$
$$(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 \tag{A.2.11}$$
$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\delta^{\mu\nu} \tag{A.2.12}$$

Per definizione poi, se p è un quadrivettore, allora

$$p^\mu\,\gamma_\mu = p_\mu\,\gamma^\mu \equiv \not{p} \tag{A.2.13}$$

La matrice γ_5 è definita dal prodotto

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \tag{A.2.14}$$

e risulta

$$\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0 \tag{A.2.15}$$
$$(\gamma_5)^\dagger = \gamma_5 \tag{A.2.16}$$
$$(\gamma_5)^2 = I \tag{A.2.17}$$

mentre

$$\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2i}\,[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \tag{A.2.18}$$

Dove necessario, adotteremo la rappresentazione di Pauli-Dirac delle matrici γ, i.e.

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \tag{A.2.19}$$

dove σ_i sono le usuali matrici di Pauli, i.e.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{A.2.20}$$

ed in questa rappresentazione, la matrice γ_5 assume la forma

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \tag{A.2.21}$$

Appendice B

Appendix: C, P, T sui campi quantizzati

B.1 Introduzione

Anche allo scopo di introdurre la nozione di simmetria in QFT, assumeremo in generale che, in stretta analogia con quanto fatto nello schema di prima quantinazione, esistano operatori $\mathcal{O}$ capaci di trasformare gli stati in modo da lasciare invariata la struttura probabilistica dello spazio da essi costituito. Visto come isomorfismo dell'algebra degli operatori in sé, quello indotto dall'operatore $\mathcal{O}$ dovrà necessariamente essere compatibile con le condizioni di quantizzazione, cioè dovrà rispettare l'algebra dei campi.
Al solito, questa condizione sarà automaticamente soddisfatta se definiremo l'operatore su una base dello spazio di Hilbert, mentre dovrà essere imposta se l'isomorfismo dell'algebra in sé verrà costruito in base a qualche ragione a priori.
Un operatore che soddisfi le condizioni precedenti è una *simmetria*.
Se poi accade anche che

- lo stato di minima energia (vuoto) è non degenere e $\mathcal{O}$-invariante,
- la lagrangiana $\mathcal{L}(x)$ è invariante in forma sotto l'operatore $\mathcal{O}$,

allora essa è detta *simmetria conservata* o *esatta* o anche *invarianza*.
Si osservi che il rispetto della seconda condizione di cui sopra implica che la trasformazione $\mathcal{O}$ rispetti la dinamica, ovvero che le equazioni di moto siano $\mathcal{O}$-invarianti, cioè, che, al solito, sia

$$[\mathcal{O}, H] = 0 \tag{B.1.1}$$

La simmetria è rotta se la lagrangiana $\mathcal{L}$ non è $\mathcal{O}$-invariante, mentre viene detta *rotta spontaneamente* se, pur essendo la lagrangiana $\mathcal{O}$-invariante, è lo stato di minima energia, cioè lo stato di vuoto, a essere degenere e non $\mathcal{O}$-invariante.

Passiamo adesso a vedere come agiscono sui campi quantizzati le trasformazioni di coniugazione di carica C, di parità P e di inversione temporale T, facendoci guidare da quanto già visto nello schema di prima quantizzazione nonché dal concetto classico che abbiamo di loro per quanto riguarda l'azione di queste trasformazioni nello spazio[1] di Fock di particella libera, ovvero sugli operatori di creazione e distruzione.

Per quanto detto prima, volendo che C, P e T siano simmetrie, richiederemo altresì che lo stato di vuoto sia non degenere e risulti C, P e T invariante[2], cioè tale che

$$C|\Omega>= P|\Omega>= T|\Omega>= |\Omega> \tag{B.1.3}$$

La simmetria C

Classicamente, la simmetria di coniugazione di carica C comporta il cambiamento di segno della carica elettrica e dei campi elettrici $\vec{E}$ e magnetici $\vec{B}$. In questo modo, la lagrangiana[3] del campo elettromagnetico in interazione con una quadricorrente[4] $e\,J^\mu$

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}(x)\,F_{\mu\nu}(x) - eJ^\mu(x)A_\mu(x) \tag{B.1.4}$$

risulta evidentemente C-invariante in quanto, sotto l'azione di C, si ha

$$\begin{array}{ll} A^\mu \to -A^\mu & \quad F^{\mu\nu} \to -F^{\mu\nu} \\ J^\mu \to -J^\mu & \end{array} \tag{B.1.5}$$

e quindi, in elettrodinamica classica, la simmetria C risulta essere conservata.

[1] Ricordiamo a questo proposito che lo spazio di Fock è lo spazio di Hilbert che ha per base lo stato di vuoto IΩ> il quale, per ipotesi, è unico, e gli stati di (multi)particella/antiparticella descritti come autostati dell'impulso, cioè

$$\begin{array}{l} |\Omega> \\ a^\dagger(\vec{p}_1)...a^\dagger(\vec{p}_n)\,b^\dagger(\vec{p}_1)...b^\dagger(\vec{p}_m)|\Omega>; \quad con \quad n+m \geq 1, \quad n,m \geq 0 \end{array}$$

[2] A priori basterebbe imporre l'invarianza dello stato di vuoto e non necessariamente del vetŋtore di stato che lo rappresenta. Questo significa che, se indichiamo con Θ una qualsiasi delle tre simmetrie C, P e T, l'invarianza del vuoto impone solo che

$$\Theta|\Omega>= e^{i\theta}|\Omega> \tag{B.1.2}$$

L'ipotesi che facciamo è quella di riassorbire comunque questa fase nella definizione stessa della simmetria, in modo che valga comunque la (B.1.3).

[3] Cfr. J.D. Bjorkeen, S.D. Drell: *Relativistic Quantum Fields*, McGraw-Hill, 1965, pag. 70 e 86.

[4] Fattorizziamo il valore assoluto della carica elettrica in modo che J^μ rappresenti la densità di corrente legata all'invarianza della lagrangiana per trasformazioni di gauge di prima specie.

In QFT manterremo ancora, senz'altro, la richiesta caratterizzante di questa simmetria, ovvero che sia

$$C\,A^\mu(x)\,C^{-1} = -A^\mu(x) \tag{B.1.6}$$

e quindi, affinché C possa essere una simmetria conservata non solo per il campo libero, ma anche nel caso di interazione elettromagnetica, sarà necessario, quanto alla densità di corrente, che risulti

$$C\,J_\mu(x)\,C^{-1} = -J_\mu(x) \tag{B.1.7}$$

Naturalmente la densità di quadricorrente è costruita a partire dai campi che descrivono le particelle, quindi, se vogliamo che C sia una simmetria conservata anche in QFT, occorrerà definirla sui campi stessi in modo che

- garantisca la validità della (B.1.7);
- garantisca che anche la lagrangiana libera del campo sia C-invariante;
- garantisca il rispetto della struttura algebrica costruita con i campi, ovvero il rispetto delle regole di commutazione/anticommutazione che li riguardano.

Richiederemo inoltre, così come abbiamo visto accadere in prima quantizzazione, che questa simmetria sia unitaria.

La simmetria P

Classicamente la simmetria di parità P è la simmetria legata all'inversione degli assi spaziali, cioè tale per cui

$$\vec{x} \xrightarrow{P} -\vec{x}; \qquad\qquad t \xrightarrow{P} t \tag{B.1.8}$$

Secondo questa simmetria, quindi, ci aspettiamo che le grandezze vettoriali cambino di segno, mentre quelle pseudovettoriali non lo facciano.
Per esempio, ci aspettiamo che

$$\vec{P} \xrightarrow{P} -\vec{P}; \qquad\qquad \vec{J} \xrightarrow{P} \vec{J} \tag{B.1.9}$$

$$\vec{E}(\vec{x},t) \xrightarrow{P} -\vec{E}(-\vec{x},t); \qquad\qquad \vec{B}(\vec{x},t) \xrightarrow{P} \vec{B}(-\vec{x},t) \tag{B.1.10}$$

$$A^\mu(\vec{x},t) \xrightarrow{P} A_\mu(-\vec{x},t) \tag{B.1.11}$$

Per quanto riguarda gli stati abbiamo già visto, nello schema della prima quantizzazione, che l'operatore P che descrive la trasformazione di parità, può essere definito in modo che P sia una simmetria unitaria tale che

$$P^2 = I \tag{B.1.12}$$

Se prendiamo allora, per esempio, una base di autostati simultanei dell'impulso e della componente z dello spin, questa simmetria. dovrà agire in modo che

$$P|\vec{p}, s >= e^{i\eta_P} | - \vec{p}, s > \tag{B.1.13}$$

e la fase η_P dovrà essere la stessa su tutti i vettori con cui si possono fare sovrapposizioni lineari, se vogliamo che

$$P\left(\alpha\,|\vec{p}, s_1 > +\beta\,|\vec{q}, s_2 >\right) \propto \alpha\,| - \vec{p}, s_1 > +\beta\,| - \vec{q}, s_2 > \tag{B.1.14}$$

Questo implica che, limitandoci per esempio solo allo spazio degli stati di particella singola, la fase η_P debba essere unica su tutti i vettori dello spazio. Dalla condizione per cui

$$P^2 = I \quad \Rightarrow \quad e^{2i\eta_P} = 1 \tag{B.1.15}$$

segue infine che

$$e^{i\eta_P} = \pm 1 = e^{-i\eta_P} \tag{B.1.16}$$

La simmetria T

Come abbiamo avuto modo di concludere già nell'ambito dello schema della prima quantizzazione della Meccanica Quantistica, l'operatore T di inversione temporale è antiunitario. In quel contesto, ma in tutta generalità, abbiamo altresì osservato che questo operatore è una simmetria conservata del sistema se, dato uno stato $|A>$ al tempo t e lasciato evolvere per un intervallo di tempo Δt in modo da ottenere lo stato $|B>$, allora, preso il suo *riflesso*[5] *nel tempo* $|B>_T$ e lasciato evolvere con la stessa dinamica per lo stesso intervallo di tempo Δt, otteniamo di nuovo il riflesso nel tempo $|A>_T$ dello stato $|A>$ di partenza.

Classicamente abbiamo anche già discusso come questa simmetria abbia in realtà a che fare con la reversibilità di un processo fisico, associata alla trasformazione

$$t \xrightarrow{T} t' = -t \tag{B.1.18}$$

per quanto concerne il suo effetto sulle variabili cinematiche che definiscono lo stato.

[5]Per esempio, per uno stato che sia autostato simultaneo dell'impulso, di J^2 e di J_z il riflesso nel tempo si ottiene dallo stato di partenza invertendo il segno dell'autovalore dell'impulso e della componente z del momento angolare, ovvero

$$|\vec{p},\, J,\, m > \xrightarrow{T} \propto | - \vec{p},\, J,\, -m > \tag{B.1.17}$$

Sotto l'operatore T, dunque, se vogliamo garantire la validità dell'analogia classica, deve accadere, per esempio, che

$$T\,\vec{X}\,T^{-1} = \vec{X} \tag{B.1.19}$$
$$T\,\vec{P}\,T^{-1} = -\vec{P} \tag{B.1.20}$$
$$T\,\vec{J}\,T^{-1} = -\vec{J} \tag{B.1.21}$$

e inoltre, assunto che la densità di carica elettrica sia scalare per inversione temporale, dovrà essere altresì che[6]

$$T\,\vec{E}(\vec{x},t)\,T^{-1} = \vec{E}(\vec{x},-t); \qquad T\,\vec{B}(\vec{x},t)\,T^{-1} = -\vec{B}(\vec{x},-t) \tag{B.1.27}$$
$$\Leftrightarrow \quad T\,A^\mu(\vec{x},t)\,T^{-1} = A_\mu(\vec{x},-t) \tag{B.1.28}$$

Poiché, sempre sulla base dell'analogia classica, dovrà anche essere

$$T\,J^\mu(\vec{x},t)\,T^{-1} = J_\mu(\vec{x},-t) \tag{B.1.29}$$

ecco che l'interazione elettromagnetica, descritta nella lagrangiana dal termine $J_\mu\,A^\mu$ risulterà così essere T-invariante.

Dovremo quindi costruire T nell'ambito della QFT usando l'analogia classica e avendo in mente di mantenerla come simmetria conservata in QED.

---

[6] Il campo elettrico ha origine nelle cariche, che sono assunte essere scalari sotto T, quindi non cambia di segno, a differenza del campo magnetico che ha come sorgenti le correnti, le quali, essendo legate al moto delle cariche, invece, cambiano di segno sotto T. Dunque, ricordando che

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{B.1.22}$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{B.1.23}$$

ecco che

$$F^{\mu\nu} \xrightarrow{T} -F_{\mu\nu} \tag{B.1.24}$$

ma poiché chiaramente risulta

$$\partial^\mu \xrightarrow{T} -\partial_\mu^{'} \tag{B.1.25}$$

vista la definizione di $F^{\mu\nu}$ e $F_{\mu\nu}$ deve essere appunto che

$$A^\mu \xrightarrow{T} A_\mu \tag{B.1.26}$$

B.2 Campo scalare carico ϕ

Come abbiamo visto, la dinamica (libera) del campo scalare carico è descritta dalla lagrangiana[7] seguente

$$\mathcal{L}(x) = (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi^\dagger) - m^2 \phi\, \phi^\dagger \tag{B.2.31}$$

da cui seguono le equazioni del moto seguenti per i campi liberi

$$(\Box + m^2)\phi = 0 = (\Box + m^2)\phi^\dagger \tag{B.2.32}$$

i quali sono dati, in termini degli operatori di creazione e distruzione di particella/antiparticella, dagli sviluppi seguenti[8]

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2E_p} \left\{ a(\vec{p})\, e^{-ipx} + b^\dagger(\vec{p})\, e^{ipx} \right\} \tag{B.2.33}$$

$$\phi^\dagger(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2E_p} \left\{ b(\vec{p})\, e^{-ipx} + a^\dagger(\vec{p})\, e^{ipx} \right\} \tag{B.2.34}$$

le cui regole di commutazioni (le sole non nulle ...) sono le seguenti

$$\left[a(\vec{p}),\, a^\dagger(\vec{q}) \right] = \left[b(\vec{p}),\, b^\dagger(\vec{q}) \right] = (2\pi)^3\, 2E_p\, \delta^3(\vec{p} - \vec{q}) \tag{B.2.35}$$

equivalenti alle regole di commutazione canoniche, ovvero

$$[\phi(x), \phi(y)] = \left[\phi^\dagger(x), \phi^\dagger(y) \right] = 0 \tag{B.2.36}$$

$$\left[\phi(x), \phi^\dagger(y) \right] = i\Delta(x - y, m) \tag{B.2.37}$$

dove, per definizione

$$\Delta(x - y, m) \equiv -\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4q\ \delta(q^2 - m^2)\, e^{-iq(x-y)} \left[\Theta(q^0) - \Theta(-q^0) \right] \tag{B.2.38}$$

---

[7]Più correttamente dovremmo usare la lagrangiana simmetrizzata, ovvero

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2} \left\{ \partial_\mu \phi,\, \partial^\mu \phi^\dagger \right\} - \frac{1}{2} m^2 \left\{ \phi,\, \phi^\dagger \right\} \tag{B.2.30}$$

[8]Come al solito, con px intendiamo il prodotto scalare di Lorentz $p^\mu x_\mu$, mentre $E_p \equiv \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}$.

Coniugazione di Carica

Definiamo l'operatore di coniugazione di carica C in modo che esso scambi lo stato di particella con quello di antiparticella e viceversa, rispettando il loro stato di impulso. Poniamo quindi

$$C|a(\vec{p}) >\equiv |b(\vec{p}) >; \qquad\qquad C|b(\vec{p}) >\equiv |a(\vec{p}) > \tag{B.2.39}$$

da cui risulta, in particolare, che $C^2 = I$.
Un altro modo equivalente di definire C è quello di vederne l'effetto direttamente sugli operatori di creazione e distruzione: essendo

$$|a(\vec{p}) >\equiv a^\dagger(\vec{p})|\Omega >; \qquad\qquad |b(\vec{p}) >\equiv b^\dagger(\vec{p})|\Omega > \tag{B.2.40}$$

ed essendo, per ipotesi, il vuoto C-invariante, la (B.2.39) può essere equivalentemente tradotta nelle condizioni

$$C\, a^\dagger(\vec{p})\, C^{-1} = b^\dagger(\vec{p}); \qquad\qquad C\, b^\dagger(\vec{p})\, C^{-1} = a^\dagger(\vec{p}) \tag{B.2.41}$$

da cui, siccome si è assunto che C sia un operatore unitario, prendendo l'aggiunto di entrambi i membri si ottiene altresì che, per gli operatori di annichilazione deve essere

$$C\, a(\vec{p})\, C^{-1} = b(\vec{p}); \qquad\qquad C\, b(\vec{p})\, C^{-1} = a(\vec{p}) \tag{B.2.42}$$

Prima di continuare, vogliamo osservare che la richiesta che la coniugazione di carica C mandi uno stato di particella in uno di antiparticella e viceversa e che $C^2 = I$ non basta a fissarla in modo univoco.
Queste richieste sono rispettate, infatti, anche se definiamo

$$C|a(\vec{p}) >= e^{i\eta_C}\,|b(\vec{p}) >; \qquad\qquad C|b(\vec{p}) >= e^{-i\eta_C}\,|a(\vec{p}) > \tag{B.2.43}$$

ovvero

$$\begin{array}{lcl} C\, a^\dagger(\vec{p})\, C^{-1} = e^{i\eta_C}\, b^\dagger(\vec{p}) & \Leftrightarrow & C\, a(\vec{p})\, C^{-1} = e^{-i\eta_C}\, b(\vec{p}) \\ C\, b^\dagger(\vec{p})\, C^{-1} = e^{-i\eta_C}\, a^\dagger(\vec{p}) & \Leftrightarrow & C\, b(\vec{p})\, C^{-1} = e^{i\eta_C}\, a(\vec{p}) \end{array} \tag{B.2.44}$$

L'unica richiesta che dobbiamo ragionevolmente mantenere è che il fattore di fase $e^{i\eta_C}$ sia indipendente dall'impulso. Questo per non violare l'ulteriore richiesta che facciamo a C, cioè quella per cui vogliamo che lo stato coniugato di carica, per esempio, dello stato rappresentato dal vettore

$$\alpha\,|a(\vec{p}) > +\beta\,|a(\vec{q}) > \tag{B.2.45}$$

sia comunque rappresentato dal vettore[9]

$$\alpha\,|b(\vec{p}) > +\beta\,|b(\vec{q}) > \tag{B.2.47}$$

[9] Si osservi a questo proposito che, usando la definizione (B.2.43), per una combinazione lineare di stati di particella e antiparticella, la presenza del fattore di fase $e^{i\eta_C}$ nella

a meno di un fattore di fase globale inessenziale.

Ritorniamo ora al punto principale, che è quello dì giungere infine alla definizione di una *simmetria conservata*, la quale descriva lo scambio particella-antiparticella e tale, dunque, che

- sia esatta anche per il campo libero;
- sia tale per cui la densità di corrente elettromagnetica soddisfa la condizione (B.1.7).

Partiamo dunque dalla definizione (B.2.43) che, evidentemente, contiene la (B.2.42) come caso particolare in cui $\eta_C = 0$, e vediamo se questa trasformazione gode delle proprietà richieste.
Per prima cosa, determiniamo quale è l'azione di C sui campi ϕ e $\phi^\dagger$.
Ricordiamo che, per ipotesi, C è stata supposta essere lineare (e non antilineare), per cui, usando la (B.2.44), otteniamo

$$\begin{aligned} C\,\phi(x)\,C^{-1} &= C\int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\left\{a(\vec{p})\,e^{-ipx} + b^\dagger(\vec{p})\,e^{ipx}\right\}\,C^{-1} = \\ &= \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\left\{e^{-i\eta_C}\,b(\vec{p})\,e^{-ipx} + e^{-i\eta_C}\,a^\dagger(\vec{p})\,e^{ipx}\right\} = \\ &= e^{-i\eta_C}\,\phi^\dagger(x) \end{aligned} \tag{B.2.48}$$

come pure

$$\begin{aligned} C\,\phi^\dagger(x)\,C^{-1} &= C\int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\left\{b(\vec{p})\,e^{-ipx} + a^\dagger(\vec{p})\,e^{ipx}\right\}\,C^{-1} = \\ &= \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\left\{e^{i\eta_C}\,a(\vec{p})\,e^{-ipx} + e^{i\eta_C}\,b^\dagger(\vec{p})\,e^{ipx}\right\} = \\ &= e^{i\eta_C}\,\phi(x) \end{aligned} \tag{B.2.49}$$

Per prima cosa, verifichiamo che la dinamica del campo libero è rispettata dalla simmetria C. Partendo dalla densità lagrangiana, questo significa verificare che essa è invariante in forma sotto C.
D'altronde, nel nostro caso, date la (B.2.48) e la (B.2.49), abbiamo

$$C: \left\{ \begin{array}{ll} x \rightarrow x & \\ \phi(x) \rightarrow \phi_C(x) = e^{-i\eta_C}\,\phi^\dagger(x) & \Leftrightarrow \ \phi^\dagger(x) = e^{i\eta_C}\,\phi_C(x) \\ \phi\dagger(x) \rightarrow \phi_C^\dagger(x) = e^{i\eta_C}\,\phi(x) & \Leftrightarrow \ \phi(x) = e^{-i\eta_C}\,\phi_C^\dagger(x) \end{array} \right. \tag{B.2.50}$$

---

definizione di $C\ fa$, in effetti differenza, infatti risulta

$$C\,(\alpha\,|a(\vec{p})> + \beta\,|b(\vec{q})>) = \alpha\,e^{i\eta_C}\,|b(\vec{p})> + \beta\,e^{-i\eta_C}\,|a(\vec{q})> \tag{B.2.46}$$

e questo vettore certamente non rappresenta, in generale, lo stesso stato del vettore $\alpha\,|b(\vec{p})> + \beta\,|a(\vec{q})>$ ...
Lo stesso accade se consideriamo una sovrapposizione lineare di un vettore che rappresenta una particella/antiparticella e il vuoto, oppure uno stato di n particelle con quello di m antiparticelle, in cui $n \neq m$.
E' un fatto questo che avremo modo di riprendere.

L'invarianza in valore della lagrangiana

$$\mathcal{L}(x) = (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi^\dagger) - m^2 \phi\, \phi^\dagger \tag{B.2.51}$$

garantisce che i campi ϕ_C e $\phi_C^\dagger$ soddisfano le equazioni del moto dedotte dalla seguente densità lagrangiana $\mathcal{L}_C$, ottenuta dalla precedente per sostituzione

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_C(x) &= \left(\partial_\mu e^{-i\eta_C} \phi_C^\dagger(x)\right)\left(\partial_\mu e^{i\eta_C} \phi_C(x)\right) - m^2\, e^{-i\eta_C} \phi_C^\dagger(x)\, e^{i\eta_C} \phi_C(x) = \\ &= \left(\partial_\mu \phi_C^\dagger(x)\right)(\partial_\mu \phi_C(x)) - m^2\, \phi_C^\dagger(x)\, \phi_C(x)\end{aligned} \tag{B.2.52}$$

che però, siccome ϕ_C e $\phi_C^\dagger$ non commutano, non coincide in forma con $\mathcal{L}(x)$! E' pur vero che la lagrangiana $\mathcal{L}_C(x)$ dà luogo alle stesse equazioni del moto che la lagrangiana $\mathcal{L}(x)$, ma questa conclusione non sarebbe comunque soddisfacente riguardo alla applicazione del teorema di Noëther.
In realtà, il punto sta nel fatto che, proprio allo scopo di trattare allo stesso modo i campi ϕ e $\phi^\dagger$, avremmo dovuto piuttosto partire dalla lagrangiana simmetrizzata (B.2.30), ovvero

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2}\left\{\partial_\mu \phi,\, \partial^\mu \phi^\dagger\right\} - \frac{1}{2} m^2 \left\{\phi,\, \phi^\dagger\right\} \tag{B.2.53}$$

la quale, invece, è ovviamente C-invariante in forma, dato che è simmetrica nello scambio $\phi \leftrightarrow \phi^\dagger$.

Un altro modo per verificare che la dinamica del campo libero è rispettata dalla simmetria è quello di verificare che C, qualunque sia la fase η_C, commuta con l'hamiltoniana libera H_0. Ricordiamo per questo che, in termini degli operatori di creazione e distruzione, risulta[10]

$$H_0 = \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \left[E_p\, a^\dagger(\vec{p}) a(\vec{p}) + E_p\, b^\dagger(\vec{p}) b(\vec{p})\right] \tag{B.2.57}$$

[10] Abbiamo infatti, per esempio, che

$$H_0|a(\vec{q}) >= H_0\, a^\dagger(\vec{q})|\Omega >= \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \left[E_p a^\dagger(\vec{p})\, a(\vec{p}) + E_p b^\dagger(\vec{p})\, b(\vec{p})\right] a^\dagger(\vec{q})|\Omega > \tag{B.2.54}$$

e poiché $[b, a^\dagger] = 0$ e $b|\Omega >= 0$, il secondo termine della (B.2.54) non contribuisce. Quanto al primo, usando l'identità

$$a\, a^\dagger = [a,\, a^\dagger] + a^\dagger\, a \tag{B.2.55}$$

e ricordando, di nuovo, che $a|\Omega >= 0$, diventa

$$\begin{aligned} H_0\, |a(\vec{q}) > &= \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\, E_p\, a^\dagger(\vec{p}) \left[a(\vec{p}, a^\dagger(\vec{q})\right] |\Omega >= \\ &= \int \frac{d^3p}{2(2\pi)^3}\, a^\dagger(\vec{p})\, (2\pi)^3\, 2E_p\, \delta(\vec{p} - \vec{q})\, |\Omega >= \\ &= E_q\, a^\dagger(\vec{q})\, |\Omega >= E_q\, |a(\vec{q} > \end{aligned} \tag{B.2.56}$$

Questo dimostra che, sulla base degli autostati di singola particella, l'operatore H_0 definito dalla (B.2.57) è diagonale e ha come autovalore l'energia complessiva dello stato. Questo stesso risultato può essere facilmente dimostrato anche per gli stati di antiparticella e di multiparticella/antiparticella, per cui ne segue che l'operatore H_0 di cui alla dalla (B.2.57)

D'altronde evidentemente si ha

$$\begin{array}{lclclcl} C\,a^\dagger a\,C^{-1} & = & C\,a^\dagger C^{-1} C\,a\,C^{-1} & = & e^{i\eta_c}\,b^\dagger\,e^{-i\eta_C}\,b & = & b^\dagger\,b \\ C\,b^\dagger b\,C^{-1} & = & C\,b^\dagger C^{-1} C\,b\,C^{-1} & = & e^{-i\eta_c}\,a^\dagger\,e^{i\eta_C}\,a & = & a^\dagger\,a \end{array} \qquad (B.2.58)$$

per cui è immediato che

$$C\,H_0\,C^{-1} = H_0 \quad \Leftrightarrow \quad [C,\,H_0] = 0 \qquad (B.2.59)$$

Appurato che C rispetta la dinamica del campo scalare libero, verifichiamo per completezza che essa rispetta anche le regole di commutazione. Risulta che sotto C si ha

$$\begin{array}{lcllcl} \left[a(\vec{p}),\,a^\dagger(\vec{q})\right] & \longleftrightarrow & \left[b(\vec{p}),\,b^\dagger(\vec{q})\right] & & = & (2\pi)^3\,2E_p\,\delta(\vec{p}-\vec{q}) \\ \left[a(\vec{p}),\,a(\vec{q})\right] & \longleftrightarrow & \left[b(\vec{p}),\,b(\vec{q})\right] & e^{-2i\eta_C} & = & 0 \\ \left[a(\vec{p}),\,b(\vec{q})\right] & \longleftrightarrow & \left[b(\vec{p}),\,a(\vec{q})\right] & & = & 0 \\ \left[a^\dagger(\vec{p}),\,a^\dagger(\vec{q})\right] & \longleftrightarrow & \left[b^\dagger(\vec{p}),\,b^\dagger(\vec{q})\right] & e^{2i\eta_C} & = & 0 \end{array} \qquad (B.2.60)$$

ovvero abbiamo (gli altri commutatori restano identicamente nulli ...)

$$C\left[\phi(x),\phi^\dagger(y)\right]\,C^{-1} = \left[\phi^\dagger(x),\phi(y)\right] = -\left[\phi(y),\phi^\dagger(x)\right] = \left[\phi(x),\phi^\dagger(y)\right] \qquad (B.2.61)$$

dove la seconda uguaglianza discende dal carattere antisimmetrico del commutatore, mentre la terza dal carattere dispari della funzione $\Delta(z)$.

Resta così dimostrato[11] che, per il campo scalare libero, la simmetria di carica C, indipendentemente dal valore della fase η_C, è effettivamente una *simmetria conservata.*

Quanto poi all'osservazione che abbiamo anticipato, per cui, se la fase η_C non è nulla, allora, in generale, abbiamo per esempio che

$$\begin{array}{l} \alpha|a(\vec{p})> +\beta|b(\vec{q})> \;\xrightarrow{C}\; e^{i\eta_C}\,\alpha|a(\vec{p})> +e^{-i\eta_C}\,\beta|b(\vec{q})> \neq \\ \neq (\alpha|a(\vec{p})> +\beta|b(\vec{q})>) \times\ fase\ opportuna \end{array} \qquad (B.2.62)$$

al momento limitiamoci a osservare che, almeno se particella e antiparticella differiscono[12] nella carica elettrica, allora, per la regola di superselezione sulla carica che impedisce la possibilità di realizzare stati fisici che siano sovrapposizione di stati con carica diversa, il problema non si pone.

Riprenderemo comunque l'argomento quando si tratterà di considerare il sistema dei mesoni K, dove $K_0 \neq \bar{K}_0$, anche se entrambi sono elettricamente neutri.

---

coincide effettivamente con l'hamiltoniana libera: l'operatore $a^\dagger(\vec{p})\,a(\vec{p})$ fornisce il numero di particelle con impulso $\vec{p}$ presenti nello stato considerato, mentre $b^\dagger(\vec{p})\,b(\vec{p})$ fornisce quello delle antiparticelle.

[11] 0sserviamo che, per quanto riguarda la compatibilità con le regole di commutazione, non poteva essere altrimenti visto che abbiamo definito C attraverso la sua azione sui vettori di una base dello spazio di Hilbert.

[12] Non è sempre questo il caso ...

Passiamo adesso a considerare l'azione di C sulla quadricorrente associata al campo scalare carico.
Come abbiamo già detto, affinché C resti una simmetria conservata anche in presenza di interazione elettromagnetica, dobbiamo richiedere che la densità di corrente elettrica sotto C sia tale per cui $J^\mu(x) \xrightarrow{C} -J^\mu(x)$.
D'altronde, la densità di quadricorrente elettromagnetica associata al campo scalare carico è pari alla densità di quadricorrente di probabilità, moltiplicata per la carica elettrica assoluta e della particella (quindi e ha un segno univocamente definito una volta stabilito chi è la particella e chi è l'antiparticella). Come sappiamo, questa corrente di probabilità (cfr.(2.2.108)) è quella che si ottiene dal teorema di Noëther, applicato all'invarianza in forma della densità lagrangiana per trasformazioni di gauge di prima specie dei campi. Abbiamo[13]

$$J^\mu(x) = i\left[(\partial^\mu \phi(x))\,\phi^\dagger(x) - \left(\partial^\mu \phi^\dagger(x)\right)\,\phi(x)\right] = (J^\mu)^\dagger(x) \qquad \text{(B.2.64)}$$

e visto che

$$\phi \xrightarrow{C} e^{-i\eta_C}\,\phi^\dagger; \qquad \phi^\dagger \xrightarrow{C} e^{i\eta_C}\,\phi \qquad \text{(B.2.65)}$$

è evidente che, indipendentemente dalla fase η_C, risulta[14]

$$J^\mu(x) \xrightarrow{C} C\,J^\mu(x)\,C^{-1} = -J^\mu(x) \qquad \text{(B.2.68)}$$

dalla quale segue che l'operatore di coniugazione di carica C è in effetti una *simmetria conservata* non solo nel caso del campo scalare libero, ma anche quando si consideri la sua interazione con il campo elettromagnetico.

[13] Più propriamente occorre qui prendere il prodotto *normal - ordinato* dei campi, in cui, per definizione, gli operatori di annichilazione sono a destra di quelli di creazione, per cui, nel caso considerato, per esempio risulta in particolare che

$$<\Omega|J^\mu|\Omega>= 0 \qquad \text{(B.2.63)}$$

[14] Sempre basandoci sul fatto che l'operatore $a^\dagger(\vec{p})\,a(\vec{p})$ fornisce il numero di particelle con impulso $\vec{p}$ presenti nello stato considerato, mentre$b^\dagger(\vec{p})\,b(\vec{p})$ fornisce quello delle antiparticelle, risulta evidentemente che l'operatore di Carica Q è dato da

$$Q = e\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p}\left[a^\dagger(\vec{p})\,a(\vec{p}) - b^\dagger(\vec{p})\,b(\vec{p})\right] \qquad \text{(B.2.66)}$$

dove e è la carica elettrica della particella. Da quanto detto è poi immediato che

$$C\,Q\,C^{-1} = -Q \quad \textit{essendo} \quad a^\dagger(\vec{p})\,a(\vec{p}) \xrightarrow{C} b^\dagger(\vec{p})\,b(\vec{p}) \qquad \text{(B.2.67)}$$

Parità

Definiamo l'operatore di parità P nel caso del campo scalare carico, ponendo[15], con ovvio significato dei simboli

$$\begin{aligned} P|a(\vec{p})> &= e^{i\eta_P}|a(-\vec{p})> && \text{(B.2.69)} \\ P|b(\vec{p})> &= e^{-i\eta_P}|b(-\vec{p})> && \text{(B.2.70)} \end{aligned}$$

dove $e^{i\eta_P}$ è un fattore di fase che, pur essendo a priori arbitrario, se richiediamo che $P^2 = I$, può valere solo ± 1.
Poichè, per definizione, risulta che

$$|a(\vec{p})> \equiv a^\dagger(\vec{p}|\Omega>; \qquad |b(\vec{p})> \equiv b^\dagger(\vec{p}|\Omega> \tag{B.2.71}$$

avendo assunto che lo stato di vuoto $|\Omega>$ sia invariante per parità, ecco che le (B.2.69)-(B.2.70) equivalgono a

$$\begin{aligned} Pa^\dagger(\vec{p})P^{-1} = e^{i\eta_P}a^\dagger(-\vec{p}) &\longleftrightarrow Pa(\vec{p})P^{-1} = e^{-i\eta_P}a(-\vec{p}) && \text{(B.2.72)} \\ Pb^\dagger(\vec{p})P^{-1} = e^{-i\eta_P}b^\dagger(-\vec{p}) &\longleftrightarrow Pb(\vec{p})P^{-1} = e^{i\eta_P}b(-\vec{p}) && \text{(B.2.73)} \end{aligned}$$

dove abbiamo usato anche il fatto che si richiede a P di essere unitaria[16].
Quanto ai campi ϕ e $\phi^\dagger$ abbiamo

$$\begin{aligned} P\,\phi(x)\,P^{-1} &= P\int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\left\{a(\vec{p})e^{-ipx} + b^\dagger(\vec{p})e^{ipx}\right\}\,P^{-1} = \\ &= \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\left\{e^{-i\eta_P}a(-\vec{p})e^{-ipx} + e^{-i\eta_P}b^\dagger(-\vec{p})e^{ipx}\right\} = \\ &= e^{-i\eta_P}\int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\left\{a(-\vec{p})e^{-ipx} + b^\dagger(-\vec{p})e^{ipx}\right\} \qquad \text{(B.2.74)} \end{aligned}$$

Poniamo adesso

$$q = (q^0, \vec{q}) = (p^0, -\vec{p}) \equiv Pp \;\Rightarrow\; \frac{d^3p}{2E_p} = \frac{d^3q}{2E_q} \tag{B.2.75}$$

dove indichiamo qui con P la matrice[17] 4×4 che coincide con il tensore metrico G dello spazio di Minkowski.
Evidentemente, essendo P una matrice del gruppo di Lorentz, abbiamo che

$$p\cdot x \equiv px = (Pp)\cdot(Px) = q\cdot Px \tag{B.2.76}$$

[15] A priori le fasi per la particella e per la antiparticella possono essere considerate come indipendenti, visto che riguardano entità differenti. Comunque, poiché i campi ϕ e $\phi^\dagger$ contengono entrambi gli operatori sia di particella che di antiparticella, solo un preciso legame fra le due fasi potrà consentire di giungere a leggi di trasformazione semplici per i campi stessi.

[16] Come abbiamo già detto, se imponiamo che $P^2 = I$ allora abbiamo necessariamente che $e^{i\eta_P} = \pm 1 = e^{-i\eta_P}$: il caso in cui $e^{i\eta_P} = 1$ corrisponde al caso scalare proprio mentre quello in cui $e^{i\eta_P} = -1$ corrisponde al caso pseudoscalare.

[17] Anche se indichiamo questa matrice con lo stesso simbolo P con cui indichiamo l'operatore di parità, il contesto dovrebbe via via chiarire a chi ci stiamo riferendo.

dove $Px = (x^0, -\vec{x})$.
Risulta quindi che

$$
\begin{aligned}
P\,\phi(x)\,P^{-1} &= e^{-i\eta_P} \int \frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3} \left\{ a(\vec{q})e^{-iq\cdot Px} + b^\dagger(\vec{q})e^{iq\cdot Px} \right\} = \\
&= e^{-i\eta_P}\,\phi(Px) \qquad \text{(B.2.77)}
\end{aligned}
$$

Quanto poi al campo coniugato $\phi^\dagger$, usando il fatto che l'operatore di parità P è unitario, avremo evidentemente che

$$
P\,\phi^\dagger(x)\,P^{-1} = e^{i\eta_P}\,\phi^\dagger(Px) \qquad \text{(B.2.78)}
$$

E' banale dimostrare adesso che questa legge di trasformazione è compatibile con le regole di commutazione del campo. Come sappiamo, infatti, l'algebra del campo scalare è definita univocamente dalle regole di commutazione degli operatori di creazione e distruzione e gli unici commutatori non nulli sono

$$
\left[a(\vec{p}, a^\dagger(\vec{q}\right] = \left[b(\vec{p}, b^\dagger(\vec{q}\right] = 2E_p\,\delta^3(\vec{p} - \vec{q}) \qquad \text{(B.2.79)}
$$

D'altronde, sotto parità, gli operatori di creazione e distruzione di particella e antiparticella restano tali, solamente si invertono i segni degli impulsi, cioè

$$
\vec{p} \to -\vec{p}; \qquad\qquad \vec{q} \to -\vec{q} \qquad \text{(B.2.80)}
$$

Siccome però la funzione δ è una funzione pari, risulta subito evidente come la simmetria di parità conservi la struttura canonica dell'algebra del campo scalare.
Quanto poi alle equazioni del moto, evidentemente se i campi $\phi(x^0, \vec{x})$ e $\phi^\dagger(x^0, \vec{x})$ soddisfano l'equazione di Klein-Gordon, allora anche i campi

$$
\begin{aligned}
\phi_P(x') &\equiv \phi_P(x^0, -\vec{x}) = e^{-i\eta_P}\,\phi(x) \qquad \text{(B.2.81)} \\
\phi_P^\dagger(x') &\equiv \phi_P^\dagger(x^0, -\vec{x}) = e^{i\eta_P}\,\phi^\dagger(x) \qquad \text{(B.2.82)}
\end{aligned}
$$

soddisfano quella stessa equazione poiché

$$
P: \qquad\qquad \partial \to \partial_\mu^{'} \qquad \text{(B.2.83)}
$$

e dunque il D'Alembertiano non cambia per parità.
Questo stesso risultato relativo all'invarianza delle equazioni del moto per parità può essere altresì ottenuto formalmente e, a questo scopo, verifichiamo direttamente che la simmetria P definita sopra è effettivamente conservata dalla dinamica libera del campo scalare carico.
Abbiamo infatti

$$
P: \begin{cases} x \to Px = (x^0, -\vec{x}) \;\Rightarrow\; \partial_\mu \leftrightarrow \partial^\mu \\ \phi(x) \to e^{-i\eta_P}\,\phi(Px) \\ \phi^\dagger(x) \to e^{i\eta_P}\,\phi^\dagger(Px) \end{cases} \qquad \text{(B.2.84)}
$$

L'invarianza in valore della densità lagrangiana

$$\mathcal{L}(x) = (\partial_\mu \phi(x)) \left(\partial^\mu \phi^\dagger(x)\right) - m^2\, \phi(x)\, \phi^\dagger(x) \tag{B.2.85}$$

implica che

$$\mathcal{L}(x) \xrightarrow{P} \mathcal{L}_P(Px) = (\partial^\mu \phi(Px)) \left(\partial_\mu \phi^\dagger(Px)\right) - m^2\, \phi(Px)\, \phi^\dagger(Px) \tag{B.2.86}$$

ovvero implica l'invarianza in forma della trasformazione di parità della lagrangiana libera

$$\mathcal{L}(x) \xrightarrow{P} \mathcal{L}_P(Px) \tag{B.2.87}$$

Venendo all'azione di P sulla densità della quadricorrente, essendo

$$J^\mu(x) = i \left[(\partial^\mu \phi(x))\, \phi^\dagger(x) - \left(\partial^\mu \phi^\dagger(x)\right) \phi(x)\right] \tag{B.2.88}$$

visto che

$$\phi(x) \to e^{-i\eta_P}\, \phi(Px); \qquad \phi^\dagger(x) \to e^{i\eta_P}\, \phi^\dagger(Px); \qquad \partial_\mu \;\leftrightarrow\; \partial^\mu \tag{B.2.89}$$

risulta

$$J^\mu(x) \xrightarrow{P} i \left[(\partial_\mu \phi(Px))\, \phi^\dagger(Px) - \left(\partial_\mu \phi^\dagger(Px)\right) \phi(Px)\right] = J_\mu(Px) \tag{B.2.90}$$

come è ragionevole attenderci per una entità quadrivettoriale[18].

[18] Come dimostreremo formalmente, lo stesso accade anche per il campo quadrivettoriale $A_\mu(x)$ che media l'interazione elettromagnetica.

Time reversal

Per definire l'operatore di time reversal T per il campo scalare carico, ricordiamo che siamo in assenza di spin e quindi gli autostati dell'impulso costituiscono una base. Evidentemente, sotto T ci aspettiamo che l'impulso spaziale cambi di segno, per cui

$$T|a(\vec{p})> \;=\; e^{i\eta_T}|a(-\vec{p})> \quad \text{(B.2.91)}$$
$$T|b(\vec{p})> \;=\; e^{-i\eta_T}|b(-\vec{p})> \quad \text{(B.2.92)}$$

dove $e^{i\eta_T}$ è, di nuovo, un fattore di fase a priori arbitrario.
A prima vista, dal confronto con le (B.2.69)-(B.2.70), potrebbe sembrare che le definizioni di P e T individuino la stessa trasformazione, cosa che, ovviamente, non avrebbe senso.
Il punto da tenere presente è che, mentre P è un operatore unitario, nel caso di T esso è antiunitario[19].
Vediamo più in dettaglio.
Partendo dal fatto che, come già detto

$$|a(\vec{p})>\equiv a^\dagger(\vec{p}|\Omega>; \qquad |b(\vec{p})>\equiv b^\dagger(\vec{p}|\Omega> \quad \text{(B.2.93)}$$

e avendo assunto ancora che lo stato di vuoto $|\Omega>$ sia T-invariante, concludiamo che

$$Ta^\dagger(\vec{p})T^{-1} = e^{i\eta_T}a^\dagger(-\vec{p}) \longleftrightarrow Ta(\vec{p})T^{-1} = e^{-i\eta_T}a(-\vec{p}) \quad \text{(B.2.94)}$$
$$Tb^\dagger(\vec{p})T^{-1} = e^{-i\eta_T}b^\dagger(-\vec{p}) \longleftrightarrow Tb(\vec{p})T^{-1} = e^{i\eta_T}b(-\vec{p}) \quad \text{(B.2.95)}$$

dove abbiamo usato anche il fatto che T è antiunitaria[20].

[19] Se così non fosse, non potrebbe descrivere una simmetria esatta già nel caso della prima quantizzazione.

[20] Se prendiamo, infatti, l'aggiunto di entrambi i membri delle (B.2.94) e (B.2.95), otteniamo

$$(T^{-1})^\dagger a(\vec{p})T^\dagger \;=\; e^{-i\eta_T}a(-\vec{p}) \quad \text{(B.2.96)}$$
$$(T^{-1})^\dagger b(\vec{p})T^\dagger \;=\; e^{i\eta_T}b(-\vec{p}) \quad \text{(B.2.97)}$$

e se T fosse unitario, non avremmo esitazioni ... ma T è antiunitario... Ricordiamo allora che, per un operatore antiunitario A, dati comunque i vettori $|\phi>>$ e $|\psi>$, risulta

$$<A\phi|\psi>\equiv<\phi|A^\dagger\psi>^* \quad \text{(B.2.98)}$$

e quindi, nel caso di T^{-1}, si ha

$$<T^{-1}\phi|\psi>\equiv<\phi|(T^{-1})^\dagger\psi>^* \quad \text{(B.2.99)}$$

ma

$$<T^{-1}\phi|\psi>=<T^{-1}\phi|(T^{-1})T\psi>=<\phi|T\psi>^* \quad \text{(B.2.100)}$$

e dunque, per l'arbitrarietà di $|\phi>$ e $|\psi>$, confrontando la (B.2.99) con la (B.2.100), si conclude che è ancora

$$(T^{-1})^\dagger = T \quad \text{(B.2.101)}$$

Il fatto, comunque, che le leggi di trasformazione degli operatori di creazione e distruzione del campo scalare sotto T siano formalmente le stesse che nel caso della parità P ci consente di concludere immediatamente che l'operatore T risulta senz'altro comŋpatibile con l'algebra del campo, così come sappiamo accade per l'operatore di parità P.

Ma vediamo adesso cosa succede a ϕ e $\phi^\dagger$ sotto T.
Ripartiamo per questo dalla nota decomposizione spettrale

$$\phi(x^0,\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\left\{a(\vec{p})e^{-ip^0x^0+i\vec{p}\cdot\vec{x}} + b^\dagger(\vec{p})e^{ip^0x^0-i\vec{p}\cdot\vec{x}}\right\} \quad \text{(B.2.102)}$$

e usando le (B.2.94) e (B.2.97), nonché tenendo conto del carattere antiunitario di T, otteniamo

$$T\phi(x^0,\vec{x})T^{-1} = \\ = e^{-i\eta_T}\int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\left\{a(-\vec{p})e^{ip^0x^0-i\vec{p}\cdot\vec{x}} + b^\dagger(-\vec{p})e^{-ip^0x^0+i\vec{p}\cdot\vec{x}}\right\} \quad \text{(B.2.103)}$$

Cambiando variabile di integrazione e ponendo $\vec{q} \equiv -\vec{p}$ ($\Rightarrow q^0 = p^0$) si ha allora che

$$T\phi(x^0,\vec{x})T^{-1} = \\ = e^{-i\eta_T}\int \frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3}\left\{a(\vec{q})e^{-iq^0(-x^0)+i\vec{q}\cdot\vec{x}} + b^\dagger(\vec{q})e^{iq^0(-x^0)-i\vec{q}\cdot\vec{x}}\right\} = \\ = e^{-i\eta_T}\,\phi(-x^0,\vec{x}) \equiv e^{-i\eta_T}\,\phi(Tx) \quad \text{(B.2.104)}$$

dove si è posto[21], per comodità di notazione e in analogia con quanto già fatto per la parità

$$Tx \equiv T(x^0,\vec{x}) = (-x^0,\vec{x}) \quad \text{(B.2.105)}$$

Analogamente poi per $\phi^\dagger$ risulta

$$T\phi^\dagger(x^0,\vec{x})T^{-1} = e^{i\eta_T}\,\phi^\dagger(Tx) \quad \text{(B.2.106)}$$

e questi risultati, evidentemente, sono in perfetto accordo con quanto potevamo attenderci sulla base dell'analogia classica.

A questo punto è opportuno tornare sulla questione della compatibilità di T con le regole di commutazione, che abbiamo prima accertato sulla semplice base dell'identità formale con P delle trasformazioni sotto T degli operatori di creazione e distruzione del campo.
Bisogna ricordare, come già detto, che, a differenza di P, T è antiunitario: la conclusione tratta sulla base dell'analogia con P risulta corretta solo perché i commutatori[22] fra gli operatori di creazione e distruzione sono comunque reali.

[21] E' evidente che la matrice T, che descrive l'azione della trasformazione sul quadrivettore x è semplicemente l'opposto del tensore metrico g.

[22] Abbiamo visto che, per il campo scalare, le regole di commutazione canoniche si

traducono nella relazione

$$\left[\phi(x), \phi^\dagger(y)\right] = i\,\Delta(x-y; m) \tag{B.2.107}$$

dove

$$i\Delta(z; m) \equiv \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4q\; \delta(q^2 - m^2)\, e^{iqz}\; \left[\Theta(q^0) - \Theta(-q^0)\right] \tag{B.2.108}$$

Sotto T, per quanto visto sopra, abbiamo

$$T\;\left[\phi(x), \phi^\dagger(y)\right] T^{-1} = \left[\phi(Tx), \phi^\dagger(Ty)\right] \tag{B.2.109}$$

quindi la compatibilità di T son le regole di commutazione del cmpo si traduce nel fatto che deve risultare

$$T\, i\,\Delta(z; m)\, T^{-1} = i\;\Delta(Tz; m) \tag{B.2.110}$$

ovvero che la quantità (si ricordi che T è antiunitario)

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4q\; \delta(q^2 - m^2)\, e^{-iqz}\; \left[\Theta(q^0) - \Theta(-q^0)\right] \tag{B.2.111}$$

deve essere uguale alla quantità

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4q\; \delta(q^2 - m^2)\, e^{iq(Tz)}\; \left[\Theta(q^0) - \Theta(-q^0)\right] \tag{B.2.112}$$

Quanto alla (B.2.111), dalla definizione evidentemente si ha

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4q\; \delta(q^2 - m^2)\, e^{-iqz}\; \left[\Theta(q^0) - \Theta(-q^0)\right] = i\,\Delta(-z; m) \tag{B.2.113}$$

e poiché la funzione Δ è dispari, abbiamo

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4q\; \delta(q^2 - m^2)\, e^{-iqz}\; \left[\Theta(q^0) - \Theta(-q^0)\right] = i\,\Delta(-z; m) = \\ &= -i\,\Delta(z; m) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4q\; \delta(q^2 - m^2)\, e^{iqz}\; \left[\Theta(q^0) - \Theta(-q^0)\right] \end{aligned} \tag{B.2.114}$$

Venendo alla (B.2.112), poiché risulta evidentemente che

$$q(Tz) = (Tq)z \tag{B.2.115}$$

ecco che ponendo $p = Tq \;\Rightarrow\; p^0 = -q^0$, abbiamo

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4q\; \delta(q^2 - m^2)\, e^{iq(Tz)}\; \left[\Theta(q^0) - \Theta(-q^0)\right] = \\ &\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4q\; \delta(q^2 - m^2)\, e^{i(Tq)z}\; \left[\Theta(q^0) - \Theta(-q^0)\right] = \\ &\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4p\; \delta(p^2 - m^2)\, e^{ipz}\; \left[\Theta(-p^0) - \Theta(p^0)\right] = -i\Delta(z; m) \end{aligned} \tag{B.2.116}$$

per cui resta dimostrato che la (B.2.111) e la (B.2.112) coincidono e dunque è così dimostrato in modo diretto che la trasformazione di inversione temporale T è compatibile con l'algebra del campo. Si osservi ancora una volta che, per giungere a questa conclusione, è stato necessario usare il fatto che T è antiunitario.

Occupiamoci adesso di vedere se T è una simmetria conservata nel caso del campo scalare carico libero.
La trasformazione è tale per cui

$$T: \begin{cases} x \to x' = Tx & \Leftrightarrow \quad x = Tx' \\ \phi(x) \to \phi_T(x') = e^{-i\eta_T}\,\phi(x) & \Leftrightarrow \quad \phi(x) = e^{i\eta_T}\phi_T(x') \\ \phi^\dagger(x) \to e^{i\eta_T}\,\phi^\dagger(x) & \Leftrightarrow \quad \phi^\dagger(x) = e^{-i\eta_T}\phi_T^\dagger(x') \end{cases} \tag{B.2.117}$$

Quanto alla densità lagrangiana, l'invarianza in valore ci garantisce che, essendo quella del campo scalare carico libero data da

$$\mathcal{L}(x) = (\partial_\mu \phi(x)) \left(\partial^\mu \phi^\dagger(x)\right) - m^2 \phi(x)\phi^\dagger(x) \tag{B.2.118}$$

risulta (i fattori di fase, evidentemente, si compensano ...)

$$\mathcal{L}_T(x') = (\partial_\mu \phi_T(x')) \left(\partial^\mu \phi_T^\dagger(x')\right) - m^2 \phi_T(x')\phi_T^\dagger(x') \tag{B.2.119}$$

D'altronde, evidentemente

$$T: \qquad \partial_\mu \to -\partial'^\mu \tag{B.2.120}$$

per cui abbiamo infine che

$$\mathcal{L}_T(x') = \left(\partial'^\mu \phi_T(x')\right) \left(\partial'_\mu \phi_T^\dagger(x')\right) - m^2 \phi_T(x')\phi_T^\dagger(x') \tag{B.2.121}$$

ovvero la densità lagrangiana è invariante in forma sotto T e dunque ϕ e ϕ_T hanno la stessa dinamica, per cui T, che abbiamo già visto essere compatibile con l'algebra del campo, risulta essere una simmetria esatta per il campo scalare carico libero.

Consideriamo ora una grandezza di grande interesse quanto al suo modo di trasformarsi sotto T, cioè la corrente associata al campo scalare carico. Dimostriamo che

$$T\, J^\mu(x)\, T^{-1} = J_\mu(Tx) \equiv J_\mu(x') \tag{B.2.122}$$

Ricordiamo per questo che la densità di corrente associata al campo scalare carico è data da

$$J^\mu(x) = i\left[(\partial^\mu \phi(x))\, \phi^\dagger(x) - \left(\partial^\mu \phi^\dagger(x)\right) \phi(x)\right] \tag{B.2.123}$$

e in base a quanto visto sopra, abbiamo (di nuovo i fattori di fase si compensano...)

$$\begin{aligned} TJ^\mu(x)T^{-1} &= -iT\left[(\partial^\mu \phi(x))\, \phi^\dagger(x) - \left(\partial^\mu \phi^\dagger(x)\right) \phi(x)\right] T^{-1} = \\ &= -i\left[\left(\partial^\mu T\phi(x)T^{-1}\right) T\phi^\dagger(x)T^{-1} - \left(\partial^\mu T\phi^\dagger(x)T^{-1}\right) T\phi(x)T^{-1}\right] = \\ &= -i\left[(\partial^\mu \phi(Tx))\, \phi^\dagger(Tx) - \left(\partial^\mu \phi^\dagger(Tx)\right) \phi(Tx)\right] = \\ &= i\left[\left(\partial'_\mu \phi(x')\right) \phi^\dagger(x') - \left(\partial'_\mu \phi^\dagger(x')\right) \phi(x')\right] = J_\mu(x') \end{aligned} \tag{B.2.124}$$

dove, nell'ultimo passaggio, abbiamo fatto uso della (B.2.120).

Mostriamo infine una differenza interessante relativa al comportamento sotto inversione temporale della funzione d'onda di una particella scalare e del campo scalare stesso.
Per la funzione d'onda vedemmo a suo tempo che

$$T: \quad \psi(\vec{x},t) \to \psi_T(\vec{x},t) = \psi^*(\vec{x},-t) \tag{B.2.125}$$

mentre per il campo scalare abbiamo visto che, a parte il fattore di fase inessenziale, risulta

$$T\phi(\vec{x},t)T^{-1} = \phi_T(\vec{x},t) = \phi(\vec{x},t) \tag{B.2.126}$$

mentre avremmo potuto aspettarci che, per analogia con la (B.2.125), al secondo membro della (B.2.126) ci comparisse, piuttosto, il campo $\phi^\dagger$ ...
Non c'è, naturalmente, nessuna contraddizione.
Per rendercene conto consideriamo uno stato di singola particella di impulso definito $\vec{p}$. Esso sarà individuato dal vettore

$$|\vec{p}>= a^\dagger(\vec{p})|\Omega> \tag{B.2.127}$$

Ma qual è la sua funzione d'onda ?
Come sappiamo, essa è data semplicemente da

$$\psi(\vec{x},t) =<\Omega|\phi(\vec{x},t)|\vec{p}>\equiv<\Omega|\phi(\vec{x},t)a^\dagger(\vec{p})|\Omega> \tag{B.2.128}$$

Consideriamo allora la funzione d'onda dello stato $T|\vec{p}>$: evidentemente avremo

$$\begin{aligned}\psi_T(\vec{x},t) &= <\Omega|\phi(\vec{x},t)Ta^\dagger(\vec{p})|\Omega>=<\Omega|TT^{-1}\phi(\vec{x},t)Ta^\dagger(\vec{p})|\Omega>= \\ &= <T\Omega|TT^{-1}\phi(\vec{x},t)Ta^\dagger(\vec{p})|\Omega>\end{aligned} \tag{B.2.129}$$

dove abbiamo usato nell'ultimo passaggio il fatto che il vuoto $|\Omega>$ è $T-$invariante.
Ma T è antiunitario e quindi

$$\begin{aligned}\psi_T(\vec{x},t) &= <T\Omega|TT^{-1}\phi(\vec{x},t)Ta^\dagger(\vec{p})|\Omega>= \\ &= <\Omega|T^{-1}\phi(\vec{x},t)Ta^\dagger(\vec{p})|\Omega>^*\end{aligned} \tag{B.2.130}$$

D'altronde si è visto che, a parte una fase inessenziale, risulta

$$T\phi(\vec{x},t)T^{-1} = \phi(\vec{x},-t) \tag{B.2.131}$$

e dunque

$$T^{-1}\phi(\vec{x},-t)T = \phi(\vec{x},t) \tag{B.2.132}$$

ovvero[23]

$$T^{-1}\phi(\vec{x},t)T = \phi(\vec{x},-t) \tag{B.2.133}$$

per cui, sostituendo, ecco che risulta

$$\psi_T(\vec{x},t) =< \Omega|\phi(\vec{x},-t)a^\dagger(\vec{p})|\Omega >^* = \psi^*(\vec{x},-t) \tag{B.2.134}$$

in accordo con quanto ottenuto in prima quantizzazione.

[23]Si ricordi che nel caso scalare $T^2 = I$ e dunque $T = T^{-1}$.

B.3 Campo scalare neutro

Il campo scalare neutro di massa m è un campo scalare autoaggiunto tale per cui abbiamo

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \phi^\dagger(x) && \text{(B.3.135)} \\ \mathcal{L}(x) &= (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - m^2\,\phi^2 \;\;\Rightarrow\;\; (\Box + m^2)\phi = 0 && \text{(B.3.136)} \end{aligned}$$

La sua rappresentazione spettrale in termini di operatori di creazione e distruzione è la seguente

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2E_p} \left\{ a(\vec{p}) e^{-ipx} + a^\dagger(\vec{p}) e^{ipx} \right\} \qquad \text{(B.3.137)}$$

la quale mostra esplicitamente come, in questo caso, non ci sia distinzione fra particella e antiparticella ovvero, come talvolta si dice, la particella e l'antiparticella coincidano.
Le regole di commutazione per gli operatori di creazione e distruzione restano le stesse che nel caso carico e l'unico commutatore non nullo è il seguente

$$\left[a(\vec{p}, a^\dagger(\vec{q}) \right] = (2\pi)^3\, 2E_p\, \delta^3(\vec{p} - \vec{q}) \qquad \text{(B.3.138)}$$

mentre, quanto al campo, abbiamo adesso che

$$[\phi(x), \phi(y)] = i\,\Delta(\vec{x} - \vec{y}; m) \qquad \text{(B.3.139)}$$

Coniugazione di carica

A prima vista potrebbe sembrare che la coniugazione di carica C non debba avere alcun effetto sul campo ϕ, visto che esso descrive un campo scarico. Però, come adesso vedremo, in generale non è così.
Riprendiamo quanto visto nel caso carico. E' facile convincersi che l'azione di C sugli operatori di creazione e distruzione sarà, a priori, la seguente

$$C a^\dagger(\vec{p}) C^{-1} = e^{i\eta_C} a^\dagger(\vec{p}) \quad \Leftrightarrow \quad C a(\vec{p}) C^{-1} = e^{-i\eta_C} a(\vec{p}) \qquad \text{(B.3.140)}$$

dove la condizione $C^2 = I$, che non aveva conseguenze sulla fase $e^{i\eta_C}$ nel caso carico, adesso implica che

$$e^{i\eta_C} = \pm 1 \qquad \text{(B.3.141)}$$

e dunque risulta

$$C a^\dagger(\vec{p}) C^{-1} = \pm a^\dagger(\vec{p}) \quad \Leftrightarrow \quad C a(\vec{p}) C^{-1} = \pm a(\vec{p}) \qquad \text{(B.3.142)}$$

Quanto al campo, abbiamo quindi che[24]

$$\begin{aligned} C\phi(x)C^{-1} &= C\,\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3p}{2E_p}\left\{a(\vec{p})e^{-ipx}+a^\dagger(\vec{p})e^{ipx}\right\}C^{-1}= \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3p}{2E_p}C\,\left\{a(\vec{p})e^{-ipx}+a^\dagger(\vec{p})e^{ipx}\right\}C^{-1}= \\ &= \pm\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3p}{2E_p}\left\{a(\vec{p})e^{-ipx}+a^\dagger(\vec{p})e^{ipx}\right\}=\pm\phi(x) \qquad \text{(B.3.143)}\end{aligned}$$

Infine, sulla base di quanto visto nel caso carico, è poi piuttosto evidente che, anche in questo caso, C risulta essere una simmetria conservata dalla dinamica libera campo scalare neutro.

Parità

Come nel caso carico, avremo

$$P\,a^\dagger(\vec{p})\,P^{-1}=e^{i\eta_P}\,a^\dagger(-\vec{p});\qquad P\,a(\vec{p})\,P^{-1}=e^{-i\eta_P}\,a(-\vec{p}) \qquad \text{(B.3.144)}$$

con $e^{i\eta_P}=\pm 1$.
Ripetendo i calcoli visti nel caso carico, otteniamo adesso che[25]

$$P\phi(x)P^{-1}=\pm\phi(Px) \qquad \text{(B.3.147)}$$

dove il segno positivo caratterizza le particelle propriamente scalari mentre quello negativo si riferisce alla particelle pseudoscalari.
Infine, ripetendo quanto già visto per il campo carico, risulta poi facile convincersi che la simmetria di parità così definita è conservata dalla dinamica libera del campo.

---

[24]Si osservi che la fase, in questo caso, deve essere la stessa per $a(\vec{p})$ e $a^\dagger(\vec{p})$ se vogliamo che C possa operare in modo ragionevole. Questo significa che la fase deve essere reale e dunque, di nuovo, non potrà che essere uguale a ± 1, confermando $C^2=I$.

[25]Ponendo infatti, al solito

$$q\equiv Pp=P(p^0,\vec{p})=(p^0,-\vec{p});\qquad Px=P(x^0,\vec{x})=(x^0,-\vec{x}) \qquad \text{(B.3.145)}$$

ecco che risulta

$$\begin{aligned} P\phi(x)P^{-1} &= \frac{1}{(2\pi)^3}\,P\int\frac{d^3p}{2E_p}\left\{a(\vec{p})e^{-ipx}+a^\dagger(\vec{p})e^{ipx}\right\}\;P^{-1}= \\ &= \pm\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3p}{2E_p}\left\{a(-\vec{p})e^{-ipx}+a^\dagger(-\vec{p})e^{ipx}\right\}= \\ &= \pm\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3q}{2E_q}\left\{a(\vec{q})e^{-iqPx}+a^\dagger(\vec{q})e^{iqPx}\right\}=\pm\phi(Px) \qquad \text{(B.3.146)}\end{aligned}$$

Time reversal

In stretta analogia con quanto visto nel caso carico, possiamo attenderci che

$$T\,a^\dagger(\vec{p})\,T^{-1} = e^{i\eta_T}a^\dagger(-\vec{p}); \qquad T\,a(\vec{p})\,T^{-1} = e^{-i\eta_T}a(-\vec{p}) \quad \text{(B.3.148)}$$

e poiché T è antiunitario, risulta comunque $T^2 = I$ qualunque sia la fase $e^{i\eta_T}$. Però, se vogliamo che T operi in modo sensato sul campo ϕ che contiene sia gli operatori $a(\vec{p})$ che i loro aggiunti $a^\dagger(\vec{p})$, è necessario che essi prendano, sotto T, lo stesso fattore di fase. Ne segue che esso deve essere reale per poter coincidere con il complesso coniugato e dunque deve aversi

$$e^{i\eta_T} = \pm 1 \quad \text{(B.3.149)}$$

Abbiamo così che, posto[26]

$$Tx \equiv T(x^0, \vec{x}) = (-x^0, \vec{x}) \quad \text{(B.3.150)}$$

risulta

$$\begin{aligned} T\phi(x)T^{-1} &= \frac{1}{(2\pi)^3}\,T\int \frac{d^3p}{2E_p}\left\{a(\vec{p})e^{-ipx} + a^\dagger(\vec{p})e^{ipx}\right\}\,T^{-1} = \\ &= \pm\frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p}{2E_p}\left\{a(-\vec{p})e^{ipx} + a^\dagger(-\vec{p})e^{-ipx}\right\} = \\ &= \pm\frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3q}{2E_q}\left\{a(\vec{q})e^{-iqTx} + a^\dagger(\vec{q})e^{iqTx}\right\} = \pm\phi(Tx) \end{aligned} \quad \text{(B.3.151)}$$

Come nei casi precedenti poi, anche l'operatore T così definito risulta essere una simmetria conservata dalla dinamica libera del campo.

[26] Anche per T usiamo lo stesso simbolo per l'operatore di time reversal e per la matrice del gruppo di Lorentz (esteso) che cambia il segno della componente temporale e lascia invariato quello delle componenti spaziali. Il contesto dovrebbe evitare possibili confusioni.

B.4 Campo vettoriale massivo carico

La dinamica libera del campo vettoriale massivo carico $W_\mu(x)$ e del suo aggiunto $W^\dagger_\mu(x)$ è retta, come abbiamo visto, dalla densità lagrangiana

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2} F^{\mu\nu} F^\dagger_{\mu\nu} - m^2 W^\mu W^\dagger_\mu; \qquad m \neq 0 \tag{B.4.152}$$

dove

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu \tag{B.4.153}$$

Dalla (B.4.152) seguono le leggi del moto per i campi W_μ e $W^\dagger_\mu$

$$(\Box + m^2) W_\mu = 0; \qquad \partial^\mu W_\mu = 0 \tag{B.4.154}$$
$$(\Box + m^2) W^\dagger_\mu = 0; \qquad \partial^\mu W^\dagger_\mu = 0 \tag{B.4.155}$$

Se scegliamo polarizzazioni lineari per le quali risulta

$$\epsilon^\mu(r, \vec{p}) = \mathcal{B}(\vec{p})^\mu_{\cdot\nu}\, \epsilon^\nu(r, \vec{0}) = \mathcal{B}(\vec{p})^\mu_{\cdot r} = \left(\frac{p^r}{m} \; , \quad \delta^r_i + \frac{p^i\, p^r}{m(E+m)} \right) \tag{B.4.156}$$
$$\Rightarrow \quad \epsilon^\mu(r, \vec{p}) = -\epsilon_\mu(r, -\vec{p}) \tag{B.4.157}$$

le decomposizioni spettrali (cfr.(2.3.127)-(2.3.128)) dei campi sono le seguenti

$$W^\mu(x) = \sum_{r=1}^{3} \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \left[A(r, \vec{p})\, \epsilon^\mu(r, \vec{p})\, e^{-ipx} \; + \; B^\dagger(r, \vec{p})\, \epsilon^{*\mu}(r, \vec{p})\, e^{ipx} \right] \tag{B.4.158}$$
$$W^{\dagger\mu}(x) = \sum_{r=1}^{3} \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \left[B(r, \vec{p})\, \epsilon^\mu(r, \vec{p})\, e^{-ipx} \; + \; A^\dagger(r, \vec{p})\, \epsilon^{*\mu}(r, \vec{p})\, e^{ipx} \right] \tag{B.4.159}$$

e valgono le regole di commutazione (le altre sono nulle) che seguono

$$\left[A(r, \vec{p}), A^\dagger(t, \vec{q}) \right] = \left[B(r, \vec{p}), B^\dagger(t, \vec{q}) \right] = 2\, E_p\, (2\pi)^3\, \delta_{rt}\, \delta^3(\vec{p} - \vec{q}) \tag{B.4.160}$$

Al posto delle polarizzazioni lineari può essere utile usare le polarizzazioni circolari, che, come sappiamo, individuano direttamente i valori delle componenti z dello spin lungo l'asse di quantizzazione z.
Come sappiamo, in termini delle polarizzazioni lineari di cui sopra, quelle circolari sono definite da (cfr.(2.3.146))

$$\tilde{\epsilon}^\mu_{(\pm 1)}(\vec{p}) = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\epsilon^\mu(1, \vec{p}) \pm i \epsilon^\mu(2, \vec{p}) \right]; \qquad \tilde{\epsilon}^\mu_{(0)}(\vec{p}) = \epsilon^\mu(3, \vec{p}) \tag{B.4.161}$$

ovvero

$$\tilde{\epsilon}^{\mu}_{(s)}(\vec{p}) = \sum_{r=1}^{3} V_{sr}\, \epsilon^{\mu}(r,\vec{p}) \quad \Rightarrow \quad \tilde{\epsilon}^{*\mu}_{(s)}(\vec{p}) = \sum_{r=1}^{3} V^{*}_{sr}\, \epsilon^{\mu}(r,\vec{p}) = \sum_{r=1}^{3} V^{\dagger}_{rs}\, \epsilon^{\mu}(r,\vec{p}) \qquad \text{(B.4.162)}$$

$$\begin{array}{rcl} \tilde{A}_{(s)}(\vec{p}) & \equiv & \sum_{r=1}^{3} V^{\dagger}_{rs} A(r,\vec{p}) \ \Leftrightarrow \ \tilde{A}^{\dagger}_{(s)}(\vec{p}) = \sum_{r=1}^{3} V^{t}_{rs} A^{\dagger}(r,\vec{p}) = \sum_{r=1}^{3} V_{sr} A^{\dagger}(r,\vec{p}) \\ \tilde{B}_{(s)}(\vec{p}) & \equiv & \sum_{r=1}^{3} V^{\dagger}_{rs} B(r,\vec{p}) \ \Leftrightarrow \ \tilde{B}^{\dagger}_{(s)}(\vec{p}) = \sum_{r=1}^{3} V^{t}_{rs} B^{\dagger}(r,\vec{p}) = \sum_{r=1}^{3} V_{sr} A^{\dagger}(r,\vec{p}) \end{array} \qquad \text{(B.4.163)}$$

dove le matrici unitarie V e $V^{\dagger}$ sono date da (cfr.(2.3.150))

$$V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \qquad \Leftrightarrow \qquad V^{\dagger} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(B.4.164)}$$

Per questi quadrivettori di polarizzazione, abbiamo (cfr.(2.3.148) e (2.3.149))

$$\left(\tilde{\epsilon}^{\mu}_{(\pm 1)}(\vec{p})\right)^{*} = -\tilde{\epsilon}^{\mu}_{(\mp 1)}(\vec{p}) \qquad \left(\tilde{\epsilon}^{\mu}_{(0)}(\vec{p})\right)^{*} = \tilde{\epsilon}^{\mu}_{(0)}(\vec{p}) \qquad \text{(B.4.165)}$$

mentre risulta, per qualunque $s = \pm 1, 0$

$$\tilde{\epsilon}^{\mu}_{(s)}(-\vec{p}) = -\tilde{\epsilon}_{(s)\mu}(\vec{p}) \qquad \text{(B.4.166)}$$

La rappresentazione spettrale dei campi W^{μ} e $W^{*\mu}$ in termini di queste polarizzazioni ha la struttura solita, ovvero

$$W^{\mu}(x) = \sum_{s=-1}^{+1} \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \left[\tilde{A}_{(s)}(\vec{p})\, \tilde{\epsilon}^{\mu}_{(s)}(\vec{p})\, e^{-ipx} + \tilde{B}^{\dagger}_{(s)}(\vec{p})\, \tilde{\epsilon}^{*\mu}_{(s)}(\vec{p})\, e^{ipx}\right] \qquad \text{(B.4.167)}$$

$$W^{\dagger\mu}(x) = \sum_{s=-1}^{+1} \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \left[\tilde{B}_{(s)}(\vec{p})\, \tilde{\epsilon}^{\mu}_{(s)}(\vec{p})\, e^{-ipx} + \tilde{A}^{\dagger}_{(s)}(\vec{p})\, \tilde{\epsilon}^{*\mu}_{(s)}(\vec{p})\, e^{ipx}\right] \qquad \text{(B.4.168)}$$

e, poichè si passa dalle polarizzazioni lineari a quelle circolari attraverso una trasformazione unitaria, anche le regole di commutazione per gli operatori di creazione e distruzione che compaiono nelle (B.4.167) e (B.4.168), espressi dalla stessa trasformazione unitaria (cfr.(B.4.163)) in termini degli operatori di creazione e distruzione introdotti con le polarizzazioni lineari, restano le stesse (cfr.(2.3.159)), ovvero

$$\left[\tilde{A}_{(s)}(\vec{p}), \tilde{A}^{\dagger}_{(t)}(\vec{q})\right] = \left[\tilde{B}_{(s)}(\vec{p}), \tilde{B}^{\dagger}_{(t)}(\vec{q})\right] = 2\, E_p\, (2\pi)^3\, \delta_{st}\, \delta^3(\vec{p} - \vec{q}) \qquad \text{(B.4.169)}$$

Infine, dall'evidente invarianza in forma della densità lagrangiana (B.4.152) per trasformazioni di gauge di prima specie, via teorema di Noëther, la densità di corrente (cfr.(2.3.126)) conservata che ne consegue è la seguente

$$J^{\mu} = -i\left[(\partial^{\mu} W^{\nu})\, W^{\dagger}_{\nu} - (\partial^{\mu} W^{\dagger}_{\nu})\, W^{\nu}\right] \qquad \text{(B.4.170)}$$

Coniugazione di carica

In analogia con quanto visto per il campo scalare carico, definiamo l'operatore di coniugazione di carica C in modo che

- esso sia unitario,
- mandi lo stato di particella (A) in quello di antiparticella (B) e viceversa,
- mantenga lo stesso valore dell'impulso,
- non cambi lo stato di polarizzazione,
- sia tale per cui $C^2 = I$

Dunque, assumendo per concretezza polarizzazioni lineari (ma nulla cambia nel caso di polarizzazioni circolari !), sarà

$$C\,|r,\vec{p}>_A \;=\; e^{i\eta_C}\,|r,\vec{p}>_B \tag{B.4.171}$$

$$C\,|r,\vec{p}>_B \;=\; e^{-i\eta_C}\,|r,\vec{p}>_A \tag{B.4.172}$$

Considerando, al solito, lo stato di vuoto $|\Omega>$ come C-invariante, abbiamo quindi

$$C\,|r,\vec{p}>_A \equiv C\,A^\dagger(r,\vec{p})\,|\Omega> = C\,A^\dagger(r,\vec{p})\,C^{-1}\,|\Omega> \tag{B.4.173}$$

mentre, per definizione, è

$$e^{i\eta_C}\,|r,\vec{p}>_B \equiv e^{i\eta_C}\,B^\dagger(r,\vec{p})\,|\Omega> \tag{B.4.174}$$

per cui deve aversi che

$$C\,A^\dagger(r,\vec{p})\,C^{-1} = e^{i\eta_C}\,B^\dagger(r,\vec{p}) \tag{B.4.175}$$

la quale implica che, essendo C unitaria, sia

$$C\,A(r,\vec{p})\,C^{-1} = e^{-i\eta_C}\,B(r,\vec{p}) \tag{B.4.176}$$

e, se vogliamo che il campo si trasformi in modo accettabile, avendo richiesto che $C^2 = I$ e dunque $C = C^{-1}$, avremo anche che

$$C\,B^\dagger(r,\vec{p})\,C^{-1} = e^{-i\eta_C}\,A^\dagger(r,\vec{p}) \tag{B.4.177}$$

$$C\,B(r,\vec{p})\,C^{-1} = e^{i\eta_C}\,A(r,\vec{p}) \tag{B.4.178}$$

Risulta così che

$$\begin{aligned} CW_\mu(x)C^{-1} &= \\ &= C\sum_{r=1}^{3}\int\frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\left[A(r,\vec{p})\,\epsilon_\mu(r,\vec{p})\,e^{-ipx} \;+\; B^\dagger(r,\vec{p})\,\epsilon^*_\mu(r,\vec{p})\,e^{ipx}\right]C^{-1} = \\ &= e^{-i\eta_C}\sum_{r=1}^{3}\int\frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\left[B(r,\vec{p})\,\epsilon_\mu(r,\vec{p})\,e^{-ipx} \;+\; A^\dagger(r,\vec{p})\,\epsilon^*_\mu(r,\vec{p})\,e^{ipx}\right] = \\ &= e^{-i\eta_C}W^\dagger_\mu(x) \end{aligned} \tag{B.4.179}$$

e analogamente abbiamo che

$$C W_\mu^\dagger(x)\, C^{-1} = e^{i\eta_C} W_\mu(x) \tag{B.4.180}$$

Poiché nel caso di polarizzazioni circolari gli operatori di creazione e distruzione si esprimono in termini di quelli introdotti nel caso di polarizzazioni lineari attraverso le matrici V e $V^\dagger$ (cfr.(B.4.163)) nello stesso modo per particella e antiparticella, abbiamo

$$\begin{array}{rclrcl} C\, \tilde{A}_{(s)}(\vec{p})\, C^{-1} & = & e^{-i\eta_C}\, \tilde{B}_{(s)}(\vec{p}); & C\, \tilde{A}^\dagger_{(s)}(\vec{p})\, C^{-1} & = & e^{i\eta_C}\, \tilde{B}^\dagger_{(s)}(\vec{p}) \\ C\, \tilde{B}_{(s)}(\vec{p})\, C^{-1} & = & e^{i\eta_C}\, \tilde{A}_{(s)}(\vec{p}); & C\, \tilde{B}^\dagger_{(s)}(\vec{p})\, C^{-1} & = & e^{-i\eta_C}\, \tilde{A}^\dagger_{(s)}(\vec{p}) \end{array} \tag{B.4.181}$$

Venendo infine alla densità di corrente, risulta

$$\begin{aligned} J^\mu(x) \quad &= \quad -i\left[(\partial^\mu W^\nu)\, W_\nu^\dagger - (\partial^\mu W_\nu^\dagger)\, W^\nu\right] \\ &\xrightarrow{C} \quad C\, J^\mu(x)\, C^{-1} = -i\left[(\partial^\mu W^{\dagger\nu})\, W_\nu - (\partial^\mu W_\nu)\, W^{\dagger\nu}\right] = -J^\mu(x) \end{aligned} \tag{B.4.182}$$

mentre possiamo certamente concludere che c'è invarianza in forma sotto C della lagrangiana e dunque sul fatto che questa simmetria è conservata dalla dinamica libera del campo vettoriale massivo carico.

Parità
Alla trasformazione di parità P richiediamo che

- essa sia unitaria,
- rispetti gli stati di particella e antiparticella,
- rispetti lo stato di spin,
- inverta il segno dell'impuslo spaziale,
- sia tale che $P^2 = I$.

Conviene usare la rappresentazione in termini di polarizzazioni circolari: sulla base delle richieste di cui sopra definiamo P sulla base di singola particella/antiparticella in modo tale che

$$P|s, \vec{p}>_A = \pm|s, -\vec{p}>_A \tag{B.4.183}$$
$$P|s, \vec{p}>_B = \pm|s, -\vec{p}>_B \tag{B.4.184}$$

dove $s = -1,\, 0,\, 1$. Quanto alle parità intrinseche, ovvero alla scelta del segno $\pm$ nel secondo membro delle (B.4.183) e (B.4.183), se vogliamo che il campo si trasformi in modo accettabile sotto P, occorre solo che esse siano uguali. Consideriamo ora il caso della particella (quella dell'antiparticella è identico): abbiamo che

$$P|s, \vec{p}>_A \;\equiv P\;\; \tilde{A}^{\dagger}_{(s)}(\vec{p})|\Omega> \;=\;\; P\, \tilde{A}^{\dagger}_{(s)}(\vec{p})\, P^{-1}|\Omega> \tag{B.4.185}$$

dove abbiamo assunto, al solito, che lo stato di vuoto $|\Omega>$ sia P-invariante. Siccome

$$|s, -\vec{p}>_A \;\equiv\;\; \tilde{A}^{\dagger}_{(s)}(-\vec{p})|\Omega> \tag{B.4.186}$$

sulla base della (B.4.183) definiamo[27] allora (P è unitaria ...)

$$P\, \tilde{A}^{\dagger}_{(s)}(\vec{p})\, P^{-1} = \pm\tilde{A}^{\dagger}_{(s)}(-\vec{p}) \;\;\Rightarrow P\, \tilde{A}_{(s)}(\vec{p})\, P^{-1} = \pm\tilde{A}_{(s)}(-\vec{p}) \tag{B.4.189}$$
$$P\, \tilde{B}^{\dagger}_{(s)}(\vec{p})\, P^{-1} = \pm\tilde{B}^{\dagger}_{(s)}(-\vec{p}) \;\;\Rightarrow P\, \tilde{B}_{(s)}(\vec{p})\, P^{-1} = \pm\tilde{B}_{(s)}(-\vec{p}) \tag{B.4.190}$$

[27] Dato il legame fra gli operatori di creazione e distruzione nel caso di polarizzazioni circolari e nel caso di polarizzazioni, questa definizione implica che

$$P\, A(r, \vec{p})\, P^{-1} = \pm A(r, -\vec{p}) \;\;\Rightarrow P\, A^{\dagger}(r, \vec{p})\, P^{-1} = \pm A^{\dagger}(r, -\vec{p}) \tag{B.4.187}$$
$$P\, B(r, \vec{p})\, P^{-1} = \pm B(r, -\vec{p}) \;\;\Rightarrow P\, B^{\dagger}(r, \vec{p})\, P^{-1} = \pm B^{\dagger}(r, -\vec{p}) \tag{B.4.188}$$

Per quanto riguarda i campi, abbiamo dunque che

$$P\,W^\mu(x)\,P^{-1} \;=\; P\sum_{s=-1}^{+1}\int\frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\left[\tilde A_{(s)}(\vec p)\,\tilde\epsilon^\mu_{(s)}(\vec p)\,e^{-ipx}\;+\;\tilde B^\dagger_{(s)}(\vec p)\,\tilde\epsilon^{*\mu}_{(s)}(\vec p)\,e^{ipx}\right]P^{-1} =$$
$$=\sum_{s=-1}^{+1}\int\frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\left[P\,\tilde A_{(s)}(\vec p)\,P^{-1}\,\tilde\epsilon^\mu_{(s)}(\vec p)\,e^{-ipx}\;+\;P\,\tilde B^\dagger_{(s)}(\vec p)\,P^{-1}\,\tilde\epsilon^{*\mu}_{(s)}(\vec p)\,e^{ipx}\right] =$$
$$=\pm\sum_{s=-1}^{+1}\int\frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\left[\tilde A_{(s)}(-\vec p)\,\tilde\epsilon^\mu_{(s)}(\vec p)\,e^{-ipx}\;+\;\tilde B^\dagger_{(s)}(-\vec p)\,\tilde\epsilon^{*\mu}_{(s)}(\vec p)\,e^{ipx}\right] \tag{B.4.191}$$

Poniamo ora, al solito

$$q^\mu = (q^0,\vec q)\equiv(p^0,-\vec p)\equiv Pp \tag{B.4.192}$$
$$\Rightarrow\;\;\vec q=-\vec p;\;\;\frac{d^3p}{2E_p}=\frac{d^3q}{2E_q};\;\;px\equiv p\cdot x=(Pp)\cdot(Px)=q\cdot Px\equiv q\cdot x' \tag{B.4.193}$$

dove

$$Px\equiv(x^0,-\vec x)\equiv x' \tag{B.4.194}$$

Vista anche la (B.4.166) secondo la quale $\tilde\epsilon^\mu_{(s)}(-\vec p)=-\tilde\epsilon_{(s)\mu}(\vec p)$, risulta quindi

$$P\,W^\mu(x)\,P^{-1} \;=\; \sum_{s=-1}^{+1}\int\frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3}\left[\tilde A_{(s)}(\vec q)\,\tilde\epsilon^\mu_{(s)}(-\vec q)\,e^{-iq\cdot Px}\;+\;\tilde B^\dagger_{(s)}(\vec q)\,\tilde\epsilon^{*\mu}_{(s)}(-\vec q)\,e^{iq\cdot Px}\right] =$$
$$=-\pm\sum_{s=-1}^{+1}\int\frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3}\left[\tilde A_{(s)}(\vec q)\,\tilde\epsilon_{\mu(s)}(\vec q)\,e^{-iq\cdot Px}\;+\;\tilde B^\dagger_{(s)}(\vec q)\,\tilde\epsilon^*_{\mu(s)}(\vec q)\,e^{iq\cdot Px}\right] =$$
$$=\mp\sum_{s=-1}^{+1}\int\frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3}\left[\tilde A_{(s)}(\vec q)\,\tilde\epsilon_{\mu(s)}(\vec q)\,e^{-iq\cdot Px}\;+\;\tilde B^\dagger_{(s)}(\vec q)\,\tilde\epsilon^*_{\mu(s)}(\vec q)\,e^{iq\cdot Px}\right] =$$
$$=\mp W_\mu(x')\equiv\mp W_\mu(Px) \tag{B.4.195}$$

e analogamente abbiamo

$$P\,W^{\dagger\mu}(x)\,P^{-1}=\mp W^\dagger_\mu(x')=\mp W^\dagger_\mu(Px) \tag{B.4.196}$$

Si parla di campo vettoriale in senso proprio se $P\,W^\mu(x)\,P^{-1}=W_\mu(Px)$ e di campo pseudovettoriale quando $P\,W^\mu(x)\,P^{-1}=-W_\mu(Px)$.
Il primo caso corrisponde alla scelta del segno -1 nelle (B.4.183)- (B.4.184), mentre il secondo alla scelta del segno $+1$ (parità intrinseca).

Venendo infine alla densità di corrente associato al campo vettoriale massivo carico, risulta

$$
\begin{aligned}
J^\mu(x) &= -i\left[(\partial^\mu W^\nu)\, W^\dagger_\nu - (\partial^\mu W^\dagger_\nu)\, W^\nu\right] \\
&= -i\left[\left(\frac{\partial}{x_\mu} W^\nu(x)\right)\, W^\dagger_\nu(x) - \left(\frac{\partial}{x_\mu} W^\dagger_\nu(x)\right)\, W^\nu(x)\right] \\
&\xrightarrow{P} -i\left[\left(\frac{\partial}{x'^\mu} W_\nu(x')\right)\, W^\dagger_\nu(x') - \left(\frac{\partial}{x'^\mu} W^{\dagger\nu}(x')\right)\, W_\nu(x')\right] = \\
&= J_\mu(x') = J_\mu(Px) \qquad \text{(B.4.197)}
\end{aligned}
$$

Quanto all'invarianza in forma sotto P della lagrangiana, essa risulta piuttosto evidente e dunque anche questa simmetria discreta è conservata dalla dinamica libera del campo vettoriale massivo carico.

Time reversal
La trasformazione di time-reversal T, per quanto già sappiamo, dovrà

- essere antiunitaria,
- rispettare gli stati di particella (A) e antiparticella (B),
- invertire il segno sia dell'impulso spaziale che delle componenti dello spin,
- soddisfare la condizione $T^2 = I$ visto che abbiamo a che fare con particelle di spin intero.

Per capire meglio quale dovrà essere l'azione esplicita di T sugli operatori di creazione e distruzione del campo, è opportuno usare le polarizzazioni circolari poiché esse individuano direttamente i valori delle componenti z dello spin lungo l'asse di quantizzazione z, le quali dovranno essere rovesciate da T. Abbiamo (cfr.(2.3.157) - (2.3.158))

$$W^\mu(x) = \sum_{s=-1}^{+1} \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \left[\tilde{\epsilon}^\mu_{(s)}(\vec{p})\tilde{A}_{(s)}(\vec{p})\, e^{-ipx} + \tilde{\epsilon}^{*\mu}_{(s)}(\vec{p})\, \tilde{B}^\dagger_{(s)}(\vec{p})\, e^{ipx}\right] \tag{B.4.198}$$

$$W^{\dagger\mu}(x) = \sum_{s=-1}^{+1} \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \left[\tilde{\epsilon}^\mu_{(s)}(\vec{p})\tilde{B}_{(s)}(\vec{p})\, e^{-ipx} + \tilde{\epsilon}^{*\mu}_{(s)}(\vec{p})\, \tilde{A}^\dagger_{(s)}(\vec{p})\, e^{ipx}\right] \tag{B.4.199}$$

Consideriamo dunque, per esempio, uno stato di particella avente impulso spaziale $\vec{p}$ e componente z dello spin uguale a s, ovvero

$$|\vec{p}, s >_A \equiv \tilde{A}^\dagger_{(s)}(\vec{p})\, |\Omega > \tag{B.4.200}$$

Per quanto detto sopra, dovrà accadere che

$$T\, |\vec{p}, s >_A \;\to\; | -\vec{p}, -s >_A \tag{B.4.201}$$

Se vogliamo che il campo $W^\mu(x)$ si trasformi sotto T nel modo che ci suggerisce il caso classico, ovvero[28]

$$W^\mu(x) \xrightarrow{T} -W_\mu(Tx) \tag{B.4.202}$$

dobbiamo definire l'azione di T sugli operatori di creazione e distruzione tenendo presente anche il suo effetto sui vettori di polarizzazione, visto che T è antiunitaria.

[28]Nella (B.4.202) indichiamo con Tx il quadrivettore $(-x^0, \vec{x})$. T è, in questo caso, la matrice del gruppo di Lorentz $T = -g$ dove g è il tensore metrico e non è, ovviamente, l'operatore T che agisce nello spazio di Hilbert degli stati, anche se usiamo lo stesso simbolo.

Consideriamo a questo proposito il termine $\sum_{s=-1}^{1} \tilde{\epsilon}^{\mu}_{(s)}(\vec{p})\, \tilde{A}_{(s)}(\vec{p})$ che compare nello sviluppo del campo $W^\mu(x)$. Abbiamo

$$
\begin{aligned}
T\left\{\sum_{s=-1}^{1} \tilde{\epsilon}^{\mu}_{(s)}(\vec{p})\, \tilde{A}_{(s)}(\vec{p})\right\} T^{-1} &= \sum_{s=-1}^{1} \tilde{\epsilon}^{*\mu}_{(s)}(\vec{p})\, T\, \tilde{A}_{(s)}(\vec{p})\, T^{-1} = \\
&= \sum_{s=-1}^{1} (-1)^s\, \tilde{\epsilon}^{\mu}_{(-s)}(\vec{p})\, T\, \tilde{A}_{(s)}(\vec{p})\, T^{-1} = \\
&= -\sum_{s=-1}^{1} (-1)^s\, \tilde{\epsilon}_{\mu(-s)}(-\vec{p})\, T\, \tilde{A}_{(s)}(\vec{p})\, T^{-1} = \\
&= -\sum_{\sigma=-1}^{1} (-1)^\sigma\, \tilde{\epsilon}_{\mu(\sigma)}(-\vec{p})\;\; T\, \tilde{A}_{(-\sigma)}(\vec{p})\, T^{-1}
\end{aligned}
\tag{B.4.203}
$$

dove abbiamo usato la (2.3.148) e la (2.3.149) e quindi abbiamo cambiato variabile muta di somma da s a $\sigma = -s$.
Affinché il risultato ottenuto possa rappresentare la prima parte dello sviluppo del campo, è necessario che la variabile di spin e quella dell'impulso spaziale che compaiono come argommento del vettore di polarizzazione, compaiano nello stesso modo come argomento dell'operatore $\tilde{A}$ e che l'espressione non contenga altre quantità dipendenti dallo spin o dall'impulso.
L'azione di T dovrà dunque essere tale che[29]

$$T\, \tilde{A}_{(s)}(\vec{p})\, T^{-1} = e^{i\eta_T}\, (-1)^s\, \tilde{A}_{(-s)}(-\vec{p}) \tag{B.4.204}$$

dove la fase $e^{i\eta_T}$, a causa del carattere antiunitario di T, è a priori arbitraria e comunque risulta inessenziale.
Definiamo dunque

$$T\, \tilde{A}^{\dagger}_{(s)}(\vec{p})\, T^{-1} = e^{i\eta_T}\, (-1)^s\, \tilde{A}^{\dagger}_{(-s)}(-\vec{p}) \tag{B.4.205}$$
$$T\, \tilde{A}_{(s)}(\vec{p})\, T^{-1} = e^{-i\eta_T}\, (-1)^s\, \tilde{A}_{(-s)}(-\vec{p}) \tag{B.4.206}$$

Per l'antiparticella, tenendo conto dell'osservazione già fatta nel caso di C circa il fattore di fase, sarà allora

$$T\, \tilde{B}^{\dagger}_{(s)}(\vec{p})\, T^{-1} = e^{-i\eta_T}\, (-1)^s\, \tilde{B}^{\dagger}_{(-s)}(-\vec{p}) \tag{B.4.207}$$
$$T\, \tilde{B}_{(s)}(\vec{p})\, T^{-1} = e^{i\eta_T}\, (-1)^s\, \tilde{B}_{(-s)}(-\vec{p}) \tag{B.4.208}$$

[29] Si osservi che, coerentemente con quanto richiesto a T, la definizione a cui siamo pervenuti cambia effettivamente il segno sia dell'impulso spaziale che della componente dello spin lungo l'asse di quantizzazione.

Per il campo $W^\mu(x)$ (cfr.(2.3.157)) sarà quindi

$$
\begin{aligned}
T\,W^\mu(x)\,T^{-1} &= T\sum_{s=-1}^{+1}\int\frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\left[\tilde{\epsilon}^\mu_{(s)}(\vec{p})\tilde{A}_{(s)}(\vec{p})\,e^{-ipx} \;+\; \tilde{\epsilon}^{*\mu}_{(s)}(\vec{p})\,\tilde{B}^\dagger_{(s)}(\vec{p})\,e^{ipx}\right]T^{-1} = \\
&= \sum_{s=-1}^{+1}\int\frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}T\,\left[\tilde{\epsilon}^\mu_{(s)}(\vec{p})\tilde{A}_{(s)}(\vec{p})\,e^{-ipx} \;+\; \tilde{\epsilon}^{*\mu}_{(s)}(\vec{p})\,\tilde{B}^\dagger_{(s)}(\vec{p})\,e^{ipx}\right]T^{-1} = \\
&= \sum_{s=-1}^{+1}\int\frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\left[\tilde{\epsilon}^{*\mu}_{(s)}(\vec{p})T\,\tilde{A}_{(s)}(\vec{p})T^{-1}\,e^{ipx} \;+\; \tilde{\epsilon}^\mu_{(s)}(\vec{p})\,T\,\tilde{B}^\dagger_{(s)}(\vec{p})\,T^{-1}\,e^{-ipx}\right] = \\
&= e^{-i\eta_T}\sum_{s=-1}^{+1}\int\frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\left[\tilde{\epsilon}^{*\mu}_{(s)}(\vec{p})(-1)^s\tilde{A}_{(-s)}(-\vec{p})\,e^{ipx} \;+\; \tilde{\epsilon}^\mu_{(s)}(\vec{p})\,(-1)^s\tilde{B}^\dagger_{(-s)}(-\vec{p})\,e^{-ipx}\right] = \\
&= e^{-i\eta_T}\sum_{s=-1}^{+1}(-1)^s\int\frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\left[\tilde{\epsilon}^{*\mu}_{(s)}(\vec{p})\tilde{A}_{(-s)}(-\vec{p})\,e^{ipx} \;+\; \tilde{\epsilon}^\mu_{(s)}(\vec{p})\,\tilde{B}^\dagger_{(-s)}(-\vec{p})\,e^{-ipx}\right] \qquad \text{(B.4.209)}
\end{aligned}
$$

Cambiamo adesso la variabile di integrazione, ponendo

$$
q \equiv (q^0,\,\vec{q}) = -Tp = -(-p^0,\,\vec{p}) = (p^0,-\vec{p}) \qquad \text{(B.4.210)}
$$

dove $T = -g$ è la matrice di Lorentz che abbiamo già incontrato, tale che $Tx = (-x^0,\,\vec{x})$.
Poiché evidentemente $p\cdot x = Tp\cdot Tx = -q\cdot Tx$, abbiamo

$$
\begin{aligned}
T\,W^\mu(x)\,T^{-1} = \;& e^{-i\eta_T}\sum_{s=-1}^{+1}(-1)^s\int\frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3}\left[\tilde{\epsilon}^{*\mu}_{(s)}(-\vec{q})\tilde{A}_{(-s)}(\vec{q})\,e^{-iqTx} \;+\right. \\
&\left. +\;\tilde{\epsilon}^\mu_{(s)}(-\vec{q})\,\tilde{B}^\dagger_{(-s)}(\vec{q})\,e^{iqTx}\right] = \\
= e^{-i\eta_T}&\sum_{s=-1}^{+1}(-1)^s\int\frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3}\left[-(-1)^s\,\tilde{\epsilon}_{(-s)\mu}(\vec{q})\tilde{A}_{(-s)}(\vec{q})\,e^{-iqTx} \;-\right. \\
&\left. -\;(-1)^s\,\tilde{\epsilon}^*_{(-s)\mu}(\vec{q})\,\tilde{B}^\dagger_{(-s)}(\vec{q})\,e^{iqTx}\right] = \\
= -e^{-i\eta_T}&\sum_{s=-1}^{+1}\int\frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3}\left[\tilde{\epsilon}_{(-s)\mu}(-\vec{q})\tilde{A}_{(-s)}(\vec{q})\,e^{-iqTx} \;+\right. \\
&\left. +\;\tilde{\epsilon}^*_{(-s)\mu}(\vec{q})\,\tilde{B}^\dagger_{(-s)}(\vec{q})\,e^{iqTx}\right]
\end{aligned}
$$

e dunque

$$
T\,W^\mu(x)\,T^{-1} = -e^{-i\eta_T}\,W_\mu(Tx) \qquad \text{(B.4.211)}
$$

da cui anche

$$
T\,W^{\dagger\mu}(x)\,T^{-1} = -e^{i\eta_T}\,W^\dagger_\mu(Tx) \qquad \text{(B.4.212)}
$$

Per completezza vediamo adesso quale forma assume la Time Reversal quando, invece delle polarizzazioni circolari, si usino quelle lineari.
Nel caso di polarizzazioni circolari, abbiamo visto che abbiamo

$$\begin{array}{rcl} T\,\tilde{A}^\dagger_{(s)}(\vec{p})\,T^{-1} &=& e^{i\eta_T}\,(-1)^s\,\tilde{A}^\dagger_{(-s)}(-\vec{p}) \\ T\,\tilde{A}_{(s)}(\vec{p})\,T^{-1} &=& e^{-i\eta_T}\,(-1)^s\,\tilde{A}_{(-s)}(-\vec{p}) \\ T\,\tilde{B}^\dagger_{(s)}(\vec{p})\,T^{-1} &=& e^{-i\eta_T}\,(-1)^s\,\tilde{B}^\dagger_{(-s)}(-\vec{p}) \\ T\,\tilde{B}_{(s)}(\vec{p})\,T^{-1} &=& e^{i\eta_T}\,(-1)^s\,\tilde{B}_{(-s)}(-\vec{p}) \end{array} \tag{B.4.213}$$

Come si ricorderà, il legame fra gli operatori di creazione e distruzione nel caso di polarizzazioni circolari e lineari per gli stati di particella (lo stesso accade per quelli di antiparticella) è il seguente

$$\tilde{A}_{(s)}(\vec{p}) \equiv \sum_{r=1}^3 V^\dagger_{rs} A(r,\vec{p}) \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{A}^\dagger_{(s)}(\vec{p}) = \sum_{r=1}^3 V^t_{rs} A^\dagger(r,\vec{p}) = \sum_{r=1}^3 V_{sr} A^\dagger(r,\vec{p}) \tag{B.4.214}$$

dove le matrici V e $V^\dagger$ sono così definite

$$V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \qquad \Leftrightarrow \qquad V^\dagger = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{B.4.215}$$

Esplicitamente abbiamo quindi che

$$\left.\begin{array}{ll} \tilde{A}^\dagger_{(-1)}(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[A^\dagger(1,\vec{p}) - iA^\dagger(2,\vec{p})\right]; & \tilde{B}^\dagger_{(-1)}(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[B^\dagger(1,\vec{p}) - iB^\dagger(2,\vec{p})\right] \\ \tilde{A}^\dagger_{(0)}(\vec{p}) = A^\dagger(3,\vec{p}); & \tilde{B}^\dagger_{(0)}(\vec{p}) = B^\dagger(3,\vec{p}) \\ \tilde{A}^\dagger_{(+1)}(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[-A^\dagger(1,\vec{p}) - iA^\dagger(2,\vec{p})\right]; & \tilde{B}^\dagger_{(+1)}(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[-B^\dagger(1,\vec{p}) - iB^\dagger(2,\vec{p})\right] \\ & \\ \tilde{A}_{(-1)}(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[A(1,\vec{p}) + iA(2,\vec{p})\right]; & \tilde{B}_{(-1)}(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[B(1,\vec{p}) + iB(2,\vec{p})\right] \\ \tilde{A}_{(0)}(\vec{p}) = A(3,\vec{p}); & \tilde{B}_{(0)}(\vec{p}) = B(3,\vec{p}) \\ \tilde{A}_{(+1)}(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[-A(1,\vec{p}) + iA(2,\vec{p})\right]; & \tilde{B}_{(+1)}(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[-B(1,\vec{p}) + iB(2,\vec{p})\right] \end{array}\right\} \tag{B.4.216}$$

da cui ricaviamo che

$$\begin{array}{l} T\left[\tilde{A}^\dagger_{(-1)}(\vec{p}) - \tilde{A}^\dagger_{(+1)}(\vec{p})\right]T^{-1} = \sqrt{2}T\left[A^\dagger(1,\vec{p})\right]T^{-1} = \sqrt{2}\;T\,A^\dagger(1,\vec{p})\,T^{-1} = \\ = e^{i\eta_T}(-1)\left[\tilde{A}^\dagger_{(+1)}(-\vec{p}) - \tilde{A}^\dagger_{(-1)}(-\vec{p})\right] = \\ = e^{i\eta_T}(-1)\left[-\sqrt{2}A^\dagger(1,-\vec{p})\right] = e^{i\eta_T}\sqrt{2}A^\dagger(1,-\vec{p}) \\ \Rightarrow T\,A^\dagger(1,\vec{p})\,T^{-1} = e^{i\eta_T}A^\dagger(1,-\vec{p}) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} T\left[\tilde{A}^\dagger_{(-1)}(\vec{p}) + \tilde{A}^\dagger_{(+1)}(\vec{p})\right]T^{-1} = \sqrt{2}T\left[-i\,A^\dagger(2,\vec{p})\right]T^{-1} = i\sqrt{2}\;T\,A^\dagger(2,\vec{p})\,T^{-1} = \\ = e^{i\eta_T}(-1)\left[\tilde{A}^\dagger_{(+1)}(-\vec{p}) + \tilde{A}^\dagger_{(-1)}(-\vec{p})\right] = \\ = e^{i\eta_T}(-1)\left[-i\sqrt{2}A^\dagger(2,-\vec{p})\right] = i\sqrt{2}\,e^{i\eta_T}A^\dagger(2,-\vec{p}) \\ \Rightarrow T\,A^\dagger(2,\vec{p})\,T^{-1} = e^{i\eta_T}A^\dagger(2,-\vec{p}) \end{array}$$

$$T\,\tilde{A}^\dagger_{(0)}(\vec{p})\,T^{-1} = T\,A^\dagger(3,\vec{p})\,T^{-1} = e^{i\eta_T}A^\dagger(3,-\vec{p})$$

ovvero

$$T\,A^\dagger(r,\vec p)\,T^{-1} = e^{i\eta_T} A^\dagger(r,-\vec p); \;\; \Leftrightarrow \;\; T\,A(r,\vec p)\,T^{-1} = e^{-i\eta_T} A(r,-\vec p) \;\; per\, r=1,2,3 \tag{B.4.217}$$

mentre per l'antiparticella, nello stesso modo otteniamo

$$T\,B^\dagger(r,\vec p)\,T^{-1} = e^{-i\eta_T} B^\dagger(r,-\vec p); \;\; \Leftrightarrow \;\; T\,B(r,\vec p)\,T^{-1} = e^{i\eta_T} B(r,-\vec p) \;\; per\, r=1,2,3 \tag{B.4.218}$$

Utilizzando questi risultati, ottenuti con le polarizzazioni lineari, risulta immediato dimostrare le leggi di trasformazione dei campi W_μ e $W^\dagger_\mu$, ovvero la (B.4.211) e la (B.4.212), cioé

$$T\,W^\mu(x)\,T^{-1} = -e^{-i\eta_T} W_\mu(Tx) \quad \Leftrightarrow \quad T\,W^{\dagger\mu}(x)\,T^{-1} = -e^{i\eta_T} W^\dagger_\mu(Tx) \tag{B.4.219}$$

Abbiamo infatti (ricordiamo ancora una volta che le polarizzazioni lineari sono reali e che vale la (B.4.157))

$$\begin{aligned}
T\,W^\mu(x)\,T^{-1} &= T\sum_{r=1}^{3}\int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\left[\epsilon^\mu(r,\vec p)A(r,\vec p)\,e^{-ipx} + \epsilon^\mu(r,\vec p)B^\dagger(r,\vec p)\,e^{ipx}\right]T^{-1} = \\
&= \sum_{r=1}^{3}\int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\left[\epsilon^\mu(r,\vec p)\,T\,A(r,\vec p)\,T^{-1}\,e^{ipx} + \epsilon^\mu(r,\vec p)\,T\,B^\dagger(r,\vec p)\,T^{-1}\,e^{-ipx}\right] = \\
&= e^{-i\eta_T}\sum_{r=1}^{3}\int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\left[\epsilon^\mu(r,\vec p)\,A(r,-\vec p)\,e^{ipx} + \epsilon^\mu(r,\vec p)\,B^\dagger(r,-\vec p)\,e^{-ipx}\right] = \\
&= e^{-i\eta_T}\sum_{r=1}^{3}\int \frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3}\left[\epsilon^\mu(r,-\vec q)\,A(r,\vec q)\,e^{-iq\,Tx} + \epsilon^\mu(r,-\vec q)\,B^\dagger(r,\vec q)\,e^{iq\,Tx}\right] = \\
&= -e^{-i\eta_T}\sum_{r=1}^{3}\int \frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3}\left[\epsilon_\mu(r,\vec q)\,A(r,\vec q)\,e^{-iq\,Tx} + \epsilon_\mu(r,\vec q)\,B^\dagger(r,\vec q)\,e^{iq\,Tx}\right] = \\
&= -e^{-i\eta_T} W_\mu(Tx)
\end{aligned} \tag{B.4.220}$$

Veniamo infine alla quadricorrente definita dal teorema di Noëther in relazione all'invarianza di gauge di prima specie della densità lagrangiana

$$J^\mu(x) = -i\left[\left(\partial^\mu W^\nu(x)\right)W^\dagger_\nu(x) - \left(\partial^\mu W^\dagger_\nu(x)\right)W^\nu(x)\right] \tag{B.4.221}$$

Abbiamo

$$\begin{aligned}
T\,J^\mu(x)T^{-1} &= T\left\{-i\left[\left(\partial^\mu W^\nu(x)\right)W^\dagger_\nu(x) - \left(\partial^\mu W^\dagger_\nu(x)\right)W^\nu(x)\right]\right\}T^{-1} = \\
&= i\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}T\,W^\nu(x)T^{-1}\right)T\,W^\dagger_\nu(x)T^{-1} - \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}T\,W^\dagger_\nu(x)T^{-1}\right)T\,W^\nu(x)T^{-1}\right] = \\
&= i\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}W_\nu(Tx)\right)W^{\dagger\nu}(Tx) - \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}W^{\dagger\nu}(Tx)\right)W_\nu(Tx)\right]
\end{aligned} \tag{B.4.222}$$

Ponendo al solito

$$x' \equiv Tx = (-x^0, \vec{x}) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x_\mu} = -\frac{\partial}{\partial x'^\mu} \tag{B.4.223}$$

abbiamo così che

$$\begin{aligned} T\, J^\mu(x) T^{-1} &= -i\left[\left(\frac{\partial}{\partial x'^\mu} W_\nu(x')\right) W^{\dagger\nu}(x') - \left(\frac{\partial}{\partial x'^\mu} W^{\dagger\nu}(x')\right) W_\nu(x')\right] = \\ &= J_\mu(x') \equiv J_\mu(Tx) \end{aligned} \tag{B.4.224}$$

Infine, quanto all'invarianza in forma sotto Time Reversal della densità lagrangiana del campo vettoriale massivo carico, essa è piuttosto evidente per cui possiamo concludere che anche la simmetria discreta T che abbiamo definito in precedenza è conservata dalla dinamica libera di questo campo.

B.5 Campo vettoriale massivo neutro

La densità lagrangiana che descrive l'evoluzione libera del campo vettoriale massivo neutro è estremamente simile a quella del campo vettoriale massivo carico che abbiamo già visto, essendo

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - m^2\, Z^\mu\, Z_\mu \tag{B.5.225}$$

dove

$$m \neq 0; \qquad Z_\mu(x) = Z_\mu^\dagger(x); \qquad F^{\mu\nu} = \partial^\mu Z^\nu - \partial^\nu Z^\mu \tag{B.5.226}$$

La legge di moto che si ricava dalla (B.5.225) è quella di Klein-Gordan, unita alla condizione di divergenza nulla del campo, ovvero

$$(\Box + m^2) Z^\mu(x) = 0; \qquad \partial_\mu Z^\mu(x) = 0 \tag{B.5.227}$$

La rappresentazione spettrale di Z^μ in termini degli operatori di creazione e distruzione riflette, ovviamente, sia il suo carattere autoaggiunto che la condizione sulla divergenza nulla. Risulta

$$Z^\mu(x) = \sum_{r=1}^{3} \int \frac{d^3p}{2E_p (2\pi)^3} \left[\epsilon^\mu(r,\vec{p})\, A(r,\vec{p}) e^{-ipx} + \epsilon^{*\mu}(r,\vec{p})\, A^\dagger(r,\vec{p}) e^{ipx} \right] \tag{B.5.228}$$

dove la condizione sulla divergenza del campo impone che

$$p_\mu \cdot \epsilon^\mu(r,\vec{p}) = 0 \tag{B.5.229}$$

da cui le sole tre possibili polarizzazioni indipendenti.
Nel caso di polarizzazioni lineari, come già visto per il campo carico, abbiamo

$$\epsilon^\mu(r,\vec{p}) = \mathcal{B}(\vec{p})^\mu_{.\nu}\, \epsilon^\nu(r,\vec{0}) \equiv \left(\frac{p^r}{m},\ \delta^r_i + \frac{p^i p^r}{m(E_p + m)} \right) \tag{B.5.230}$$

Quanto alle regole di commutazione, le uniche non nulle sono fra A e $A^\dagger$ e risulta al solito

$$\left[A(r,\vec{p}),\ A^\dagger(t,\vec{q}) \right] = 2E_p\, (2\pi)^3\, \delta_{rt}\, \delta(\vec{p} - \vec{q}) \tag{B.5.231}$$

dove δ_{rt} indica qui la delta di Kronecker.

Coniugazione di Carica

Poiché il campo Z^μ è autoaggiunto, particella e antiparticella non sono distinte e dunque

$$C\,|r,\vec{p}>= e^{i\eta_C}\,|r,\vec{p}> \tag{B.5.232}$$

da cui, volendo che $C^2 = I$, segue che potrà essere solo

$$e^{i\eta_C} = \pm 1 \tag{B.5.233}$$

Poniamo dunque che

$$C\,A^\dagger(r,\vec{p})\,C^{-1} = \pm A^\dagger(r,\vec{p}); \qquad \Leftrightarrow \qquad C\,A(r,\vec{p})\,C^{-1} = \pm(r,\vec{p}) \tag{B.5.234}$$

dove abbiamo usato anche il fatto che, per ipotesi, C sia unitaria.
Quanto al campo, abbiamo così che

$$\begin{aligned}
&C\,Z^\mu(x)\,C^{-1} = \\
&= C\left\{\sum_{r=1}^{3}\int\frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\left[\epsilon^\mu(r,\vec{p})\,A(r,\vec{p})e^{-ipx} + \epsilon^{*\mu}(r,\vec{p})\,A^\dagger(r,\vec{p})e^{ipx}\right]\right\}C^{-1} = \\
&= \sum_{r=1}^{3}\int\frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\left[\epsilon^\mu(r,\vec{p})\,C\,A(r,\vec{p})\,C^{-1}e^{-ipx} + \epsilon^{*\mu}(r,\vec{p})\,C\,A^\dagger(r,\vec{p})\,C^{-1}\,e^{ipx}\right] = \\
&= \pm\sum_{r=1}^{3}\int\frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\left[\epsilon^\mu(r,\vec{p})\,A(r,\vec{p})e^{-ipx} + \epsilon^{*\mu}(r,\vec{p})\,A^\dagger(r,\vec{p})e^{ipx}\right] = \\
&= \pm Z^\mu(x)
\end{aligned} \tag{B.5.235}$$

Risulta poi evidente l'invarianza in forma sotto C della densità lagrangiana (B.5.225), per cui possiamo dire senz'altro che la coniugazione di carica è una simmetria conservata dalla dinamica del campo vettoriale massivo neutro.

Parità

Per le ragioni già espresse nel caso carico, la trasformazione unitaria P che descrive la parità dovrà essere tale per cui

$$P\,|r,\vec{p}>= \pm|r,-\vec{p}> \tag{B.5.236}$$

e dunque, similmente al caso carico, sarà

$$P\,A^\dagger(r,\vec{p})\,P^{-1} = \pm A^\dagger(r,-\vec{p}) \tag{B.5.237}$$

e conseguentemente, per l'unitarietà di P, sarà anche

$$P\,A(r,\vec{p})\,P^{-1} = \mp A(r,-\vec{p}) \tag{B.5.238}$$

Venendo al campo $Z^\mu(x)$, avremo dunque

$$\begin{aligned}
&P\,Z^\mu(x)\,P^{-1} = \\
&P\left\{\sum_{r=1}^{3}\int\frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\left[\epsilon^\mu(r,\vec{p})\,A(r,\vec{p})\,e^{-ipx}+\epsilon^{*\mu}(r,\vec{p})\,A^\dagger(r,\vec{p})\,e^{ipx}\right]\right\}P^{-1} = \\
&= \sum_{r=1}^{3}\int\frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\left[\epsilon^\mu(r,\vec{p})\,P\,A(r,\vec{p})\,P^{-1}e^{-ipx}+\epsilon^{*\mu}(r,\vec{p})\,P\,A^\dagger(r,\vec{p})\,P^{-1}\,e^{ipx}\right] = \\
&= \pm\sum_{r=1}^{3}\int\frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\left[\epsilon^\mu(r,\vec{p})\,A(r,-\vec{p})\,e^{-ipx}+\epsilon^{*\mu}(r,\vec{p})\,A^\dagger(r,-\vec{p})\,e^{ipx}\right] = \\
&= \pm\sum_{r=1}^{3}\int\frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3}\left[\epsilon^\mu(r,-\vec{q})\,A(r,\vec{q})\,e^{-iq\cdot Px}+\epsilon^{*\mu}(r,-\vec{q})\,A^\dagger(r,\vec{q})\,e^{iq\cdot Px}\right] = \\
&= \mp\sum_{r=1}^{3}\int\frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3}\left[\epsilon_\mu(r,\vec{q})\,A(r,\vec{q})\,e^{-iq\cdot Px}+\epsilon^{*}_\mu(r,\vec{q})\,A^\dagger(r,\vec{q})\,e^{iq\cdot Px}\right] = \\
&= \mp Z_\mu(Px)
\end{aligned} \tag{B.5.239}$$

dove abbiamo fatto la solita sostituzione di variabile di integrazione per cui

$$q\equiv(q^0,\vec{q}) = Pp = (p^0,-\vec{p}) \quad\Rightarrow\quad px\equiv p\cdot x = Pp\cdot Px = q\cdot Px \tag{B.5.240}$$

Anche per la parità P definita sopra, risulta evidente l'invarianza in forma della densità lagrangiana (B.5.225), per cui anch'essa è una simmetria conservata dalla dinamica del campo vettoriale massivo neutro.

Time reversal

Questa trasformazione agirà in modo del tutto simile a quella che avevamo trattato nel caso carico, per cui avevamo (cfr.(B.4.217)) visto che

$$T\,A(r,\vec{p})\,T^{-1} = e^{-i\eta_T}\,A(r,-\vec{p}); \qquad T\,A^\dagger(r,\vec{p})\,T^{-1} = e^{i\eta_T}\,A^\dagger(r,-\vec{p}) \qquad \text{(B.5.241)}$$

Nel caso del campo neutro, per via che A e $A^\dagger$ entrano entrambi insieme nella definizione del campo Z^μ, i due fattori di fase che devono essere uno il complesso coniugato dell'altro, dovranno coincidere e dunque essere reali e uguali a ± 1 se richiediamo $T^2 = I$ (trattandosi di uno spin intero).
Dovrà dunque aversi[30]

$$T\,A(r,\vec{p})\,T^{-1} = \pm\,A(r,-\vec{p}); \qquad T\,A^\dagger(r,\vec{p})\,T^{-1} = \pm\,A^\dagger(r,-\vec{p}) \qquad \text{(B.5.243)}$$

Venendo al campo (si ricordi che T è antiunitaria, che i quadrivettori di polarizzazione sono reali e che se $q = Px$ allora $q = -Tx$ essendo la matrice di Lorentz T opposta al tensore metrico g che, come sappiamo, coincide con la matrice che abbiamo indicato con P), abbiamo

$$\begin{aligned}
&T\,Z^\mu(x)\,T^{-1} = \\
&= T\left\{\sum_{r=1}^3\int\frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\left[\epsilon^\mu(r,\vec{p})\,A(r,\vec{p})\,e^{-ipx} + \epsilon^{*\mu}(r,\vec{p})\,A^\dagger(r,\vec{p})\,e^{ipx}\right]\right\}T^{-1} = \\
&= \sum_{r=1}^3\int\frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\left[\epsilon^{*\mu}(r,\vec{p})\,T\,A(r,\vec{p})\,T^{-1}e^{ipx} + \epsilon^\mu(r,\vec{p})\,T\,A^\dagger(r,\vec{p})\,T^{-1}\,e^{-ipx}\right] = \\
&= \pm\sum_{r=1}^3\int\frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\left[\epsilon^\mu(r,\vec{p})\,A(r,-\vec{p})\,e^{ipx} + \epsilon^\mu(r,\vec{p})\,A^\dagger(r,-\vec{p})\,e^{-ipx}\right] = \\
&= \pm\sum_{r=1}^3\int\frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3}\left[\epsilon^\mu(r,-\vec{q})\,A(r,\vec{q})\,e^{-iq\cdot Tx} + \epsilon^\mu(r,-\vec{q})\,A^\dagger(r,\vec{q})\,e^{iq\cdot Tx}\right] = \\
&= \mp\sum_{r=1}^3\int\frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3}\left[\epsilon_\mu(r,\vec{q})\,A(r,\vec{q})\,e^{-iq\cdot Tx} + \epsilon_\mu(r,\vec{q})\,A^\dagger(r,\vec{q})\,e^{iq\cdot Tx}\right] = \\
&= \mp Z_\mu(Tx) \qquad \text{(B.5.244)}
\end{aligned}$$

Risulta infine evidente anche in questo caso l'invarianza in forma della densità lagrangiana (B.5.225) sotto T, per cui essa è senz'altro una simmetria conservata dalla dinamica del campo vettoriale massivo neutro.

---

[30] Coerentemente con quanto abbiamo già visto nel caso carico, l'azione di T sul generico stato di particella dovrà essere tale per cui

$$T\,|\epsilon^\mu(r,\vec{p}),\vec{p}>= \pm\,|-\epsilon_\mu(r,-\vec{p}),-\vec{p}> \qquad \text{(B.5.242)}$$

B.6 Campo elettromagnetico

La dinamica libera del campo elettromagnetico, descritto mediante il quadripotenziale reale $A^\mu(x)$, come si è visto è descritta dalla densità lagrangiana

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}; \qquad F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A_\mu \tag{B.6.245}$$

a cui occorre aggiungere la condizione di Lorentz.
In questo modo, le equazioni per il quadripotenziale diventano

$$\Box A^\mu = 0; \qquad \partial_\mu A^\mu = 0 \tag{B.6.246}$$

Come già osservato, le soluzioni piane di queste equazioni sono del tipo

$$N\, \epsilon^\mu\, e^{ikx} \tag{B.6.247}$$

dove gli ϵ^μ descrivono gli stati di polarizzazione e risulta

$$k^\mu\, k_\mu = 0; \qquad \epsilon^\mu\, k_\mu = 0 \tag{B.6.248}$$

Le polarizzazioni indipendenti di cui alle soluzioni (B.6.247) sono tre mentre sappiamo che le soluzioni fisiche indipendenti sono due.
Il motivo è che la condizione di Lorentz non esaurisce l'arbitrarietà di gauge, rimanendo, in generale, quella per cui

$$A^\mu \to A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \chi; \qquad \Box\chi = 0 \tag{B.6.249}$$

che, per le soluzioni piane di cui sopra si traduce nella possibilità di traslazione della polarizzazione per una quantità arbitraria proporzionale al quadrimpulso

$$\epsilon^\mu \to \epsilon'^\mu = \epsilon^\mu + \alpha k^\mu \tag{B.6.250}$$

Nella gauge di Coulomb e usando le due polarizzazioni circolari corrispondenti ai due possibili stati di elicità $\lambda = \pm 1$ (cfr.(2.4.264)), la rappresentazione spettrale di $A^\mu(x)$ è la seguente ($E_p \equiv |\vec{p}|$)

$$A^\mu(x) = \sum_{\lambda=\pm 1} \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \left[\epsilon^\mu(\lambda,\vec{p})\, a(\lambda,\vec{p})\, e^{-ipx} + \epsilon^{*\mu}(\lambda,\vec{p})\, a^\dagger(\lambda,\vec{p})\, e^{ipx}\right] \tag{B.6.251}$$

Si tratta evidentemente di un campo autoaggiunto, quindi scarico, come si addice al campo del fotone.
Gli unici commutatori non nulli, infine, sono i seguenti

$$\left[a(\lambda,\vec{p}), a(\lambda',\vec{q})\right] = 2E_p\,(2\pi)^3\, \delta_{\lambda\lambda'}\, \delta(\vec{p}-\vec{q}) \tag{B.6.252}$$

Coniugazione di carica

Il campo elettromagnetico è un campo autoaggiunto e quindi non distingue fra particella e antiparticella: il fotone e l'antifotone sono la stessa cosa. Quanto alla coniugazione di carica C, ci aspettiamo quindi che

$$C\,|\lambda,\vec{p}>= e^{i\eta_C}\,|\lambda,\vec{p}> \tag{B.6.253}$$

e dunque, nell'ipotesi che il vuoto sia C-invariante, sarà

$$\begin{aligned}
&C\,a^\dagger(\lambda,\vec{p})|\Omega>= e^{i\eta_C}\,a^\dagger(\lambda,\vec{p})|\Omega>\\
&\Rightarrow e^{i\eta_C}\,a^\dagger(\lambda,\vec{p})|\Omega>= C\,a^\dagger(\lambda,\vec{p})\,C^{-1}\,C|\Omega>= C\,a^\dagger(\lambda,\vec{p})\,C^{-1}|\Omega>\\
&\Rightarrow C\,a^\dagger(\lambda,\vec{p})\,C^{-1} = e^{i\eta_C}\,a^\dagger(\lambda,\vec{p})
\end{aligned} \tag{B.6.254}$$

La condizione $C^2 = I$ richiede che $e^{i\eta_C} = \pm 1$ e delle due possibilità, occorre scegliere però $e^{i\eta_C} = -1$ se vogliamo che C resti una simmetria conservata anche nel caso di interazione del campo con una corrente, visto che la densità lagrangiana di interazione è $\mathcal{L}_I(x) = e\,J_\mu(x)\,A^\mu(x)$ e la densità di corrente, sotto coniugazione di carica, cambia segno, per cui occorre che anche $A^\mu(x)$ lo faccia e questo richiede $e^{i\eta_C} = -1$.
Possiamo dunque concludere, assumendo C unitaria, che

$$C\,a(\lambda,\vec{p})C^{-1} = -\,a(\lambda,\vec{p}); \qquad C\,a^\dagger(\lambda,\vec{p})C^{-1} = -\,a^\dagger(\lambda,\vec{p}) \tag{B.6.255}$$

da cui risulta

$$\begin{aligned}
&CA^\mu(x)C^{-1} =\\
&= C\left\{\sum_{\lambda=\pm1}\int\frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\left[\epsilon^\mu(\lambda,\vec{p})\,a(\lambda,\vec{p})\,e^{-ipx} + \epsilon^{*\mu}(\lambda,\vec{p})\,a^\dagger(\lambda,\vec{p})\,e^{ipx}\right]\right\}C^{-1} =\\
&= \sum_{\lambda=\pm1}\int\frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\left[\epsilon^\mu(\lambda,\vec{p})\;(-a(\lambda,\vec{p}))\;e^{-ipx} + \epsilon^{*\mu}(\lambda,\vec{p})\;\left(-a^\dagger(\lambda,\vec{p})\right)\;e^{ipx}\right] =\\
&= -A^\mu(x)
\end{aligned} \tag{B.6.256}$$

Poichè l'azione di C si traduce in un semplice cambiamento di segno, visto che la densità lagrangiana (B.6.245) è quadratica, siamo in presenza di una simmetria che è conservata dall'evoluzione libera del campo.

Vogliamo infine osservare che, anche se fotone e antifotone sono la stessa particella, questo non significa che C non abbia alcun effetto sullo stato di fotone. Infatti quanto sopra abbiamo visto che ci dice che

$$C\,|\lambda,\vec{p}>= -|\lambda,\vec{p}> \tag{B.6.257}$$

e dunque su uno stato di n fotoni avremo

$$C\,|n\ fotoni>= (-1)^n\,|n\ fotoni> \tag{B.6.258}$$

Poiché l'elettrodinamica (QED) è invariante sotto C, da questo fatto segue in particolare che non possono esistere elementi di matrice, dovuti all'interazione elettromagnetica, fra stati con un numero di fotoni pari e stati con un numero di fotoni dispari: è il teorema di Furry.

Parità

L'azione della parità P sul campo elettromagnetico vogliamo che risulti coerente con la sua definizione classica, per la quale

$$A^\mu(x) \xrightarrow{P} A_\mu(Px) \tag{B.6.259}$$

ovvero, visto che operiamo nella gauge di radiazione (gauge di Coulomb) dove $A^0(x) = 0$, vogliamo che

$$P\,\vec{A}(x^0,\vec{x})\,P^{-1} = -\vec{A}(x^0,-\vec{x}) \quad \Leftrightarrow \quad P\,A^\mu(x)\,P^{-1} = -A^\mu(Px) \tag{B.6.260}$$

D'altronde

$$A^\mu(x) = \sum_{\lambda=\pm1} \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \left[\epsilon^\mu(\lambda,\vec{p})\,a(\lambda,\vec{p})\,e^{-ipx} + \epsilon^{*\mu}(\lambda,\vec{p})\,a^\dagger(\lambda,\vec{p})\,e^{ipx}\right] \tag{B.6.261}$$

dove, per descrivere la polarizzazione[31], abbiamo scelto di usare gli stati di elicità definita $\lambda = \pm1$ che, come sappiamo, è la proiezione del momento

[31] Ricordiamo qui brevemente le definizioni che abbiamo adottato circa i quadrivettori che descrivono la polarizzazione.
Per completezza iniziamo dalle polarizzazioni lineari.
Per un fotone che viaggia lungo l'asse z, indipendentemente dal valore del suo impulso, abbiamo

$$\epsilon_z^\mu(r) = (0,\vec{\epsilon}_z(r));\;\; r = 1,2 \;\; con \;\; \vec{\epsilon}_z(1) = (1,0,0) \;\; e \;\; \vec{\epsilon}_z(2) = (0,1,0) \tag{B.6.262}$$

mentre, se l'impulso spaziale del fotone è $\vec{k} = k(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$ allora in termini della rotazione $R_{\vec{k}}$ seguente (cfr.(2.4.257) e (2.4.263))

$$R_{\vec{k}} = e^{-i\phi L_3}\,e^{-i\theta L_2}\,e^{i\phi L_3} \quad tale\;\; che \;\; R_{\vec{k}}(0,0,k) = \vec{k} \tag{B.6.263}$$

poniamo

$$\vec{\epsilon}(r,\vec{k}) = R_{\vec{k}}\,\vec{\epsilon}_z(r) \quad e \quad \epsilon^\mu(r,\vec{k}) = (0,\vec{\epsilon}(r,\vec{k})) \tag{B.6.264}$$

Evidentemente le polarizzazioni lineari sono reali e dunque coincidono con le loro complesse coniugate. Nel caso in cui $\theta = \pi$, quando ϕ non è definito dalle componenti x e y dell'impulso, la definizione prevede di scegliere $R_{\vec{k}}$ ponendo $\phi = 0$, per cui risulta

$$\vec{\epsilon}_{-z}(1) = -\vec{\epsilon}_z(1) = (-1,0,0); \quad \vec{\epsilon}_{-z}(2) = \vec{\epsilon}_z(2) = (0,1,0) \tag{B.6.265}$$

Venendo alle polarizzazioni circolari, esse sono definite come

$$\begin{array}{lll} \vec{\epsilon}_z(+) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\vec{\epsilon}_z(1) - i\vec{\epsilon}_z(2)\right) & = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1,i,0); & elicita' \quad \lambda = +1 \\ \vec{\epsilon}_z(-) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{\epsilon}_z(1) - i\vec{\epsilon}_z(2)\right) & = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-i,0); & elicita' \quad \lambda = -1 \\ \vec{\epsilon}(\lambda,\vec{k}) = R_{\vec{k}}\,\vec{\epsilon}_z(\lambda) \quad e \quad \epsilon^\mu(\lambda,\vec{k}) & = \left(0,\vec{\epsilon}(\lambda,\vec{k})\right) & \end{array} \tag{B.6.266}$$

e risulta (cfr.(2.4.265) e (2.4.266))

$$\vec{\epsilon}_z(\pm)^* = -\vec{\epsilon}_z(\mp) \quad \Rightarrow \quad \epsilon_\mu^*(\lambda,\vec{k}) = -\epsilon_\mu(-\lambda,\vec{k}) = \epsilon^\mu(-\lambda,\vec{k}) \tag{B.6.267}$$

$$\vec{\epsilon}_z(\pm) = \vec{\epsilon}_{-z}(\mp) \quad \Rightarrow \quad \epsilon^\mu(\lambda,\vec{k}) = \epsilon^\mu(-\lambda,-\vec{k}) = -\epsilon_\mu(-\lambda,-\vec{k}) \tag{B.6.268}$$

angolare lungo l'impulso.
Ci aspettiamo quindi che, per parità, dato che l'impulso si inverte di segno ma il momento angolare no, sia

$$\lambda \xrightarrow{P} -\lambda \tag{B.6.269}$$

e dunque, vista anche la richiesta (B.6.260), definiamo l'azione della parità sugli operatori di creazione e distruzione nel modo seguente

$$P\, a(\lambda, \vec{p})\, P^{-1} = -a(-\lambda, -\vec{p}) \qquad e \qquad P\, a^\dagger(\lambda, \vec{p})\, P^{-1} = -a^\dagger(-\lambda, -\vec{p}) \tag{B.6.270}$$

Abbiamo così che

$$\begin{aligned}
&P\, A^\mu(x)\, P^{-1} = \\
&= P \left\{ \sum_{\lambda=\pm1} \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \left[\epsilon^\mu(\lambda, \vec{p})\, a(\lambda, \vec{p})\, e^{-ipx} + \epsilon^{*\mu}(\lambda, \vec{p})\, a^\dagger(\lambda, \vec{p})\, e^{ipx} \right] \right\} P^{-1} = \\
&= \sum_{\lambda=\pm1} \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \left[\epsilon^\mu(\lambda, \vec{p})\, P\, a(\lambda, \vec{p})\, P^{-1}\, e^{-ipx} + \epsilon^{*\mu}(\lambda, \vec{p})\, P\, a^\dagger(\lambda, \vec{p})\, P^{-1}\, e^{ipx} \right] = \\
&= -\sum_{\lambda=\pm1} \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \left[\epsilon^\mu(\lambda, \vec{p})\, a(-\lambda, -\vec{p})\, e^{-ipx} + \epsilon^{*\mu}(\lambda, \vec{p})\, a^\dagger(-\lambda, -\vec{p})\, e^{ipx} \right] = \\
&= -\sum_{\sigma=\pm1} \int \frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3} \left[\epsilon^\mu(\sigma, q\vec{p})\, a(\sigma, \vec{q})\, e^{-iq\cdot Px} + \epsilon^{*\mu}(\sigma, \vec{q})\, a^\dagger(\sigma, \vec{q})\, e^{iq\cdot Px} \right] = \\
&= -A^\mu(Px) = A_\mu(Px)
\end{aligned} \tag{B.6.271}$$

dove abbiamo tenuto conto che stiamo operando nella gauge di Coulomb ($\Rightarrow A^0 = 0$), abbiamo usato la (B.6.268) per cui $\epsilon^\mu(\lambda, \vec{p}) = \epsilon^\mu(-\lambda, -\vec{p})$, abbiamo quindi sostituito $-\lambda$ con σ, posto $q = (q^0, \vec{q}) = Pp = (p^0, -\vec{p})$ e cambiato la variabile di integrazione da $\frac{d^3p}{2E_p}$ a $\frac{d^3q}{2E_q}$.

Quanto alle regole di commutazione, esse risultano ovviamente stabili sotto P, infatti

$$\left[a(\lambda, \vec{p}), a^\dagger(\sigma, \vec{q}) \right] \xrightarrow{P} \left[-a(-\lambda, -\vec{p}), -a^\dagger(-\sigma, -\vec{q}) \right] = 2E_p\, (2\pi)^3\, \delta_{\lambda\sigma}\, \delta(\vec{p} - \vec{q}) \tag{B.6.272}$$

Inoltre la densità lagrangiana risulta chiaramente P-invariante in forma, per cui questa simmetria è conservata dalla dinamica libera del campo.
Poi, per come P è stata definita, anche la densità lagrangiana di interazione con la corrente carica risulta invariante in forma

$$\mathcal{L}_I(x) \equiv e\, J_\mu(x)\, A^\mu(x) \xrightarrow{P} e\, J^\mu(Px)\, A_\mu(Px) \tag{B.6.273}$$

coerentemente con il fatto che l'elettromagnetismo classico e dunque anche la QED conservano la parità.

Time reversal

Anche in questo caso, come per la parità, per definire la simmetria T ci facciamo guidare da quanto accade per questa simmetria nell'ambito dell'elettromagnetismo classico. Nella teoria classica il potenziale scalare $V(x)$ e dunque $A^0(x)$ non cambia segno sotto inversione temporale mentre il potenziale vettore $\vec{A}(x)$, in quanto generato dalle correnti elettriche che cambiano segno sotto questa simmetria, cambia segno.
Anche per T, dunque, ci aspettiamo che sia

$$A^\mu(x) \xrightarrow{T} A_\mu(Tx) = -A^\mu(Tx) \quad (essendo\ \ A^0(x) \equiv 0) \tag{B.6.274}$$

similmente al caso della parità, con la differenza, però, che è bene ricordare ancora una volta, che T è antiunitaria mentre P, invece, è unitaria.

Venendo all'azione di T sugli operatori di creazione e distruzione $a(\lambda,\vec{p})$ e $a^\dagger(\lambda,\vec{p})$, poichè sotto inversione temporale l'impuslo spaziale $\vec{p}$ cambia segno come pure le componenti del momento angolare, ci aspettiamo, a priori, che debba risultare

$$T\, a(\lambda,\vec{p})\, T^{-1} = \pm a(\lambda,-\vec{p}) \;\;\Leftrightarrow\;\; T\, a^\dagger(\lambda,\vec{p})\, T^{-1} = \pm a^\dagger(\lambda,-\vec{p}) \tag{B.6.275}$$

L'ambiguità del segno viene risolta dalla richiesta (B.6.274) che è soddisfatta solo se nella (B.6.275) scegliamo il segno positivo, ovvero se poniamo

$$T\, a(\lambda,\vec{p})\, T^{-1} = a(\lambda,-\vec{p}); \qquad T\, a^\dagger(\lambda,\vec{p})\, T^{-1} = a^\dagger(\lambda,-\vec{p}) \tag{B.6.276}$$

Abbiamo così che

$$\begin{aligned}
&T\, A^\mu(x)\, T^{-1} = \\
&= T\left\{\sum_{\lambda=\pm1}\int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\left[\epsilon^\mu(\lambda,\vec{p})\, a(\lambda,\vec{p})\, e^{-ipx} + \epsilon^{*\mu}(\lambda,\vec{p})\, a^\dagger(\lambda,\vec{p})\, e^{ipx}\right]\right\} T^{-1} = \\
&= \sum_{\lambda=\pm1}\int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\left[T\,\epsilon^\mu(\lambda,\vec{p})\, a(\lambda,\vec{p})\, e^{-ipx}T^{-1} + T\,\epsilon^{*\mu}(\lambda,\vec{p})\, a^\dagger(\lambda,\vec{p})\, e^{ipx}T^{-1}\right] = \\
&= \sum_{\lambda=\pm1}\int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\left[\epsilon^{*\mu}(\lambda,\vec{p})\, a(\lambda,-\vec{p})\, e^{ipx} + \epsilon^\mu(\lambda,\vec{p})\, a^\dagger(\lambda,-\vec{p})\, e^{-ipx}\right]
\end{aligned} \tag{B.6.277}$$

Ma per la (B.6.267) e la (B.6.268) abbiamo che

$$\begin{array}{lclcl}
\epsilon^{*\mu}(\lambda,\vec{p}) & = & -\epsilon^\mu(-\lambda,\vec{p}) & = & -\epsilon^\mu(\lambda,-\vec{p}) \\
\epsilon^\mu(\lambda,\vec{p}) & = & -\epsilon^{*\mu}(-\lambda,\vec{p}) & = & -\epsilon^{*\mu}(\lambda,-\vec{p})
\end{array} \tag{B.6.278}$$

e dunque

$$\begin{aligned}
&T\, A^\mu(x)\, T^{-1} = \\
&= -\sum_{\lambda=\pm1}\int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\left[\epsilon^\mu(\lambda,-\vec{p})\, a(\lambda,-\vec{p})\, e^{ipx} + \epsilon^{*\mu}(\lambda,-\vec{p})\, a^\dagger(\lambda,-\vec{p})\, e^{-ipx}\right]
\end{aligned} \tag{B.6.279}$$

ovvero, ponendo al solito $q \equiv (q^0, \vec{q}) = (p^0, -\vec{p}) \equiv -Tp$ dove T è la matrice di Lorentz opposta al tensore metrico $T = -g$, la quale inverte il segno della componente temporale di un quadrivettore lasciando inalterate le sue componenti spaziali, abbiamo

$$\frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} = \frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3}; \qquad p \cdot x = Tp \cdot Tx = -q \cdot Tx \tag{B.6.280}$$

e quindi

$$\begin{aligned} &T\, A^\mu(x)\, T^{-1} = \\ &= -\sum_{\lambda=\pm 1} \int \frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3} \left[\epsilon^\mu(\lambda,\vec{q})\, a(\lambda,\vec{q})\, e^{-iq\cdot Tx} + \epsilon^{*\mu}(\lambda,\vec{q})\, a^\dagger(\lambda,\vec{q})\, e^{iq\cdot Tx}\right] = \\ &= -A^\mu(Tx) = A_\mu(Tx) \end{aligned} \tag{B.6.281}$$

Anche in questo caso le regole di commutazione risultano stabili sotto T e il fatto che si tratti di una simmetria antiunitaria è ininfluente visto che il commutatore fra a e $a^\dagger$ è reale. Abbiamo

$$\left[a(\lambda,\vec{p}), a^\dagger(\sigma,\vec{q})\right] \xrightarrow{T} \left[a(\lambda,-\vec{p}), a^\dagger(\sigma,-\vec{q})\right] = 2E_p\,(2\pi)^3\,\delta_{\lambda\sigma}\,\delta(\vec{p}-\vec{q}) \tag{B.6.282}$$

Anche la densità lagrangiana risulta evidentemente T-invariante in forma, per cui si tratta di una simmetria che è conservata dalla dinamica libera del campo.
Infine, per come è stata definita T, anche la densità lagrangiana di interazione con la corrente carica risulta invariante in forma, essendo

$$\mathcal{L}_I(x) \equiv e\, J_\mu(x)\, A^\mu(x) \xrightarrow{T} e\, J^\mu(Tx)\, A_\mu(Tx) \tag{B.6.283}$$

coerentemente con il fatto che l'elettromagnetismo classico è invariante per inversione temporale e dunque e anche la QED deve esserlo.

B.7 Campo di Dirac

Come sappiamo, la dinamica libera del campo di Dirac (cfr.(2.5.352)) è retta dalla lagrangiana[32]

$$\mathcal{L} \;=\; \overline{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi \tag{B.7.286}$$

da cui discendono le seguenti ben note equazioni per ψ e per $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger\,\gamma^0$

$$(i\,\gamma^\mu\partial_\mu \;-\; m)\,\psi \;=\; 0; \qquad i\,\partial_\mu\,\overline{\psi}\,\gamma^\mu \;+\; m\,\overline{\psi} \;=\; 0 \tag{B.7.287}$$

La lagrangiana (B.7.286) gode, evidentemente, dell'invarianza di gauge di prima specie e l'espressione della densità corrente conservata che segue via il teorema di Noëther è la seguente[33]

$$J^\mu(x) \equiv\; \bar{\psi}(x)\,\gamma^\mu\,\psi(x) \tag{B.7.291}$$

[32]Ricordiamo che al posto della lagrangiana (B.7.286) si usa talvolta la forma hermitiana seguente

$$\mathcal{L} \;=\; \frac{i}{2}[\overline{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu\psi) \;-\; (\partial_\mu\overline{\psi})\gamma^\mu\psi] \;-\; m\,\overline{\psi}\psi \tag{B.7.284}$$

Poiché le due lagrangiane differiscono di una quadridivergenza

$$\Delta\mathcal{L} \;=\; \frac{i}{2}[\overline{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu\psi) \;+\; (\partial_\mu\overline{\psi})\gamma^\mu\psi] = \frac{i}{2}\partial_\mu[\bar{\psi}\gamma^\mu\psi] \tag{B.7.285}$$

esse sono equivalenti quanto alle equazioni di moto.

[33]La corrente (B.7.291) è un operatore autoaggiunto, infatti

$$(J^\dagger)^\mu \,=\, \psi^\dagger(\gamma^\mu)^+\,(\bar{\psi})^\dagger \tag{B.7.288}$$

ma

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0 \Rightarrow (J^\dagger)^\mu \,=\, \psi^\dagger(\gamma^\mu)^+\,(\gamma^0)^\dagger\,\psi \tag{B.7.289}$$

e siccome $\gamma^0 = (\gamma^0)^+$, $(\gamma^0)^2 = I$ e $(\gamma^\mu)^+ = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$, risulta

$$(J^\dagger)^\mu \,=\, \psi^\dagger\gamma^0\,\gamma^\mu\,(\gamma^0)^2\,\psi \equiv J^\mu \tag{B.7.290}$$

Lo sviluppo di ψ e $\bar{\psi}$ in termini di operatori di creazione/distruzione di particella e antiparticella, come si è già visto, è il seguente

$$\psi(x) = \sum_{r=1}^{2} \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \{a(r,\vec{p})\, u^{(r)}(\vec{p})\, e^{-ipx} + b^\dagger(r,\vec{p})\, v^{(r)}(\vec{p})\, e^{ipx}\} \quad \text{(B.7.292)}$$

$$\bar{\psi}(x) = \sum_{r=1}^{2} \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \{b(r,\vec{p})\, \bar{v}^{(r)}(\vec{p})\, e^{-ipx} + a^\dagger r, (\vec{p})\, \bar{u}^{(r)}(\vec{p})\, e^{ipx}\} \quad \text{(B.7.293)}$$

e le sole regole di anticommutazione non nulle sono

$$\{a(r,\vec{p}), a^\dagger(s,\vec{q})\} = \{b(r,\vec{p}), b^\dagger(s,\vec{q})\} = 2\, E_p\, (2\pi)^3\; \delta_{rs}\, \delta^3(\vec{p}-\vec{q}) \qquad \text{(B.7.294)}$$

mentre gli spinori u e v sono normalizzati nel modo seguente

$$u^{(r)}(\vec{p}) = \frac{m + \not{p}}{\sqrt{m+E}}\, u_0^{(r)} \quad ; \quad \bar{u}^{(r)}(\vec{p}) = \bar{u}_0^{(r)}\, \frac{m + \not{p}}{\sqrt{m+E}} \qquad \text{(B.7.295)}$$

$$v^{(r)}(\vec{p}) = \frac{m - \not{p}}{\sqrt{m+E}}\, v_0^{(r)} \quad ; \quad \bar{v}^{(r)}(\vec{p}) = \bar{v}_0^{(r)}\, \frac{m - \not{p}}{\sqrt{m+E}} \qquad \text{(B.7.296)}$$

essendo

$$u_0^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \; ; \; u_0^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad v_0^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \; ; \; v_0^{(2)} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(B.7.297)}$$

per cui, definendo per comodità

$$w^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad w^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(B.7.298)}$$

$$\tilde{w}^{(1)} = w^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \tilde{w}^{(2)} = -w^{(1)} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(B.7.299)}$$

si ha che, posto $\vec{n} \equiv \vec{p}/p$, risulta

$$u^{(r)}(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{m+E_p}} \begin{pmatrix} (m+E_p)\, w^{(r)} \\ (\vec{p}\cdot\vec{\sigma})\, w^{(r)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{E_p+m}\; w^{(r)} \\ \sqrt{E_p-m}\, (\vec{n}\cdot\vec{\sigma})\; w^{(r)} \end{pmatrix} \qquad \text{(B.7.300)}$$

$$v^{(r)}(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{m+E_p}} \begin{pmatrix} (\vec{p}\cdot\vec{\sigma})\, \tilde{w}^{(r)} \\ (m+E_p)\, \tilde{w}^{(r)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{E_p-m}\, (\vec{n}\cdot\vec{\sigma})\; \tilde{w}^{(r)} \\ \sqrt{E_p+m}\; \tilde{w}^{(r)} \end{pmatrix} \qquad \text{(B.7.301)}$$

Coniugazione di carica

Veniamo adesso alla definizione della simmetria di coniugazione di carica C per il campo spinoriale.
Immaginiamo di definirla[34], in completa analogia con quanto abbiamo fatto per i campi considerati in precedenza, ponendo

$$\begin{array}{lcl} C\,a^\dagger(r,\vec{p})\,C^{-1} = e^{i\eta_c}\,b^\dagger(r,\vec{p}) & \Leftrightarrow & C\,a(r,\vec{p})\,C^{-1} = e^{-i\eta_c}\,b(r,\vec{p}) \\ C\,b^\dagger(r,\vec{p})\,C^{-1} = e^{-i\eta_c}\,a^\dagger(r,\vec{p}) & \Leftrightarrow & C\,b(r,\vec{p})\,C^{-1} = e^{i\eta_c}\,a(r,\vec{p}) \end{array} \tag{B.7.303}$$

Come si trasformeranno i campi ψ e $\bar{\psi}$?
Uno nell'altro come accadeva, per esempio, per il campo scalare carico?
E come si trasforma la corrente $J^\mu(x)$. Vediamo.
Consideriamo l'integrando dello sviluppo del campo ψ, cioè il termine

$$a(r,\vec{p})\,u^{(r)}(\vec{p})\,e^{-ipx} \;+\; b^\dagger(r,\vec{p})\,v^{(r)}(\vec{p})\,e^{ipx} \tag{B.7.304}$$

Sotto la coniugazione di carica definita dalla (B.7.303), esso diviene evidentemente

$$e^{-i\eta_c}\left\{b(r,\vec{p})\,u^{(r)}(\vec{p})\,e^{-ipx} \;+\; a^\dagger(r,\vec{p})\,v^{(r)}(\vec{p})\,e^{ipx}\right\} \tag{B.7.305}$$

il quale rassomiglia effettivamente all'integrando dello sviluppo della $\bar{\psi}$, con la differenza, però che, a parte il fattore di fase, in quest'ultimo, laddove compare lo spinore u vi compare $\bar{v}$ e laddove compare lo spinore v c'è $\bar{u}$. Inoltre ψ (come gli spinori u e v) è una matrice colonna, mentre $\bar{\psi}$ (come pure $\bar{u}$ e $\bar{v}$) è una matrice riga e dunque la simmetria C potrà eventualmente legare ψ con $\bar{\psi}^t$ e, analogamente, $\bar{\psi}$ con ψ^t in quanto C, agendo sugli operatori di creazione e distruzione e non sugli spinori non può cambiare la struttura di questi ultimi.

Infine, per restare coerenti con il nome stesso della simmetria, vogliamo che l'azione di C sul campo spinoriale sia tale per cui, per la corrente (B.7.291), risulti

$$J^\mu(x) \xrightarrow{C} -J^\mu(x) \tag{B.7.306}$$

Partiamo dunque da questo punto fermo per cercare di capire che forma dovrà assumere l'azione di C sui campi ψ e $\bar{\psi}$.
Riprendiamo dunque l'espressione della corrente

$$J^\mu(x) = \bar{\psi}(x)\,\gamma^\mu\,\psi(x) \tag{B.7.307}$$

[34]Osserviamo che, con questa definizione, C^2 commuta con gli operatori di creazione e distruzione e dunque con ψ e $\bar{\psi}$, ovvero con qualunque operatore dell'algebra dei campi. Questo significa che possiamo, senza perdita di generalità alcuna, assumere che

$$C^2 = I \tag{B.7.302}$$

Essa, però, ha un problema: il suo valore di aspettazione sul vuoto non è nullo, a causa del modo asimmetrico con cui vi compaiono i campi ψ e $\bar{\psi}$.
In realtà, la forma corretta della densità di corrente è piuttosto il prodotto *normal-ordinato*[35] dell'espressione precedente, cioè

$$J^\mu = :\ \bar{\psi}\,\gamma^\mu\,\psi\ : \tag{B.7.313}$$

ovvero[36]

$$J^\mu = \frac{1}{2}\,[\bar{\psi},\,\gamma^\mu\,\psi\,] \tag{B.7.314}$$

dove questa espressione va intesa esplicitamente nel modo seguente

$$J^\mu = \frac{1}{2}\,[\bar{\psi}_\alpha\,(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}\,\psi_\beta - (\gamma^\mu)_{\alpha\beta}\,\psi_\beta\,\bar{\psi}_\alpha] = \frac{1}{2}(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}\,\,[\bar{\psi}_\alpha\,\psi_\beta - \psi_\beta\,\bar{\psi}_\alpha] \tag{B.7.315}$$

Ricordando che ψ è una matrice colonna mentre $\bar{\psi}$ è una matrice riga, in linguaggio matriciale si ha

$$J^\mu = \frac{1}{2}\left[\bar{\psi}\gamma^\mu\psi - (\gamma^\mu\psi)^t\bar{\psi}^t\right] = \frac{1}{2}\left[\bar{\psi}\gamma^\mu\psi - \psi^t\,(\gamma^\mu)^t\,\bar{\psi}^t\right] \tag{B.7.316}$$

[35]Tralasciando, per comodità di notazione, di trascrivere sia gli spinori che gli esponenziali che compaiono nello sviluppo dei campi, per la corrente abbiamo

$$J^\mu = \,\bar{\psi}\,\gamma^\mu\,\psi \to (b + a^\dagger)(a + b^\dagger) \tag{B.7.308}$$

e il termine $b\,b^\dagger$ ha valor medio non nullo sul vuoto.
Il prodotto $N-$ordinato implica che in ogni addendo, gli operatori di creazione precedano quelli di annichilazione, dunque

$$:(b + a^\dagger)(a + b^\dagger) : \equiv :(b\,a + b\,b^\dagger + a^\dagger\,a + a^\dagger\,b^\dagger) : = \ b\,a - b^\dagger\,b + a^\dagger\,a + a^\dagger\,b^\dagger \tag{B.7.309}$$

dove, per giungere a questa espressione, si è usato il fatto che

$$b\,b^\dagger = -b^\dagger\,b + \{b\,,\,b^\dagger\,\} \tag{B.7.310}$$

e l'anticommutatore, che è un c-numero, è stato sottratto.
All'espressione (B.7.309) si può giungere se prendiamo l'espressione della corrente data dalla (B.7.315). Usando gli stessi simboli di cui sopra, si ha infatti

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\,[\bar{\psi},\,\gamma^\mu\,\psi\,] \to \frac{1}{2}\left[b + a^\dagger,\,a + b^\dagger\right] = \frac{1}{2}\left[(b + a^\dagger)(a + b^\dagger) - (a + b^\dagger)(b + a^\dagger)\right] = \\
= \;& \frac{1}{2}\left[b\,a + b\,b^\dagger + a^\dagger a + a^\dagger b^\dagger - a\,b - a\,a^\dagger - b^\dagger b - b^\dagger a^\dagger\right] = \\
= \;& \frac{1}{2}\left[2\,b\,a + 2a^\dagger b^\dagger + a^\dagger a + a^\dagger a - \{a^\dagger,\,a\} - b^\dagger b - b^\dagger b + \{b^\dagger, b\}\right] = \\
= \;& \left[\,b\,a + a^\dagger b^\dagger + a^\dagger a + - b^\dagger b\right]
\end{aligned} \tag{B.7.311}$$

dove si sono usate le relazioni

$$a\,a^\dagger = -a^\dagger a + \{a^\dagger,\,a\}; \quad b\,b^\dagger = -b^\dagger b + \{b^\dagger,\,b\}; \quad e \quad \{a^\dagger,\,a\} = \{b^\dagger,\,b\} \tag{B.7.312}$$

[36]cfr. J.D. Bjorkeen and S.D. Drell: *Relativistic Quantum Fields*, Mc Graw-Hill 1965, pag. 91

Ma dalle osservazioni fatte in precedenza secondo cui la coniugazione di carica C deve legare ψ con $\bar{\psi}^t$ e $\bar{\psi}$ con ψ^t, unitamente alla esigenza già ricordata secondo la quale vogliamo che risulti

$$J^\mu(x) \xrightarrow{C} -J^\mu(x) \tag{B.7.317}$$

ricaviamo il suggerimento di definire C in modo che *scambi* semplicemente i due addendi nella (B.7.316), ovvero[37]

$$\psi \quad \xrightarrow{C} \quad C\,\psi\,C^{-1} = \mathcal{C}^{-1}\,\bar{\psi}^t\,e^{-i\eta_C} \tag{B.7.320}$$
$$\bar{\psi} \quad \xrightarrow{C} \quad C\,\bar{\psi}\,C^{-1} = -\psi^t\,\mathcal{C}\,e^{i\eta_C} \tag{B.7.321}$$

dove $\mathcal{C}$ dovrà essere una matrice 4×4 tale che

$$\mathcal{C}\,\gamma^\mu\,\mathcal{C}^{-1} = -(\gamma^\mu)^t \quad \Leftrightarrow \quad (\mathcal{C}^{-1})^t\,(\gamma^\mu)^t\,\mathcal{C}^t = -\gamma^\mu \tag{B.7.322}$$

In questo caso, infatti, avremo evidentemente che

$$\begin{aligned} C: J^\mu \quad &\to \quad \frac{1}{2}\left\{-\psi^t\mathcal{C}\,e^{i\eta_C}\,\gamma^\mu\,\mathcal{C}^{-1}\,\bar{\psi}^t\,e^{-i\eta_C} - \left[\mathcal{C}^{-1}\,\bar{\psi}^t\,e^{-i\eta_C}\right]^t\,(\gamma^\mu)^t\left[-\psi^t\,\mathcal{C}\,e^{i\eta_C}\right]^t\right\} = \\ &= \quad \frac{1}{2}\left\{-\psi^t\,\mathcal{C}\,\gamma^\mu\,\mathcal{C}^{-1}\,\bar{\psi}^t + \bar{\psi}(\mathcal{C}^{-1})^t\,(\gamma^\mu)^t\,\mathcal{C}^t\,\psi\right\} = \\ &= \quad \frac{1}{2}\left\{\psi^t\,(\gamma^\mu)^t\,\bar{\psi}^t - \bar{\psi}\,\gamma^\mu\,\psi\right\} = -J^\mu \end{aligned} \tag{B.7.323}$$

Cerchiamo dunque la matrice $\mathcal{C}$ che soddisfa la condizione (B.7.322).
Ci porremo, al solito, nella rappresentazione di Pauli-Dirac delle matrici γ^μ, dove

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \tag{B.7.324}$$

[37] Siccome, evidentemente, i campi ψ e $\bar{\psi}$ sono legati fra loro, le leggi di trasformazione (B.7.320) e (B.7.321) devono essere compatibili. Assumendo che valga, per esempio, la prima, ne segue allora che, avendo assunto C unitario, risulta

$$\begin{aligned} C\,\psi\,C^{-1} \quad &= \quad e^{-i\eta_C}\,\mathcal{C}^{-1}\,\bar{\psi}^t \Rightarrow C\,\bar{\psi}\,C^{-1} = C\,\psi^+\,\gamma^0\,C^{-1} = C\,\psi^+\,C^{-1}\,\gamma^0\,C^{-1} = \\ &= \quad (C\,\psi\,C^{-1})^+\,\gamma^0 = (e^{-i\eta_C}\,\mathcal{C}^{-1}\,\bar{\psi}^t)^+\,\gamma^0 = e^{i\eta_C}\,(\bar{\psi}^t)^+(\mathcal{C}^{-1})^+\,\gamma^0 = \\ &= \quad e^{i\eta_C}\,[(\psi^+\gamma^0)^t]^+(\mathcal{C}^{-1})^+\,\gamma^0 = e^{i\eta_C}\,[\gamma^0(\psi^+)^t]^+(\mathcal{C}^{-1})^+\,\gamma^0 = \\ &= \quad e^{i\eta_C}\,\psi^t\,\gamma^0(\mathcal{C}^{-1})^+\,\gamma^0 \end{aligned} \tag{B.7.318}$$

dove abbiamo usato il fatto che γ^0 è simmetrica e reale (quindi anche hermitiana).
Affinché valga la (B.7.321), occorre e basta, dunque, che valga la (B.7.320) e che la matrice $\mathcal{C}$ sia tale per cui

$$\gamma^0(\mathcal{C}^{-1})^+\,\gamma^0 = -\mathcal{C} \tag{B.7.319}$$

essendo σ_i le usuali matrici di Pauli, cioè

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{B.7.325}$$

Dalla loro definizione segue immediatamente che, essendo evidentemente

$$(\sigma_1)^t = \sigma_1 \ ; \ (\sigma_2)^t = -\sigma_2 \ ; \ (\sigma_3)^t = \sigma_3 \tag{B.7.326}$$

risulta

$$(\gamma^0)^t = \gamma^0 \tag{B.7.327}$$
$$(\gamma^1)^t = -\gamma^1 \tag{B.7.328}$$
$$(\gamma^2)^t = \gamma^2 \tag{B.7.329}$$
$$(\gamma^3)^t = -\gamma^3 \tag{B.7.330}$$

per cui la condizione (B.7.322) diviene quindi

$$\mathcal{C}\,\gamma^0\,\mathcal{C}^{-1} = -(\gamma^0)^t = -\gamma^0 \tag{B.7.331}$$
$$\mathcal{C}\,\gamma^1\,\mathcal{C}^{-1} = -(\gamma^1)^t = \gamma^1 \tag{B.7.332}$$
$$\mathcal{C}\,\gamma^2\,\mathcal{C}^{-1} = -(\gamma^2)^t = -\gamma^2 \tag{B.7.333}$$
$$\mathcal{C}\,\gamma^0\,\mathcal{C}^{-1} = -(\gamma^3)^t = \gamma^3 \tag{B.7.334}$$

D'altronde ricordiamo che

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\delta^{\mu\nu} \tag{B.7.335}$$

ovvero che le γ con indice diverso anticommutano, mentre

$$(\gamma^0)^2 = I = -(\gamma^1)^2 = -(\gamma^2)^2 = -(\gamma^3)^2 \tag{B.7.336}$$

Proviamo dunque a porre

$$\mathcal{C} = i\,\gamma^0\,\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{B.7.337}$$

Risulta intanto evidente che $\mathcal{C}$ è reale e tale da soddisfare la (B.7.319), infatti

$$\mathcal{C}^{-1} = -i\,(\gamma^2)^{-1}\,(\gamma^0)^{-1} = i\,\gamma^2\,\gamma^0 = -i\,\gamma^0\,\gamma^2 = -\mathcal{C} \tag{B.7.338}$$
$$\mathcal{C}^t = i\,(\gamma^2)^t\,(\gamma^0)^t = i\,\gamma^2\,\gamma^0 = -i\,\gamma^0\,\gamma^2 = -\mathcal{C} \tag{B.7.339}$$
$$\Rightarrow \ \mathcal{C}^{-1} = \mathcal{C}^+ = -\mathcal{C} \ ; \ \mathcal{C}^2 = -I \tag{B.7.340}$$
$$\Rightarrow \ \gamma^0(\mathcal{C}^{-1})^+\gamma^0 = \gamma^0\mathcal{C}\gamma^0 = -\mathcal{C} \tag{B.7.341}$$

Quanto poi alle sue proprietà di commutazione con le matrici γ^μ, si ha

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}\,\gamma^0\,\mathcal{C}^{-1} &= \gamma^0\gamma^2\,\gamma^0\,\gamma^0\gamma^2 = \gamma^0\gamma^2 I\gamma^2 = \gamma^0(\gamma^2)^2 = -\gamma^0 && \text{(B.7.342)}\\
\mathcal{C}\,\gamma^1\,\mathcal{C}^{-1} &= \gamma^0\gamma^2\,\gamma^1\,\gamma^0\gamma^2 = -\gamma^0\gamma^2\gamma^0\gamma^1\gamma^2 = (\gamma^0)^2\gamma^2\gamma^1\gamma^2 = \\
&= \gamma^2\gamma^1\gamma^2 = -(\gamma^2)^2\gamma^1 = \gamma^1 && \text{(B.7.343)}\\
\mathcal{C}\,\gamma^2\,\mathcal{C}^{-1} &= \gamma^0\gamma^2\,\gamma^2\,\gamma^0\gamma^2 = \gamma^0(\gamma^2)^2\gamma^0\gamma^2 = -(\gamma^0)^2\gamma^2 = -\gamma^2 && \text{(B.7.344)}\\
\mathcal{C}\,\gamma^3\,\mathcal{C}^{-1} &= \gamma^0\gamma^2\,\gamma^3\,\gamma^0\gamma^2 = -\gamma^0\gamma^2\gamma^0\gamma^3\gamma^2 = (\gamma^0)^2\gamma^2\gamma^3\gamma^2 = \\
&= \gamma^2\gamma^3\gamma^2 = -(\gamma^2)^2\gamma^3 = \gamma^3 && \text{(B.7.345)}
\end{aligned}$$

Resta così dimostrato che la matrice $\mathcal{C}$ definita dalla (B.7.337) soddisfa effettivamente le condizioni (B.7.322) e (B.7.319) e quindi può essere usata per definire l'operatore C sui campi spinoriali ψ e $\bar\psi$, in accordo con la (B.7.320) e la (B.7.321), in modo che la corrente J^μ soddisfi[38] la (B.7.317).
Evidentemente però, se ψ e $\bar\psi$ si trasformano sotto C secondo la (B.7.320) e (B.7.321), queste stesse leggi di trasformazione definiscono univocamente anche l'azione di C sugli operatori di creazione e distruzione di particella e antiparticella.
Qual è dunque il modo di agire di C su questi operatori ?
E' facile convincersi che, effettivamente, così come avevamo immaginato, risulta semplicemente che

$$\begin{aligned}
C\,a^\dagger(r,\vec p)\,C^{-1} &= e^{i\eta_c}\,b^\dagger(r,\vec p) && \text{(B.7.346)}\\
C\,a(r,\vec p)\,C^{-1} &= e^{-i\eta_c}\,b(r,\vec p) && \text{(B.7.347)}\\
C\,b^\dagger(r,\vec p)\,C^{-1} &= e^{-i\eta_c}\,a^\dagger(r,\vec p) && \text{(B.7.348)}\\
C\,b(r,\vec p)\,C^{-1} &= e^{i\eta_c}\,a(r,\vec p) && \text{(B.7.349)}
\end{aligned}$$

Consideriamo infatti, come esempio, il caso del campo ψ.
Usando le (B.7.346)-(B.7.349), otteniamo (si ricordi che, per ipotesi, C è lineare e non antilineare ...)

$$C\,\psi(x)\,C^{-1} = C\left\{\sum_{r=1}^{2}\int\frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\left[a(r,\vec p)\,u^{(r)}(\vec p)\,e^{-ipx} + b^\dagger(r,\vec p)\,v^{(r)}(\vec p)\,e^{ipx}\right]\right\}C^{-1} =$$
$$= e^{-i\eta_c}\left\{\sum_{r=1}^{2}\int\frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\left[b(r,\vec p)\,u^{(r)}(\vec p)\,e^{-ipx} + a^\dagger(r,\vec p)\,v^{(r)}(\vec p)\,e^{ipx}\right]\right\} \qquad \text{(B.7.350)}$$

[38] Si osservi che se avessimo usato la definzione consueta di $J^\mu(x)$, avremmo potuto giungere al risultato corretto solo al prezzo di qualche forzatura. Abbiamo infatti che

$$J^\mu(x) = \bar\psi(x)\gamma^\mu\psi(x) \rightarrow J^\mu_C \equiv C\,J^\mu\,C^{-1} = \bar\psi_C\gamma^\mu\psi_C = \psi^t\mathcal{C}^{-1}\gamma^\mu\mathcal{C}^{-1}\bar\psi^t = \psi^t(\gamma^\mu)^t\bar\psi^t$$

Potrebbe sembrare che, essendo $\bar\psi\gamma^\mu\psi$ una matrice 1×1, sia

$$\psi^t(\gamma^\mu)^t\bar\psi^t = (\bar\psi\gamma^\mu\psi)^t = \bar\psi\gamma^\mu\psi$$

ma il primo passaggio non è corretto poiché stiamo scambiando fra loro operatori di creazione/distruzione che anticommutano, senza tenerne conto ! Ritroviamo, per questa via, la necessità di usare il prodotto N-ordinato degli operatori coinvolti.

Osserviamo adesso che, dalla definizione segue che

$$\begin{aligned}\mathcal{C}\, u^{(r)}(\vec{p}) &= \mathcal{C}\frac{m+\not{p}}{\sqrt{m+E_p}}\, u_0^{(r)} = \mathcal{C}\frac{m+\not{p}}{\sqrt{m+E_p}}\,\mathcal{C}^{-1}\,\mathcal{C}\, u_0^{(r)} = \\ = \frac{1}{\sqrt{m+E_p}}&\left(p_\mu \mathcal{C}\,\gamma^\mu\,\mathcal{C}^{-1}+m\right)\mathcal{C}\, u_0^{(r)} = \frac{1}{\sqrt{m+E_p}}\left(-p_\mu\,(\gamma^\mu)^t\,+m\right)\mathcal{C}\, u_0^{(r)} = \\ = \frac{1}{\sqrt{m+E_p}}&\,(m-\not{p})^t\,\mathcal{C}\, u_0^{(r)}\end{aligned} \tag{B.7.351}$$

D'altronde, dalla definizione (B.7.337) della matrice $\mathcal{C}$ e da quella degli spinori $u_0^{(r)}$ e $v_0^{(r)}$ (B.7.297), risulta

$$\mathcal{C}\, u_0^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -v_0^{(1)} \tag{B.7.352}$$

$$\mathcal{C}\, u_0^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -v_0^{(2)} \tag{B.7.353}$$

quindi possiamo scrivere che

$$\mathcal{C}\, u^{(r)}(\vec{p}) = \frac{-1}{\sqrt{m+E_p}}\,(m-\not{p})^t\; v_0^{(r)} \tag{B.7.354}$$

D'altronde, essendo $v_0^{(r)}$ reale e γ^0 simmetrica, si ha

$$v_0^{(r)} = -\gamma^0\, v_0^{(r)} = -\left(v_0^{(r)t}\,(\gamma^0)^t\right)^t = -\left(v_0^{+(r)}\,\gamma^0\right)^t = -\left(\bar{v}_0^{(r)}\right)^t \tag{B.7.355}$$

e dunque risulta

$$\begin{aligned}\mathcal{C}\, u^{(r)}(\vec{p}) &= \frac{1}{\sqrt{m+E_p}}\,(m-\not{p})^t\,\left(\bar{v}_0^{(r)}\right)^t = \left[\bar{v}_o^{(r)}\,\frac{m-\not{p}}{\sqrt{m+E_p}}\right]^t = \\ &= \left(\bar{v}^{(r)}(\vec{p})\right)^t\end{aligned} \tag{B.7.356}$$

Analogamente abbiamo

$$\begin{aligned}\mathcal{C}\, v^{(r)}(\vec{p}) &= \mathcal{C}\frac{m-\not{p}}{\sqrt{m+E_p}}\, v_0^{(r)} = \mathcal{C}\frac{m-\not{p}}{\sqrt{m+E_p}}\,\mathcal{C}^{-1}\,\mathcal{C}\, v_0^{(r)} = \\ = \frac{1}{\sqrt{m+E_p}}&\left(m-p_\mu \mathcal{C}\,\gamma^\mu\,\mathcal{C}^{-1}\right)\mathcal{C}\, v_0^{(r)} = \frac{1}{\sqrt{m+E_p}}\left(m+p_\mu\,(\gamma^\mu)^t\right)\mathcal{C}\, v_0^{(r)} = \\ = \frac{1}{\sqrt{m+E_p}}&\,(m+\not{p})^t\,\mathcal{C}\, v_0^{(r)}\end{aligned} \tag{B.7.357}$$

D'altronde, siccome $\mathcal{C}^2 = -1$, ecco che

$$\mathcal{C}u_0^{(r)} = -v_0^{(r)} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{C}v_0^{(r)} = u_0^{(r)} \tag{B.7.358}$$

dunque

$$\mathcal{C}\, v^{(r)}(\vec{p}) \;=\; \frac{1}{\sqrt{m+E_p}}\,(m+\not{p})^t\; u_0^{(r)} \tag{B.7.359}$$

ma, al solito, essendo $u_0^{(r)}$ reale e γ^0 simmetrica, si ha

$$u_0^{(r)} = \gamma^0\, u_0^{(r)} = \left(u_0^{(r)t}\,(\gamma^0)^t\right)^t = \left(u_0^{+(r)}\,\gamma^0\right)^t = \left(\bar{u}_0^{(r)}\right)^t \tag{B.7.360}$$

e dunque risulta ancora che

$$\begin{aligned}\mathcal{C}\, v^{(r)}(\vec{p}) \;&=\; \frac{1}{\sqrt{m+E_p}}\,(m+\not{p})^t\,\left(\bar{u}_0^{(r)}\right)^t = \left[\bar{u}_o^{(r)}\,\frac{m+\not{p}}{\sqrt{m+E_p}}\right]^t = \\ &=\; \left(\bar{u}^{(r)}(\vec{p})\right)^t \end{aligned}\tag{B.7.361}$$

Usiamo adesso questi due risultati (B.7.356) e (B.7.361) nella (B.7.350): si ha

$$\begin{aligned} C\,\psi(x)\,C^{-1} \;&=\; e^{-i\eta_c}\left\{\sum_{r=1}^{2}\int\frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\left[b(r,\vec{p})\,u^{(r)}(\vec{p})\,e^{-ipx} \;+\; a^\dagger(r,\vec{p})\,v^{(r)}(\vec{p})\,e^{ipx}\right]\right\} = \\ &= e^{-i\eta_c}\left\{\sum_{r=1}^{2}\int\frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\left[b(r,\vec{p})\,\mathcal{C}^{-1}\mathcal{C}\,u^{(r)}(\vec{p})\,e^{-ipx} \;+\; a^\dagger(r,\vec{p})\,\mathcal{C}^{-1}\mathcal{C}\,v^{(r)}(\vec{p})\,e^{ipx}\right]\right\} = \\ &= \mathcal{C}^{-1}\,e^{-i\eta_c}\left\{\sum_{r=1}^{2}\int\frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\left[b(r,\vec{p})\,\left(\bar{v}^{(r)}(\vec{p})\right)^t\,e^{-ipx} \;+\; a^\dagger(r,\vec{p})\,\left(\bar{u}^{(r)}(\vec{p})\right)^t\,e^{ipx}\right]\right\} = \\ &= e^{-i\eta_c}\,\mathcal{C}^{-1}\,\bar{\psi}^t(x) \end{aligned}$$

ovvero

$$C\,\psi(x)\,C^{-1} \;=\; e^{-i\eta_c}\,\mathcal{C}^{-1}\,\bar{\psi}^t(x) \tag{B.7.362}$$

In modo del tutto analogo si può dimostrare che risulta altresì

$$C\,\bar{\psi}(x)\,C^{-1} \;=\; -e^{i\eta_c}\,\psi^t(x)\,\mathcal{C} \equiv e^{i\eta_c}\,\psi^t(x)\,\mathcal{C}^{-1} \tag{B.7.363}$$

In realtà non è necessario ripetere la dimostrazione[39] in quanto, come abbiamo già osservato, se $\mathcal{C}$ soddisfa la (B.7.319), ovvero la condizione $\gamma^0(\mathcal{C})^+\gamma^0 \;=\; -\mathcal{C}$ allora, nell'ipotesi che C sia unitario, risulta che

$$\begin{aligned} C\,\psi(x)\,C^{-1} \;&=\; e^{-i\eta_C}\,\mathcal{C}^{-1}\,\bar{\psi}^t(x) &\text{(B.7.367)}\\ &\Leftrightarrow\; C\,\bar{\psi}\,C^{-1} = -e^{i\eta_C}\,\psi^t\,\mathcal{C} &\text{(B.7.368)}\end{aligned}$$

[39]Formalmente risulta infatti che se

$$C\,\psi(x)\,C^{-1} \;=\; e^{-i\eta_C}\,\mathcal{C}^{-1}\,\bar{\psi}^t(x) \tag{B.7.364}$$

Le (B.7.346)-(B.7.349) definiscono dunque una trasformazione C che scambia particella e antiparticella e soddisfa le condizioni (B.7.320) e (B.7.321), ovvero che è tale per cui

$$C: \qquad J^\mu(x) \to -J^\mu(x) \tag{B.7.369}$$

Ma è una simmetria ?
Proprio perché è tale per cui vale la (B.7.369), possiamo senz'altro dire fin d'ora che se lo è per il campo libero, lo è anche per quanto riguarda l'interazione del campo elettromagnetico con la corrente prodotta dal campo spinoriale.
Per il campo libero dobbiamo verificare ancora sia l'invarianza della densità lagrangiana che la coerenza della trasformazione con l'algebra dei campi, ovvero con le loro regole di anticommutazione.
Iniziamo da queste ultime. Per gli unici anticommutatori non nulli si ha

$$C: \qquad \left\{a(r,\vec{p}), a^\dagger(s,\vec{q})\right\} \longleftrightarrow \left\{b(r,\vec{p}), b^\dagger(s,\vec{q})\right\} \tag{B.7.370}$$

e siccome le regole di anticommutazione canoniche ci dicono che esse sono le stesse per gli operatori di particella e di antiparticella, possiamo concludere che, effettivamente, la trasformazione C definita dalle (B.7.346) - (B.7.349) è senz'altro compatibile con l'algebra del campo di Dirac.
Veniamo ora alla dimostrazione della sua compatibilità con la dinamica.
Partiamo al solito dalla densità lagrangiana del campo di Dirac

$$\mathcal{L}(x) = \frac{i}{2}\left[\bar\psi\,\gamma^\mu(\partial_\mu\psi) - (\partial_\mu\bar\psi)\gamma^\mu\psi\right] - m\,\bar\psi\,\psi \tag{B.7.371}$$

---

allora, essendo C, per ipotesi, unitaria, risulta

$$\begin{aligned} C\bar\psi C^{-1} &= C\psi^\dagger\gamma^0 C^{-1} = C\psi^\dagger C^{-1}\gamma^0 = C\psi^\dagger C^\dagger\gamma^0 = \left(C\psi C^{-1}\right)^\dagger\gamma^0 = \\ &= \left(e^{-i\eta_C}\,\mathcal{C}^{-1}\,\bar\psi^t\right)^\dagger\gamma^0 = e^{i\eta_C}\,(\bar\psi^t)^\dagger(\mathcal{C}^{-1})^+\gamma^0 \end{aligned} \tag{B.7.365}$$

ma, per quanto visto precedentemente, essendo $(\mathcal{C}^{-1})^+ = \mathcal{C}$, e $\gamma^0 = (\gamma^0)^t = (\gamma^0)^+$, risulta infine

$$\begin{aligned} C\bar\psi C^{-1} &= e^{i\eta_C}\left[\left(\psi^\dagger\gamma^0\right)^t\right]^\dagger\mathcal{C}\gamma^0 = e^{i\eta_C}\left[(\gamma^0)^t(\psi^t)^\dagger\right]^\dagger\mathcal{C}\gamma^0 = \\ &= e^{i\eta_C}\,\psi^t\,\gamma^0\mathcal{C}\,\gamma^0 = -e^{i\eta_C}\,\psi^t\,\mathcal{C} \end{aligned} \tag{B.7.366}$$

e osserviamo che la trasformazione C sui campi ψ e $\bar{\psi}$ è tale che[40]

$$C: \qquad x \to x \tag{B.7.374}$$
$$\psi(x) \to \psi_C(x) = e^{-i\eta_C}\, \mathcal{C}^{-1}\, \bar{\psi}^t(x) \Leftrightarrow \bar{\psi} = e^{i\eta_C}\, \psi_C^t\, \mathcal{C}^{-1} \tag{B.7.375}$$
$$\bar{\psi}(x) \to \bar{\psi}_C(x) = -e^{i\eta_C}\, \psi^t(x)\, \mathcal{C} \Leftrightarrow \psi = -e^{-i\eta_C}\, \mathcal{C}\, \bar{\psi}_C^t \tag{B.7.376}$$

L'invarianza in valore della lagrangiana garantisce che l'evoluzione dei campi trasformati ψ_C e $\bar{\psi}_C$ è retta dalla densità lagrangiana seguente:

$$\mathcal{L}_C(x) = \frac{i}{2}\left[\left(e^{i\eta_C}\, \psi_C^t\, \mathcal{C}^{-1}\right)\gamma^\mu\left(-\partial_\mu e^{-i\eta_C}\, \mathcal{C}\, \bar{\psi}_C^t\right) - \left(\partial_\mu e^{i\eta_C} \psi_C^t\, \mathcal{C}^{-1}\right)\gamma^\mu\left(-e^{-i\eta_C}\, \mathcal{C}\, \bar{\psi}_C^t\right)\right] + $$
$$+m\; e^{i\eta_C}\, \psi_C^t\, \mathcal{C}^{-1}\, e^{-i\eta_C}\, \mathcal{C}\, \bar{\psi}_C^t \tag{B.7.377}$$

Iniziamo considerando il termine di massa. Si ha

$$m\; e^{i\eta_C}\, \psi_C^t\, \mathcal{C}^{-1}\, e^{-i\eta_C}\, \mathcal{C}\, \bar{\psi}_C^t = m\; \psi_C^t \bar{\psi}_C^t = m\; (\psi_C)_\alpha\, (\bar{\psi}_C)_\alpha \tag{B.7.378}$$

dove la somma sulle componenti dei campi, individuate dall'indice α, si estende, ovviamente, da 1 a 4.
Questo termine, apparentemente, è opposto a quello che compare nella densità lagrangiana originaria del campo di Dirac, dove il termine di massa è appunto espresso dal termine

$$-m\; \bar{\psi}\, \psi = -m\; \bar{\psi}_\alpha\, \psi_\alpha \tag{B.7.379}$$

In realtà occorre ricordare, di nuovo, che i prodotti che compaiono nella densità lagrangiana vanno sempre intesi come *normal-ordinati* e siccome ψ e $\bar{\psi}$ anticommutano, evidentemente è

$$:\, \psi\, \bar{\psi}\, : \;\; = \;\; -\, :\, \bar{\psi}\, \psi\, : \tag{B.7.380}$$

per cui, in definitiva, il termine di massa (B.7.378) coincide effettivamente con quello canonico, presente nella densità lagrangiana di Dirac.
Veniamo ora agli altri due termini, cioè alle quantità

$$\left(e^{i\eta_C}\, \psi_C^t\, \mathcal{C}^{-1}\right)\gamma^\mu\left(-\partial_\mu e^{-i\eta_C}\, \mathcal{C}\, \bar{\psi}_C^t\right) - \left(\partial_\mu e^{i\eta_C} \psi_C^t\, \mathcal{C}^{-1}\right)\gamma^\mu\left(-e^{-i\eta_C}\, \mathcal{C}\, \bar{\psi}_C^t\right) =$$
$$= -\psi_C^t\left(\mathcal{C}^{-1}\, \gamma^\mu\, \mathcal{C}\right)\left(\partial_\mu \bar{\psi}_C^t\right) + \left(\partial_\mu \psi_C^t\right)\left(\mathcal{C}^{-1}\, \gamma^\mu\, \mathcal{C}\right)\bar{\psi}_C^t \tag{B.7.381}$$

---

[40] Abbiamo infatti che (si ricordi che $\mathcal{C}^t = \mathcal{C}^{-1} = -\mathcal{C}$)

$$\psi_C = e^{-i\eta_C}\, \mathcal{C}^{-1}\, \bar{\psi}^t \Rightarrow \psi_C^t = e^{-i\eta_C}\, \bar{\psi}\, (\mathcal{C}^{-1})^t = e^{-i\eta_C} \bar{\psi}\mathcal{C} \Rightarrow \bar{\psi} = e^{i\eta_C}\, \psi_C^t\, \mathcal{C}^{-1} \tag{B.7.372}$$

e così pure risulta

$$\bar{\psi}_C = -e^{i\eta_C}\, \psi^t\, \mathcal{C} \Rightarrow \bar{\psi}_C^t = -e^{i\eta_C}\, \mathcal{C}^t\, \psi \Rightarrow \psi = -e^{-i\eta_C}\, (\mathcal{C}^t)^{-1}\, \bar{\psi}_C^t = -e^{-i\eta_C}\, \mathcal{C}\, \bar{\psi}_C^t \tag{B.7.373}$$

D'altronde, essendo $\mathcal{C}^{-1} = -\mathcal{C}$, evidentemente si ha

$$\mathcal{C}\gamma^\mu\mathcal{C}^{-1} = -(\gamma^\mu)^t \Leftrightarrow \mathcal{C}^{-1}\gamma^\mu\mathcal{C} = -(\gamma^\mu)^t \tag{B.7.382}$$

e dunque i due termini di cui sopra diventano

$$\psi_C^t(\gamma^\mu)^t\left(\partial_\mu\bar{\psi}_C^t\right) - \left(\partial_\mu\psi_C^t\right)(\gamma^\mu)^t\bar{\psi}_C^t \tag{B.7.383}$$

ovvero, esplicitamente

$$\begin{aligned}(\psi_C)_\alpha\,\gamma^\mu_{\beta\alpha}\,(\partial_\mu\bar{\psi}_C)_\beta - (\partial_\mu\psi_C)_\alpha\,\gamma^\mu_{\beta\alpha}\,(\bar{\psi}_C)_\beta =\\ = \gamma^\mu_{\beta\alpha}\left[(\psi_C)_\alpha(\partial_\mu\bar{\psi}_C)_\beta - (\partial_\mu\psi_C)_\alpha(\bar{\psi}_C)_\beta\right]\end{aligned} \tag{B.7.384}$$

da confrontare con gli analoghi termini della densità lagrangiana di Dirac originaria

$$\bar{\psi}_\beta\,(\gamma^\mu)_{\beta\alpha}(\partial_\mu\psi)_\alpha - (\partial_\mu\bar{\psi})_\beta(\gamma^\mu)_{\beta\alpha}\psi_\alpha = \gamma^\mu_{\beta\alpha}\left[\bar{\psi}_\beta(\partial_\mu\psi)_\alpha - (\partial_\mu\bar{\psi})_\beta\psi_\alpha\right] \tag{B.7.385}$$

ed è allora evidente che, tenendo conto, di nuovo del *normal-ordering* e le regole di anticommutazione dei campi, i due termini hanno la stessa forma.

Ricordiamo infine, di nuovo, che un metodo equivalente per verificare che i campi ψ e ψ_C (e dunque anche $\bar{\psi}$ e $\bar{\psi}_C$ ...) hanno la stessa dinamica è, naturalmente, quello di dimostrare che l'hamiltoniana libera H_0 del campo di Dirac risulta essere C-invariante.
Richiamiamo, a questo scopo, l'espressione di H_0 in termini degli operatori di creazione e distruzione. Risulta

$$H_0 = \sum_r\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3\,2E_p}\left[E_p\,a^\dagger(r,\vec{p})\,a(r,\vec{p}) + E_p\,b^\dagger(r,\vec{p})\,b(r,\vec{p})\right] \tag{B.7.386}$$

ed è evidente, allora, che, siccome risulta

$$C\,a^\dagger\,a\,C^{-1} = b^\dagger\,b; \quad C\,b^\dagger\,b\,C^{-1} = a^\dagger\,a$$

l'operatore C commuta effettivamente con H_0.

Dato che l'operatore C definito sopra rispetta anche l'algebra dei campi possiamo dire senz'altro che essa è una *simmetria conservata* anche per il campo di Dirac, la quale rimane tale anche in presenza di interazione elettromagnetica, per il fatto che inverte il segno della densità di corrente.

Prima di concludere l'argomento, veniamo a un'ultima osservazione concernente il fattore di fase $e^{i\eta_C}$, detto anche *parità di carica intrinseca* della particella. Come si è visto, almeno nei casi esaminati, essa è, a priori, arbitraria, con la sola eccezione del caso delle particelle che coincidono con le loro antiparticelle, per le quali può solo essere

$$e^{i\eta_C} = \pm 1 \tag{B.7.387}$$

dovendo essere $C^2 = 1$.
Il fotone è una di queste e, come sappiamo, ha parità di carica intrinseca pari a -1, ovvero

$$C \,|\, \gamma >= - \,|\, \gamma > \tag{B.7.388}$$

La conoscenza della parità di carica intrinseca del fotone (e, eventualmente, di altre particelle) viene usata per fissare quella di altre particelle, sulla base dell'esistenza di un decadimento di queste ultime che sappiamo avvenire attraverso una imterazione che conserva C (come l'interazione elettromagnetica o l'interazione forte) e coinvolge fotoni e/o altri autostati di C di autovalore noto.
Naturalmente, la bontà della conclusione deve essere poi verificata attravero altri decadimenti che non contraddicano la conclusione così tratta.

Parità

Passiamo quindi a studiare l'azione della trasformazione di parità sul campo di Dirac. Evidentemente, così come nel caso del campo scalare, affinchè P possa continuare a essere una simmetria conservata in presenza di interazione elettromagnetica, vogliamo che risulti

$$J^\mu(x) \xrightarrow{P} J_\mu(Px) \tag{B.7.389}$$

Ma procediamo, di nuovo, a partire dallo sviluppo del campo in termini di operatori di creazione e distruzione, tenendo conto dell'analogia classica. Dovendo, la parità invertire il segno dell'impulso ma non alterare lo stato di spin della particella/antiparticella, possiamo provare a scrivere

$$P\, a^\dagger(r,\vec{p})\, P^{-1} = e^{i\eta_P}\, a^\dagger(r,-\vec{p}) \tag{B.7.390}$$
$$P\, a(r,\vec{p})\, P^{-1} = e^{-i\eta_P}\, a(r,-\vec{p}) \tag{B.7.391}$$

dove la (B.7.391) discende direttamente dalla (B.7.390), visto che abbiamo assunto che P sia unitaria.

Per quanto riguarda poi l'azione di P sugli operatori di creazione e distruzione dell'antiparticella, in analogia con quanto accadeva nel caso del campo scalare[41], possiamo provare a porre

$$P\, b^\dagger(r,\vec{p})\, P^{-1} = e^{-i\eta_P}\, b^\dagger(r,-\vec{p}) \tag{B.7.392}$$
$$P\, b(r,\vec{p})\, P^{-1} = e^{i\eta_P}\, b(r,-\vec{p}) \tag{B.7.393}$$

con $e^{i\eta_P} = \pm 1 = e^{-i\eta_P}$, per il fatto che deve comunque essere $P^2 = I$. Vediamo l'effetto su ψ e $\bar{\psi}$ della trasformazione P definita sopra. Si ha

$$\begin{aligned}
P\,\psi(x^0,\vec{x})\,P^{-1} &= P\left\{\sum_r \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\Big[a(r,\vec{p})u^{(r)}(\vec{p})\,e^{-ipx} + \right.\\
&+ \left. b^\dagger(r,\vec{p})v^{(r)}(\vec{p})\,e^{ipx} + \Big]\right\} P^{-1} = \\
&= e^{-i\eta_P}\sum_r \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\Big[a(r,-\vec{p})u^{(r)}(\vec{p})\,e^{-ip^0x^0+i\vec{p}\cdot\vec{x}} + \\
&+ b^\dagger(r,-\vec{p})v^{(r)}(\vec{p})\,e^{ip^0x^0-i\vec{p}\cdot\vec{x}}\Big] = \\
&= e^{-i\eta_P}\sum_r \int \frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3}\Big[a(r,\vec{q})u^{(r)}(-\vec{q})\,e^{-iq^0x^0+i\vec{q}\cdot(-\vec{x})} + \\
&+ b^\dagger(r,\vec{q})v^{(r)}(-\vec{q})\,e^{iq^0x^0-i\vec{q}\cdot(-\vec{x})}\Big]
\end{aligned} \tag{B.7.394}$$

[41] Ricordiamo a questo proposito che la ragione per cui il fattore di fase che compariva nella legge di trasformazione sotto P di $b^\dagger$ era il complesso coniugato di quello relativo ad $a^\dagger$, discendeva solo dall'esigenza di avere, alla fine, una legge di trasformazione *semplice* per il campo scalare ϕ. Come vedremo, questa stessa esigenza ci costringerà, nel caso del campo di Dirac ψ, a giungere a una conclusione diversa.

Ma essendo

$$u^{(r)}(\vec{p}) \quad = \quad \frac{m+\not{p}}{\sqrt{m+E_p}}\,u_0^{(r)} = \frac{p^0\gamma^0 - \vec{p}\cdot\vec{\gamma} + m}{\sqrt{m+E_p}}\,u_0^{(r)} \qquad \text{(B.7.395)}$$

chiaramente risulta

$$\begin{aligned} u^{(r)}(-\vec{p}) \quad &= \quad \frac{p^0\gamma^0 + \vec{p}\cdot\vec{\gamma} + m}{\sqrt{m+E_p}}\,u_0^{(r)} = \frac{(p^0\gamma^0 + \vec{p}\cdot\vec{\gamma} + m)\gamma^0}{\sqrt{m+E_p}}\,\gamma^0\,u_0^{(r)} = \\ = \gamma^0\,\frac{(p^0\gamma^0 - \vec{p}\cdot\vec{\gamma} + m)}{\sqrt{m+E_p}}\,\gamma^0\,u_0^{(r)} &= \gamma^0\frac{p^0\gamma^0 - \vec{p}\cdot\vec{\gamma} + m}{\sqrt{m+E_p}}u_0^{(r)} \end{aligned} \qquad \text{(B.7.396)}$$

visto che $\gamma^0\gamma^k = -\gamma^k\gamma^0$ e $\gamma^0 u_0^{(r)} = u_0^{(r)}$. Dunque si ha

$$u^{(r)}(-\vec{p}) = \gamma^0\,u^{(r)}(\vec{p}) \qquad \text{(B.7.397)}$$

Per quanto riguarda lo spinore $v^r(\vec{p})$, a sua volta, si ha che, essendo

$$v^{(r)}(\vec{p}) \quad = \quad \frac{m-\not{p}}{\sqrt{m+E}}\,v_0^{(r)} \qquad \text{(B.7.398)}$$

risulta che

$$\begin{aligned} v^{(r)}(-\vec{p}) \quad &= \quad \frac{m - p^0\gamma^0 - \vec{p}\cdot\vec{\gamma}}{\sqrt{m+E_p}}\,v_0^{(r)} = \frac{(m - p^0\gamma^0 - \vec{p}\cdot\vec{\gamma})\gamma^0}{\sqrt{m+E_p}}\,\gamma^0\,v_0^{(r)} = \\ = \gamma^0\,\frac{(m - p^0\gamma^0 + \vec{p}\cdot\vec{\gamma})}{\sqrt{m+E_p}}\,(-v_0^{(r)}) & \end{aligned} \qquad \text{(B.7.399)}$$

essendo stavolta $\gamma^0 v_0^{(r)} = -v_0^{(r)}$. Quindi abbiamo

$$v^{(r)}(-\vec{p}) = -\gamma^0\,v^{(r)}(\vec{p}) \qquad \text{(B.7.400)}$$

Questo diverso comportamento degli spinori u dagli spinori v richiede un ripensamento delle (B.7.390)-(B.7.393).
Se vogliamo, infatti, che il campo ψ si trasformi sotto parità in modo coerente, ovvero sia

$$P\,\psi(x^0,\vec{x})\,P^{-1} \;\propto\; \psi(x^0,-\vec{x}) \qquad \text{(B.7.401)}$$

allora, mantenendo per gli operatori a e $a^\dagger$ che agiscono sulla particella, le relazioni (B.7.390) e (B.7.391) occorre, quanto agli operatori b e $b^\dagger$ che agiscono sull'antiparticella, imporre che soddisfino piuttosto le relazioni seguenti

$$P\,b^\dagger(r,\vec{p})\,P^{-1} \quad = \quad -e^{-i\eta_P}\,b^\dagger(r,-\vec{p}) \qquad \text{(B.7.402)}$$

$$P\,b(r,\vec{p})\,P^{-1} \quad = \quad -e^{i\eta_P}\,b(r,-\vec{p}) \qquad \text{(B.7.403)}$$

Infatti, in questo caso, per la (B.7.390) e la (B.7.402), avremo

$$
\begin{aligned}
P\,\psi(x^0,\vec{x})\,P^{-1} &= e^{-i\eta_P}\sum_r\int\frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3}\Big[a(r,\vec{q})\,u^{(r)}(-\vec{q})\,e^{-iq^0x^0+i\vec{q}\cdot(-\vec{x})}-\\
&-b^\dagger(r,\vec{q})\,v^{(r)}(-\vec{q})\,e^{iq^0x^0-i\vec{q}\cdot(-\vec{x})}\Big]=\\
&= e^{-i\eta_P}\,\gamma^0\sum_r\int\frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3}\Big[a(r,\vec{q})\,u^{(r)}(\vec{q})\,e^{-iq^0x^0+i\vec{q}\cdot(-\vec{x})}+\\
&+b^\dagger(r,\vec{q})\,v^{(r)}(\vec{q})\,e^{iq^0x^0-i\vec{q}\cdot(-\vec{x})}\Big]=\\
&= e^{-i\eta_P}\,\gamma^0\,\psi(x^0,\,-\vec{x}) \qquad \text{(B.7.404)}
\end{aligned}
$$

Ovvero, posto al solito

$$\psi_P(x)\equiv P\,\psi(x)\,P^{-1} \qquad \text{(B.7.405)}$$

risulta

$$\psi_P(x)=e^{-i\eta_P}\gamma^0\,\psi(Px) \qquad \text{(B.7.406)}$$

Per il campo $\bar{\psi}$, nelle stesse ipotesi, otteniamo evidentemente che[42]

$$P\,\bar{\psi}(x^0,\vec{x})\,P^{-1}=e^{i\eta_P}\bar{\psi}(x^0,-\vec{x})\,\gamma^0\Rightarrow\bar{\psi}_P(x)=e^{i\eta_P}\,\bar{\psi}(Px)\,\gamma^0 \qquad \text{(B.7.408)}$$

Quindi, nel caso spinoriale, particella e antiparticella hanno parità intrinseche opposte: se poniamo $e^{i\eta_P}\equiv 1$, la particella ha parità $+1$ e l'antiparticella ha parità -1, mentre vale l'opposto se $e^{i\eta_P}=-1$.

Cerchiamo ora di vedere se la trasformazione P così definita è una simmetria conservata nel caso del campo spinoriale libero.
E' facile convincersi che P rispetta l'algebra dei campi in quanto rispetta le regole di anticommutazione. Infatti, per le uniche non nulle, si ha

$$
\begin{aligned}
&\Big\{a(r,\vec{p})\,,\,a^\dagger(s,\vec{q})\Big\}=2E_p\,\delta_{rs}\,\delta(\vec{p}-\vec{q})\\
P:\quad &\Rightarrow\Big\{e^{-i\eta_P}\,a(r,-\vec{p})\,,\,e^{i\eta_P}\,a^\dagger(s,-\vec{q})\Big\}=2E_p\,\delta_{rs}\,\delta(-\vec{p}+\vec{q})\equiv 2E_p\,\delta_{rs}\,\delta(\vec{p}-\vec{q})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Big\{b(r,\vec{p})\,,\,b^\dagger(s,\vec{q})\Big\}=2E_p\,\delta_{rs}\,\delta(\vec{p}-\vec{q})\\
P:\quad &\Rightarrow\Big\{-e^{i\eta_P}\,b(r,-\vec{p})\,,\,-e^{-i\eta_P}\,b^\dagger(s,-\vec{q})\Big\}=2E_p\,\delta_{rs}\,\delta(-\vec{p}+\vec{q})\equiv 2E_p\,\delta_{rs}\,\delta(\vec{p}-\vec{q})
\end{aligned}
$$

---

[42] Si può procedere formalmente come abbiamo fatto nel caso del campo $\psi(x)$, a partire dalle leggi di trasformazione degli operatori di creazione e distruzione, oppure si può semplicemente osservare che, dalla legge di trasformazione di $\psi(x)$, segue che

$$
\begin{aligned}
&P\,\bar{\psi}(x^0,\vec{x})\,P^{-1}=P\,\psi^+(x)\gamma^0\,P^{-1}=P\,\psi^+(x)\,P^{-1}\,\gamma^0=\big(P\,\psi(x)\;P^{-1}\big)^+\;\gamma^0=\\
=\;&\big(e^{-i\eta_P}\gamma^0\,\psi(Px)\big)^+\;\gamma^0=e^{i\eta_P}\;\big(\gamma^0\,\psi(Px)\big)^+\;\gamma^0=e^{i\eta_P}\;\;\psi(Px)^+\,\gamma^0\,\gamma^0=\\
=\;&e^{i\eta_P}\bar{\psi}(Px)\,\gamma^0 \qquad \text{(B.7.407)}
\end{aligned}
$$

Veniamo ora alla dinamica.
La densità lagrangiana del campo spinoriale, come ben sappiamo, è

$$\mathcal{L}(x) = \frac{i}{2}\,[\bar{\psi}\,\gamma^\mu\,(\partial_\mu\psi) - (\partial_\mu\bar{\psi})\,\gamma^\mu\,\psi] - m\,\bar{\psi}\,\psi \tag{B.7.409}$$

La legge di trasformazione descritta da P è tale per cui

$$x \xrightarrow{P} x' \equiv P\,x \qquad \Leftrightarrow \qquad x = P\,x' \tag{B.7.410}$$

$$\psi(x) \xrightarrow{P} \psi_P(x') \equiv e^{-i\eta_P}\,\gamma^0\,\psi(x) \Leftrightarrow \qquad \psi(x) = e^{i\eta_P}\,\gamma^0\,\psi_P(x') \tag{B.7.411}$$

$$\bar{\psi}(x) \xrightarrow{P} \bar{\psi}_P(x') \equiv e^{i\eta_P}\,\bar{\psi}(x)\,\gamma^0 \quad \Leftrightarrow \qquad \bar{\psi}(x) = e^{-i\eta_P}\,\bar{\psi}_P(x')\,\gamma^0 \tag{B.7.412}$$

dunque l'evoluzione dei campi ψ_P e $\bar{\psi}_P$ è retta dalla densità lagrangiana (invarianza in valore ...)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_P(x') = \frac{i}{2}\Big\{&e^{-i\eta_P}\,\bar{\psi}_P(x')\gamma^0\,\gamma^\mu\,\partial_\mu[e^{i\eta_P}\,\gamma^0\,\psi_P(x')] - \\
- \partial_\mu[e^{-i\eta_P}\,\bar{\psi}_P(x')\gamma^0]\,\gamma^\mu\,e^{i\eta_P}\gamma^0\psi_P(x')\Big\} - \\
-m\;e^{-i\eta_P}\bar{\psi}_P(x')\gamma^0\,e^{i\eta_P}\gamma^0\,\psi_P(x') = \\
= \frac{i}{2}\Big\{\bar{\psi}_P\,\gamma^0\,\gamma^\mu\,\gamma^0\,(\partial'^\mu\psi_P) - (\partial'^\mu\bar{\psi}_P)\,\gamma^0\,\gamma^\mu\,\gamma^0\psi_P\Big\} - m\,\bar{\psi}_P\,\psi_P
\end{aligned} \tag{B.7.413}$$

dove abbiamo usato il fatto che $\partial_\mu = \partial'^\mu$ e che $(\gamma^0)^2 = I$.
Poichè $\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 = \gamma_\mu$, abbiamo immediatamente che

$$\mathcal{L}_P(x') \;=\; \frac{i}{2}\Big\{\bar{\psi}_P\,\gamma_\mu\,(\partial'^\mu\psi_P) - (\partial'^\mu\bar{\psi}_P)\,\gamma_\mu\,\psi_P\Big\} - m\,\bar{\psi}_P\,\psi_P \tag{B.7.414}$$

la quale prova che la densità lagrangiana del campo di Dirac risulta invariante in forma per parità e quindi i campi ψ e ψ_P hanno la stessa dinamica.

Resta così dimostrato che la trasformazione P definita da

$$P\,a^\dagger(r,\vec{p})\,P^{-1} \;=\; e^{i\eta_P}\,a^\dagger(r,-\vec{p}) \tag{B.7.415}$$

$$P\,a(r,\vec{p})\,P^{-1} \;=\; e^{-i\eta_P}\,a(r,-\vec{p}) \tag{B.7.416}$$

$$P\,b^\dagger(r,\vec{p})\,P^{-1} \;=\; -e^{-i\eta_P}\,b^\dagger(r,-\vec{p}) \tag{B.7.417}$$

$$P\,b(r,\vec{p})\,P^{-1} \;=\; -e^{i\eta_P}\,b(r,-\vec{p}) \tag{B.7.418}$$

è una simmetria conservatata per il campo di Dirac libero.

Verifichiamo adesso che, riguardo alla densità di corrente, effettivamente succede che

$$J^\mu(x) \xrightarrow{P} J_\mu(Px) \tag{B.7.419}$$

Dalle leggi di trasformazione di ψ e $\bar{\psi}$, essendo[43] in termini dei campi

$$J^\mu(x) = \bar{\psi}(x)\,\gamma^\mu\,\psi(x) \tag{B.7.420}$$

risulta

$$\begin{aligned} P\,J^\mu(x)\,P^{-1} &= P\,\bar{\psi}\,P^{-1}\gamma^\mu\,P\psi\,P^{-1} = \\ &= e^{i\eta_P}\bar{\psi}(Px)\gamma^0\gamma^\mu\;e^{-i\eta_P}\gamma^0\psi(Px) = \\ &= \bar{\psi}(Px)\,\gamma_\mu\,\psi(Px) \equiv J_\mu(Px) \end{aligned} \tag{B.7.421}$$

dunque risulta così provato che P è una simmetria conservata anche nel caso dell'interazione elettromagnetica, quando la densità di corrente elettrica sia quella associata ad una particella di Dirac.

[43]Siccome P manda ψ e $\bar{\psi}$ in sé, ovvero non le scambia come fa invece C, non è strettamente necessario usare per J^μ la forma $N-$*ordinata*. Va da sé comunque che, se la usiamo, continua a valere la (B.7.419), come è facile verificare direttamente.

Inversione temporale

Veniamo infine alla definizione del modo di operare della simmetria di inversione temporale T sul campo di Dirac.
A questo riguardo, vale ancora l'osservazione già fatta in precedenza per le simmetrie P e C, cioè che se vogliamo che T possa essere una simmetria conservata anche nel caso dell'interazione elettromagnetica, visto il modo di trasformarsi (cfr.(B.6.281)) sotto T del campo A_μ

$$A_\mu(x) \xrightarrow{T} A^\mu(Tx) \tag{B.7.422}$$

poiché la corrente (elettrica) associata al campo di Dirac carico, come ben sappiamo, è data da

$$J^\mu(x) = e\,\bar{\psi}(x)\,\gamma^\mu\,\psi(x) \tag{B.7.423}$$

occorre che i campi ψ e $\bar{\psi}$ si trasformino sotto T in modo tale per cui

$$T\,J^\mu(x)\,T^{-1} = J_\mu(Tx) \tag{B.7.424}$$

Questa è una esigenza imprescindibile se vogliamo che l'elettrodinamica quantistica, così come accade per l'elettrodinamica classica, sia T-invariante.

Iniziamo partendo dagli operatori di creazione e distruzione di particella e antiparticella. La prima osservazione che dobbiamo fare è che, sempre affinchè l'analogia classica sia rispettata, sotto T ci attendiamo che l'impulso $\vec{p}$ e le componenti dello spin si invertano di segno, sia che si tratti di particella o di antiparticella, ovvero risulti

$$T\,|s,\,\vec{p}> \quad \propto \quad |\bar{s},\,-\vec{p}> \tag{B.7.425}$$

Più precisamente, per le considerazioni già fatte sull'operatore T quando lo abbiamo studiato nello schema di prima quantizzazione, sappiamo che, per quanto riguarda la variabile di spin, oltre al suo rovesciamento è coinvolta una rotazione di π intorno all'asse J_y, ovvero

$$T\,|s,\,\vec{p}>= \rho_{sr}\,e^{i\eta_T}|r,\,-\vec{p}> \tag{B.7.426}$$

dove il fattore di fase $e^{i\eta_T}$ è a priori qualsiasi, mentre

$$\rho \equiv e^{i\pi\,J_y} \tag{B.7.427}$$

e dunque, se usiamo la base consueta degli autovettori di σ_z, risulta ($\hbar = 1$)

$$J_y = \frac{1}{2}\,\sigma_z = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\,i \\ i & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow i\pi\,J_y = \frac{\pi}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \frac{\pi}{2}\,U \tag{B.7.428}$$

e quindi

$$\begin{aligned}\rho &= e^{i\pi\, J_y} = e^{\frac{\pi}{2}U} = I + \frac{\pi}{2}U + \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 U^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 U^3 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^4 U^4 + ... = \\ &= I + \frac{\pi}{2}U - \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 I - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 U + \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^4 I + ... = \\ &= I\,\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + U\,\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \qquad \text{(B.7.429)}$$

Esplicitamente abbiamo[44]

$$T\,|1,\,\vec{p}> \;=\; e^{i\eta_T}\,|2,\,-\vec{p}> \qquad \text{(B.7.430)}$$
$$T\,|2,\,\vec{p}> \;=\; -e^{i\eta_T}\,|1,\,-\vec{p}> \qquad \text{(B.7.431)}$$

Proviamo adesso, in analogia con quanto già fatto per gli operatori C e P, a tradurre tutto questo nel linguaggio degli operatori di creazione e distruzione. Tentativamente poniamo dunque

$$T\,a^\dagger(s,\vec{p})\,T^{-1} \;=\; e^{i\eta_T}\;\rho_{sr}\,a^\dagger(r,-\vec{p}) \qquad \text{(B.7.432)}$$
$$T\,b^\dagger(s,\vec{p})\,T^{-1} \;=\; e^{-i\eta_T}\;\rho_{sr}\,b^\dagger(r,-\vec{p}) \qquad \text{(B.7.433)}$$

Prendendo adesso l'aggiunto delle (B.7.432)-(B.7.433), poiché ρ è reale, abbiamo che, per gli operatori di annichilazione, dovrà essere quindi

$$T\,a(s,\vec{p})\,T^{-1} \;=\; e^{-i\eta_T}\;\rho_{sr}\,a(r,-\vec{p}) \qquad \text{(B.7.434)}$$
$$T\,b(s,\vec{p})\,T^{-1} \;=\; e^{i\eta_T}\;\rho_{sr}\,b(r,-\vec{p}) \qquad \text{(B.7.435)}$$

A questo punto passiamo a vedere se queste leggi di trasformazione sono o no compatibili con l'algebra dei campi.
Ricordiamo che gli unici anticommutatori non nulli sono

$$\left\{a(s,\vec{p}),\,a^\dagger(r,\vec{q})\right\} = \left\{b(s,\vec{p}),\,b^\dagger(r,\vec{q})\right\} = 2E_p\,(2\pi)^3\,\delta^3(\vec{p}-\vec{q})\,\delta_{sr} \qquad \text{(B.7.436)}$$

Visto che T agisce allo stesso modo sugli operatori di particella e antiparticella, limitiamoci a vedere se T rispetta l'algebra costruita con gli operatori di creazione e annichilazione della particella.
Evidentemente l'algebra sarà rispettata se e solo se

$$T\,\left\{a(s,\vec{p}),\,a^\dagger(r,\vec{q})\right\}\,T^{-1} \;=\; T\;2E_p\,(2\pi)^3\,\delta^3(\vec{p}-\vec{q})\,\delta_{sr}\;T^{-1} \qquad \text{(B.7.437)}$$

ovvero, essendo il secondo membro della (B.7.437) reale, se accade che

$$T\,\left\{a(s,\vec{p}),\,a^\dagger(r,\vec{q})\right\}\,T^{-1} \;=\; 2E_p\,(2\pi)^3\,\delta^3(\vec{p}-\vec{q})\,\delta_{sr} \qquad \text{(B.7.438)}$$

[44]Si noti che ρ è reale e antisimmetrica e che $\rho^2 = U^2 = -I$, in accordo con il fatto che per particelle di spin 1/2, come abbiamo già visto, $T^2 = -I$ ...

D'altronde

$$\begin{aligned} T\left\{a(s,\vec{p}),\, a^\dagger(r,\vec{q})\right\} T^{-1} &= \left\{T\, a(s,\vec{p})\, T^{-1},\, T\, a^\dagger(r,\vec{q})\, T^{-1}\right\} = \\ &= \left\{e^{-i\eta_T}\,\rho_{ss'}\, a(s',-\vec{p}),\, e^{i\eta_T}\,\rho_{rr'}\, a^\dagger(r',-\vec{q})\right\} = \\ &= \rho_{ss'}\,\rho_{rr'}\; 2E_p\,(2\pi)^3\,\delta^3(\vec{p}-\vec{q})\,\delta_{s'r'} \qquad \text{(B.7.439)} \end{aligned}$$

dove si è usato il fatto che

$$\delta^3(-\vec{v}) = \delta^3(\vec{v})$$

Ma

$$\rho_{ss'}\,\rho_{rr'}\,\delta_{s'r'} = \rho_{sr'}\,\rho_{rr'} = \rho_{sr'}\,\rho^t_{r'r} = -\rho_{sr'}\,\rho_{r'r} = -(\rho^2)_{sr} = I_{sr} = \delta_{sr} \quad \text{(B.7.440)}$$

e dunque resta così dimostrato che, effettivamente, c'è compatibilità fra la definizione data di T e l'algebra delle osservabili del campo di Dirac.

Passiamo quindi alla determinazione dell'azione di T sui campi ψ e $\bar{\psi}$. Siccome T si limita ad agire sugli autovalori degli autostati di impulso e spin (componente z), ma non tocca le condizioni di particella/antiparticella, allora così come nel caso della parità, ci attendiamo che mandi ψ in sé, cioè che risulti

$$T: \quad \psi(x) \to e^{-i\eta_T}\;\mathcal{M}\;\psi(Tx) \qquad \text{(B.7.441)}$$

dove $\mathcal{M}$ sarà una matrice 4×4 opportuna che conviene scrivere come $\mathcal{M} = M\gamma^0$, dove M resta da determinare. Poniamo quindi che sia

$$T: \quad \psi(x) \to e^{-i\eta_T}\;M\,\gamma^0\,\psi(Tx) \qquad \text{(B.7.442)}$$

e, di conseguenza, che[45] risulti

$$T: \quad \bar{\psi}(x) \to e^{i\eta_T}\;\bar{\psi}(Tx)\,M^+\,\gamma^0 \qquad \text{(B.7.445)}$$

Riguardo alla determinazione di M, se vogliamo che valga la relazione, per noi imprescindibile, per cui

$$T\,J^\mu(x)\,T^{-1} = J_\mu(Tx) \qquad \text{(B.7.446)}$$

allora, per quanto visto sopra, la matrice M deve essere tale per cui

$$M^+\,\gamma^0\,\gamma^{*\mu}\,M\,\gamma^0 = \gamma_\mu \qquad \text{(B.7.447)}$$

[45] Infatti se vale la (B.7.442) allora, essendo $\gamma^0 = \gamma^{0+}$, segue che

$$T: \quad \psi^+(x) \to \psi^+(Tx)\,\gamma^0\,M^+ = \bar{\psi}(Tx)\,M^+ \qquad \text{(B.7.443)}$$

e dunque

$$T: \quad \bar{\psi}(x) \equiv \psi^+(x)\,\gamma^0 \to \bar{\psi}(Tx)\,M^+\,\gamma^0 \qquad \text{(B.7.444)}$$

Infatti (ricordiamoci che T è antilineare ...)

$$\begin{aligned} T\,\bar{\psi}(x)\,\gamma^\mu\,\psi(x)\,T^{-1} &= T\,\bar{\psi}(x)\,T^{-1}\,T\,\gamma^\mu\,T^{-1}\,T\,\psi(x)\,T^{-1} = \\ &= e^{i\eta_T}\,\bar{\psi}(Tx)\,M^+\,\gamma^0\,\gamma^{*\mu}\,M\,\gamma^0\,\psi(Tx)\,e^{-i\eta_T} \end{aligned} \tag{B.7.448}$$

e affinché valga la (B.7.446) è necessario, appunto, che sia

$$M^+\,\gamma^0\,\gamma^{*\mu}\,M\,\gamma^0 = \gamma_\mu \tag{B.7.449}$$

Ma esiste una matrice con questa proprietà ?
Iniziamo facendo $\mu = 0$. Poiché $\gamma^0 = \gamma^{*0} = \gamma_0$ e $(\gamma^0)^2 = (\gamma_0)^2 = I$, ne segue che, affinché possa valere la (B.7.449), è necessario che

$$M^+\,M = I \tag{B.7.450}$$

ovvero che M sia unitaria. Usando allora questa proprietà di M nella (B.7.449) unitamente al fatto che $(\gamma^0)^2 = I$, abbiamo

$$\gamma^0\,\gamma^{*\mu}\,M = M\,\gamma_\mu\,\gamma^0 \tag{B.7.451}$$

Il caso $\mu = 0$, ovviamente, è automaticamente soddisfatto, essendo quello che ci ha condotto alla condizione di unitarietà di M, usata appunto per passare dalla (B.7.449) alla (B.7.451). Nel caso in cui $\mu = 1$, essendo γ^1 reale ed essendo $\gamma^1 = -\gamma_1$, abbiamo

$$\mu = 1: \quad \gamma^0\,\gamma^1\,M = -M\,\gamma^1\,\gamma^0 \tag{B.7.452}$$

mentre nel caso in cui $\mu = 2$, siccome γ^2 è immaginaria pura, risulta

$$\mu = 2: \quad -\gamma^0\,\gamma^2\,M = -M\,\gamma^2\,\gamma^0 \tag{B.7.453}$$

Infine, nel caso in cui $\mu = 3$, poiché siamo di nuovo nella stessa situazione che nel caso in cui $\mu = 1$, abbiamo

$$\mu = 3: \quad \gamma^0\,\gamma^3\,M = -M\,\gamma^3\,\gamma^0 \tag{B.7.454}$$

Siccome γ^0 anticommuta con tutte le γ^i, le relazioni di sopra divengono le seguenti

$$\gamma^0\,\gamma^1\,M = M\,\gamma^0\,\gamma^1 \tag{B.7.455}$$
$$\gamma^0\,\gamma^2\,M = -M\,\gamma^0\,\gamma^2 \tag{B.7.456}$$
$$\gamma^0\,\gamma^3\,M = M\,\gamma^0\,\gamma^3 \tag{B.7.457}$$

cioè M dovrà commutare con $\gamma^0\,\gamma^1$ e $\gamma^0\,\gamma^3$ mentre dovrà anticommutare con $\gamma^0\,\gamma^2$.
La soluzione è la matrice seguente

$$M = \gamma^1\,\gamma^3\,\gamma^0 \tag{B.7.458}$$

infatti il confronto fra il primo e il secondo membro delle (B.7.455)-(B.7.457) (ricordiamo che $\gamma^i\,\gamma^i = -I$, qualunque sia $i = 1,\,2,\,3$) fornisce

$$
\begin{aligned}
\mu = 1 \quad &: \\
I \quad &: \gamma^0\,\gamma^1 \cdot \gamma^1\,\gamma^3\,\gamma^0 = -\gamma^0\,\gamma^3\,\gamma^0 = \gamma^3 \\
II \quad &: \gamma^1\,\gamma^3\,\gamma^0 \cdot \gamma^0\,\gamma^1 = \gamma^1\,\gamma^3\,\gamma^1 = -(\gamma^1)^2\gamma^3 = \gamma^3
\end{aligned}
\tag{B.7.459}
$$

$$
\begin{aligned}
\mu = 2 \quad &: \\
I \quad &: \gamma^0\,\gamma^2 \cdot \gamma^1\,\gamma^3\,\gamma^0 = -\,\gamma^2\,\gamma^1\,\gamma^3\,(\gamma^0)^2 = \gamma^1\,\gamma^2\,\gamma^3 \\
II \quad &: -\,\gamma^1\,\gamma^3\,\gamma^0 \cdot \gamma^0\,\gamma^2 = -\gamma^1\,\gamma^3\,\gamma^2 = \gamma^1\,\gamma^2\,\gamma^3
\end{aligned}
\tag{B.7.460}
$$

$$
\begin{aligned}
\mu = 3 \quad &: \\
I \quad &: \gamma^0\,\gamma^3 \cdot \gamma^1\,\gamma^3\,\gamma^0 = -\gamma^0\,\gamma^1\,(\gamma^3)^2\,\gamma^0 = \gamma^0\,\gamma^1\,\gamma^0 = -\gamma^1 \\
II \quad &: \gamma^1\,\gamma^3\,\gamma^0 \cdot \gamma^0\,\gamma^3 = \gamma^1\,(\gamma^3)^2 = -\gamma^1
\end{aligned}
\tag{B.7.461}
$$

Verifichiamo che la matrice M di cui alla (B.7.458) è unitaria.
Osserviamo a questo proposito che

$$
M^+ = \left(\gamma^1\,\gamma^3\,\gamma^0\right)^+ = (\gamma^0)^+\,(\gamma^3)^+\,(\gamma^1)^+ = \gamma^0\,\gamma^3\,\gamma^1 \tag{B.7.462}
$$

dove si è usato il fatto che γ^0 è hermitiana mentre le γ^i sono antiermitiane.
Risulta quindi

$$
M\,M^+ = \gamma^1\,\gamma^3\,\gamma^0 \;\; \gamma^0\,\gamma^3\,\gamma^1 = \gamma^1\,(\gamma^3)^2\,\gamma^1 = -(\gamma^1)^2 = I \tag{B.7.463}
$$

che prova l'unitarietà di M.
Poiché nelle (B.7.442) e (B.7.445) compaiono, rispettivamente, le combinazioni $M\,\gamma^0$ e $M^+\gamma^0$, è opportuno determinarle esplicitamente: si ha

$$
M\,\gamma^0 \;=\; \gamma^1\,\gamma^3\,\gamma^0\,\gamma^0 = \gamma^1\,\gamma^3 \tag{B.7.464}
$$

$$
M^+\,\gamma^0 \;=\; \gamma^0\,\gamma^3\,\gamma^1\,\gamma^0 = \gamma^3\,\gamma^1 \tag{B.7.465}
$$

Tornando al modo di operare di T sui campi ψ e $\bar{\psi}$, abbiamo così trovato che, se esso è tale per cui

$$
T: \qquad \psi(x) \to e^{-i\eta_T}\,\gamma^1\,\gamma^3\,\psi(Tx) \tag{B.7.466}
$$

$$
\bar{\psi}(x) \to e^{i\eta_T}\,\bar{\psi}(Tx)\,\gamma^3\,\gamma^1 \tag{B.7.467}
$$

allora vale la condizione (B.7.424) e dunque T risulta una simmetria conservata anche nel caso dell'interazione elettromagnetica in cui la corrente è quella associata al campo di Dirac.

Però il modo di agire di T sugli operatori di creazione e distruzione del campo di Dirac lo avevamo tentativamente già definito attraverso le (B.7.432)-(B.7.433) e (B.7.434)-(B.7.435).

Queste definizioni conducono o no alle (B.7.466)-(B.7.467) ? Vediamo.
Iniziamo dal campo ψ espresso da

$$\psi(x) = \sum_{s=1}^{2} \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \left\{ a(s,\vec{p})\, u^{(s)}(\vec{p})\, e^{-ipx} + b^\dagger(s,\vec{p})\, v^{(s)}(\vec{p})\, e^{ipx} \right\} \tag{B.7.468}$$

Tenendo conto che T è un operatore antilineare, risulta

$$T\,\psi(x)\,T^{-1} = \\ = \sum_{s=1}^{2} \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \left\{ T\, a(s,\vec{p})\, T^{-1}\, u^{*(s)}(\vec{p})\, e^{ipx} + T\, b^\dagger(s,\vec{p})\, T^{-1}\, v^{*(s)}(\vec{p})\, e^{-ipx} \right\} \tag{B.7.469}$$

Ovvero, usando la (B.7.434) e la (B.7.433), abbiamo

$$\begin{aligned} T\,\psi(x)\,T^{-1} &= \sum_{r,s} \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \left\{ e^{-i\eta_T}\, \rho_{sr}\, a(r,-\vec{p})\, u^{*(s)}(\vec{p})\, e^{ipx} + \right. \\ &\left. e^{-i\eta_T}\, \rho_{sr}\, b^\dagger(r,-\vec{p})\; v^{*(s)}(\vec{p})\, e^{-ipx} \right\} \end{aligned} \tag{B.7.470}$$

Se adesso indichiamo con T (anche) la matrice di Lorentz che cambia il segno della sola componente temporale di un quadrivettore[46] per cui

$$\begin{array}{ll} x & = (x^0,\vec{x}) \Leftrightarrow Tx = (-x^0,\vec{x}) \\ q & \equiv (q^0,\vec{q}) = -Tp = (p^0,-\vec{p}) \end{array} \Longleftrightarrow p\cdot x = -Tq\cdot x = -q\cdot Tx \tag{B.7.471}$$

e cambiamo variabile di integrazione da $\frac{d^3p}{2E_p}$ a $\frac{d^3q}{2E_q}$, otteniamo

$$\begin{aligned} T\,\psi(x)\,T^{-1} &= e^{-i\eta_T} \sum_{r,s} \rho_{sr} \int \frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3} \left\{ a(r,\vec{q})\; u^{*(s)}(-\vec{q})\, e^{-iq\cdot Tx} \right. + \\ &+ \left. b^\dagger(r,\vec{q})\; v^{*(s)}(-\vec{q})\, e^{iq\cdot Tx} \right\} \end{aligned} \tag{B.7.472}$$

Dimostriamo adesso che valgono le seguenti eguaglianze

$$\sum_s \rho_{sr} u^{*(s)}(-\vec{q}) = \gamma^1\gamma^3 u^{(r)}(q) \tag{B.7.473}$$

$$\sum_s \rho_{sr} v^{*(s)}(-\vec{q}) = \gamma^1\gamma^3 v^{(r)}(q) \tag{B.7.474}$$

Iniziamo a dimostrare la (B.7.473).
Dalla definizione si ha

$$u^{(r)}(\vec{q}) = \frac{m + q_\mu\gamma^\mu}{\sqrt{m+E_q}}\, u_0^{(r)} \tag{B.7.475}$$

[46]L'uso dello stesso simbolo per la matrice di Lorentz e l'operatore che descrive la simmetria di Time reversal nello spazio di Hilbert degli stati di particella/antiparticella non dovrebbe generare confusione perché, nei diversi casi, si dovrebbe capire dal contesto di chi stiamo parlando ...

Moltiplicando a sinistra la (B.7.475) per $\gamma^1\,\gamma^3$, si ha

$$\gamma^1\,\gamma^3\,u^{(r)}(\vec{q}) = \gamma^1\,\gamma^3\,\frac{m + q_\mu\gamma^\mu}{\sqrt{m+E_q}}\,u_0^{(r)} = \gamma^1\,\gamma^3\,\gamma^0\,\frac{\gamma^0(m + q_\mu\gamma^\mu)}{\sqrt{m+E_q}}\,u_0^{(r)} \tag{B.7.476}$$

ma $\gamma^0\,\gamma^\mu\,\gamma^0 = \gamma_\mu \quad \Rightarrow \quad \gamma^0\gamma^\mu = \gamma_\mu\gamma^0$ e per la (B.7.451) e la (B.7.458), abbiamo

$$\gamma^0\,\gamma^{*\mu}\cdot\gamma^1\,\gamma^3\,\gamma^0 = \gamma^1\,\gamma^3\,\gamma^0\cdot\gamma_\mu\,\gamma^0 \tag{B.7.477}$$

Risulta dunque

$$\begin{aligned}
\gamma^1\,\gamma^3\,u^{(r)}(\vec{q}) &= \gamma^1\,\gamma^3\,\gamma^0\,\frac{m + q_\mu\gamma_\mu}{\sqrt{m+E_q}}\,\gamma^0\,u_0^{(r)} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{m+E_q}}\,\left(\gamma^1\,\gamma^3\,m + q_\mu\gamma^0\gamma^{*\mu}\,\gamma^1\,\gamma^3\,\gamma^0\right)u_0^{(r)} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{m+E_q}}\,\left(\gamma^1\,\gamma^3\,m + q_\mu\gamma^*_\mu\,\gamma^0\,\gamma^1\,\gamma^3\,\gamma^0\right)u_0^{(r)} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{m+E_q}}\,\left(m + q_\mu\gamma^*_\mu\right)\,\gamma^1\,\gamma^3\,u_0^{(r)}
\end{aligned} \tag{B.7.478}$$

dove si è usato il fatto che $\gamma^0\,\gamma^1\,\gamma^3\,\gamma^0 = \gamma^1\,\gamma^3$.

Osserviamo adesso che la matrice $\gamma^1\,\gamma^3$ è tale per cui

$$\begin{aligned}
\gamma^1\,\gamma^3 &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ -\sigma_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ -\sigma_3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma_1\sigma_3 & 0 \\ 0 & -\,\sigma_1\sigma_3 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\,1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{B.7.479}$$

Quindi

$$\begin{array}{lclcl}
\gamma^1\,\gamma^3\,u_0^{(1)} &=& -u_0^{(2)} &=& \rho_{s,1}u_0^{(s)} \\
\gamma^1\,\gamma^3\,u_0^{(2)} &=& u_0^{(1)} &=& \rho_{s,2}u_0^{(s)}
\end{array} \Rightarrow \ \gamma^1\,\gamma^3\,u_0^{(r)} = \rho_{sr}u_0^{(s)} \tag{B.7.480}$$

e dunque

$$\begin{aligned}
\gamma^1\,\gamma^3\,u^{(r)}(\vec{q}) &= \frac{1}{\sqrt{m+E_q}}\left(m + q_\mu\gamma^*_\mu\right)\,\rho_{sr}u_0^{(s)} = \\
&= \rho_{sr}u^{*(s)}(-\vec{q})
\end{aligned} \tag{B.7.481}$$

che prova appunto la (B.7.473).

Per quanto riguarda poi la (B.7.474), ripartiamo dalla definizione degli spinori v, ovvero

$$v^{(r)}(\vec{q}) = \frac{m - q_\mu \gamma^\mu}{m + E_q}\, v_0^{(r)} \tag{B.7.482}$$

Ripetendo la dimostrazione già fatta per gli spinori u, concludiamo che

$$\gamma^1\,\gamma^3\,v^{(r)}(\vec{q}) = \frac{1}{\sqrt{m + E_q}}\left(m - q_\mu \gamma_\mu^*\right)\gamma^1\,\gamma^3\,v_0^{(r)} \tag{B.7.483}$$

e anche stavolta accade che[47]

$$\begin{array}{rcccl} \gamma^1\,\gamma^3\,v_0^{(1)} & = & -v_0^{(2)} & = & \rho_{s,1} v_0^{(s)} \\ \gamma^1\,\gamma^3\,v_0^{(2)} & = & v_0^{(1)} & = & \rho_{s,2} v_0^{(s)} \end{array} \Rightarrow \;\gamma^1\,\gamma^3\,v_0^{(r)} = \rho_{sr} v_0^{(s)} \tag{B.7.485}$$

per cui abbiamo che

$$\begin{aligned} \gamma^1\,\gamma^3\,v^{(r)}(\vec{q}) &= \frac{1}{\sqrt{m + E_q}}\left(m - q_\mu \gamma_\mu^*\right)\rho_{sr} v_0^{(s)} = \\ &= \rho_{sr} v^{*(s)}(-\vec{q}) \end{aligned} \tag{B.7.486}$$

che prova la (B.7.474).
Sostituendo la (B.7.473) e la (B.7.474) nella (B.7.472), si ha finalmente che

$$\begin{aligned} T\,\psi(x)\,T^{-1} &= e^{-i\eta_T}\gamma^1\gamma^3 \sum_r \int \frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3}\left\{a(r,\vec{q})\;u^{(r)}(\vec{q})\,e^{-iq\cdot Tx} \;+\right. \\ &+ \left. b^\dagger(r,\vec{q})\;v^{(r)}(\vec{q})\,e^{iq\cdot Tx}\right\} = e^{-i\eta_T}\gamma^1\gamma^3\psi(Tx) \end{aligned} \tag{B.7.487}$$

e dunque, per quanto già visto, che

$$T\,\bar{\psi}(x)\,T^{-1} = e^{i\eta_T}\;\bar{\psi}(Tx)\,\gamma^3\,\gamma^1 \tag{B.7.488}$$

Resta così dimostrato che l'operatore di inversione temporale T, definito sugli operatori di creazione secondo le (B.7.432)-(B.7.433) e su quelli di distruzione attraverso le (B.7.434)-(B.7.435), è tale per cui la corrente $J^\mu(x)$ si trasforma sotto T in accordo con la (B.7.446).

[47] Si ricordi che

$$u_0^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;;\; u_0^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad;\quad v_0^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;;\; v_0^{(2)} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{B.7.484}$$

Passiamo infine a dimostrare che T lascia invarianti le equazioni del moto del campo di Dirac libero.
Questo, poiché abbiamo già dimostrato che T è compatibile con l'algebra del campo, garantisce che T sia una simmetria conservata per il campo libero.

La regola fin qui usata era quella di riscrivere la densità lagrangiana per i campi trasformati e verificare che essa aveva la stessa forma di quella di partenza. C'è però ora una novità, rappresentata dal carattere antiunitario di T: essa agisce non solo sui campi, ma anche sui coefficienti complessi che possono comparire nella densità lagrangiana !
Ricordiamo che la densità lagrangiana di partenza è

$$\mathcal{L}(x) = \frac{i}{2}\left[\bar{\psi}\,\gamma^\mu\,(\partial_\mu\psi) - (\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi\right] - m\,\bar{\psi}\psi \tag{B.7.489}$$

La trasformazione T, per quanto visto e detto precedentemente, è dunque tale che

$$T: \quad x \equiv (x^0,\vec{x}) \to Tx \equiv x' \equiv (-x^0,\vec{x}) \Leftrightarrow \partial_\mu = -\partial'^{\mu} \tag{B.7.490}$$
$$\psi(x) \to \psi_T(x) = \gamma^1\gamma^3\,\psi(Tx) \Leftrightarrow \psi(x) = \gamma^3\gamma^1\,\psi_T(Tx) \tag{B.7.491}$$
$$\bar{\psi}(x) \to \bar{\psi}_T(x) = \bar{\psi}(Tx)\gamma^3\gamma^1 \Leftrightarrow \bar{\psi}(x) = \bar{\psi}_T(Tx)\gamma^1\gamma^3 \tag{B.7.492}$$
$$i \to -i \tag{B.7.493}$$
$$\gamma^\mu \to \gamma^{*\mu} \tag{B.7.494}$$
$$m \to m \tag{B.7.495}$$

L'invarianza in valore della densità lagrangiana ci dice quindi che i campi ψ_T e $\bar{\psi}_T$ soddisfano le equazioni del moto che si ottengono dalla densità lagrangiana $\mathcal{L}(x)$, sostituendovi alle quantità non $T-$trasformate quelle $T-$trasformate, cioè

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_T(x') \;&=\; -\frac{i}{2}\left\{\bar{\psi}_T(x')\gamma^1\gamma^3\gamma^{*\mu}[-\partial'^{\mu}\,\gamma^3\gamma^1\psi_T(x')] - [-\partial'^{\mu}\bar{\psi}_T(x')]\gamma^1\gamma^3\gamma^{*\mu}\gamma^3\gamma^1\psi_T(x')\right\} - \\ &-m\,\bar{\psi}_T(x')\gamma^1\gamma^3\gamma^3\gamma^1\psi_T(x')\end{aligned} \tag{B.7.496}$$

Ricordiamo adesso che $(\gamma^0)^2 = -(\gamma^1)^2 = -(\gamma^3)^2 = I$ e che γ^0 anticommuta con γ^1 e γ^3, per cui, dalla (B.7.451) e (B.7.458) abbiamo

$$\begin{aligned}&\gamma^0\,\gamma^{*\mu}\,\gamma^1\,\gamma^3\,\gamma^0 = \gamma^1\,\gamma^3\,\gamma^0\,\gamma_\mu\,\gamma^0 \quad \Rightarrow \quad \gamma^0\,\gamma^{*\mu}\,\gamma^1\,\gamma^3 = \gamma^1\,\gamma^3\,\gamma^0\,\gamma_\mu \\ &\Rightarrow \gamma^{*\mu}\,\gamma^1\,\gamma^3 = \gamma^0\,\gamma^1\,\gamma^3\,\gamma^0\,\gamma_\mu = \gamma^1\,\gamma^3\,\gamma_\mu \quad \Rightarrow \gamma^{*\mu}\,\gamma^3\,\gamma^1 = \gamma^3\,\gamma^1\,\gamma_\mu \\ &\Rightarrow \gamma^1\,\gamma^3\,\gamma^{*\mu}\,\gamma^3\,\gamma^1 = \gamma_\mu\end{aligned} \tag{B.7.497}$$

e quindi

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x') \;&=\; \frac{i}{2}\left\{\bar{\psi}_T(x')\,\gamma_\mu\left(\partial'^{\mu}\psi_T(x')\right) - \left(\partial'^{\mu}\bar{\psi}_T(x')\right)\gamma_\mu\,\psi_T(x')\right\} - \\ &-\; m\,\bar{\psi}_T(x')\,\psi_T(x')\end{aligned} \tag{B.7.498}$$

che prova l'invarianza in forma della densità lagrangiana di Dirac sotto T e quindi, finalmente, che T è effettivamente una simmetria conservata per il campo di Dirac libero. Siccome si è visto che, sotto T, la corrente si trasforma in modo che il termine che descrive l'interazione con il campo elettromagnetico sia invariante, cioè

$$J_\mu(x)\, A^\mu(x) \xrightarrow{T} J^\mu(x')\, A_\mu(x') \tag{B.7.499}$$

resta così confermato che essa è anche una simmetria conservata nel caso di interazione elettromagnetica con la corrente prodotta dal campo spinoriale.