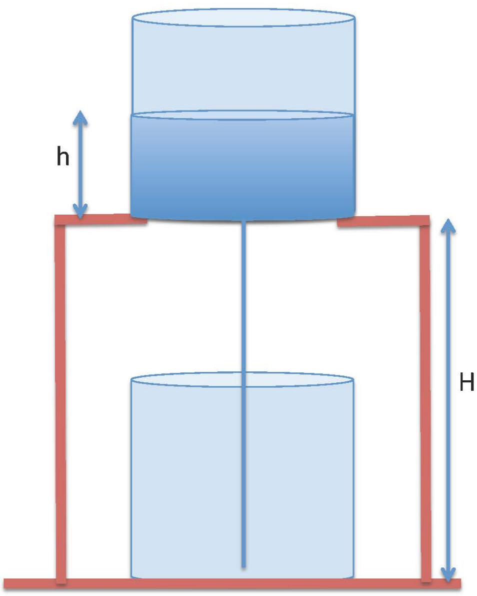
Peso di due secchi d'acqua comunicanti

18 aprile 2022

Consideriamo un sistema costituito da due mastelli cilindrici che supporremo, per semplicità, uguali e di sezione S, disposti uno sopra l'altro a un'altezza H.



Supponiamo che nel mastello superiore sia presente dell'acqua, fino a un'altezza h_0 dal suo fondo.
Indichiamo con M la massa complessiva costituita dai due mastelli e dal supporto che li mantiene sovrapposti e indichiamo con $m_0 = \rho\, S\, h_0$ la massa dell'acqua nel mastello superiore (ρ è la densità dell'acqua).
Evidentemente, in queste condizioni, il peso complessivo del sistema vale

$$P_0 = (M + m_0)g \tag{1}$$

Supponiamo adesso che al tempo $t = 0$ venga aperto, sul fondo del mastello superiore, un piccolo foro di sezione $\sigma << S$.
Per la legge di Torricelli, dal mastello inizierà allora a cadere acqua alla velocità

$$v_0 = \sqrt{2g\,h_0} = \sqrt{2g\frac{m_0}{\rho S}} \tag{2}$$

Poiché il livello dell'acqua nel mastello scenderà, questa velocità diminuirà nel tempo, risultando

$$v(t) = \sqrt{2g\,h(t)} = \sqrt{2g\frac{m(t)}{\rho S}} \tag{3}$$

dove $h(t)$ indica l'altezza dell'acqua nel mastello superiore, mentre $m(t)$ indica la massa residua dell'acqua presente in esso al tempo t.

Iniziamo considerando quello che accade durante il transiente iniziale.
Se la distanza H fra i due mastelli risulta tale che $\sigma H << S\,h$, possiamo assumere che durante l'intervallo di tempo τ_0, necessario all'acqua per arrivare nel secondo mastello, la sua velocità di uscita si mantenga costante e, come abbiamo detto, pari a $v_0 = \sqrt{2g\,h_0}$.
Durante la caduta, assumendo assenza di attrito, l'acqua seguirà un moto uniformemente accelerato e, per raggiungere la base del secondo mastello, il tempo τ_0 è dato dalla soluzione positiva dell'equazione

$$v_0\tau_0 + \frac{1}{2}\,g\,\tau_0^2 = H \tag{4}$$

ovvero

$$\tau_0 = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gH}}{g} \tag{5}$$

Durante questo intervallo di tempo, la massa d'acqua presente nel mastello superiore diminuirà a ritmo costante e avremo

$$0 \le t \le \tau_0 : \qquad m(t) = m_0 - \rho\,\sigma\,v_0\,t \tag{6}$$

Fra 0 e τ_0, il peso complessivo del sistema diminuirà per due ragioni.
La prima ragione è semplicemente legata al fatto che la massa di acqua nel mastello superiore diminuisce nel tempo senza che ci sia ancora accumulazione della stessa nel mastello inferiore.
La seconda ragione è legata alla conservazione dell'impulso: l'acqua che fuoriesce nel tempo dt porta via un impulso

$$dp = dm\,v_0 = \rho\,\sigma\,v_0 dt\,v_0 = \rho\,\sigma\,v_0^2\,dt = \rho\,\sigma\,2gh_0\,dt \tag{7}$$

La conservazione dell'impulso implica che il mastello riceva un impulso uguale e opposto, che si traduce in una forza verso l'alto di intensità pari a

$$\frac{dp}{dt} = \rho\sigma\, v_0^2 = 2h_0\, g\, \rho\, \sigma \tag{8}$$

In totale, avremo dunque che il peso del sistema, per $0 \le t < \tau_0$, sarà dato da

$$\begin{aligned} P(t) &= g\,[M + m(t) - 2\rho\,\sigma\, h_0] = g\,[M + m_0 - \rho\sigma v_0 t - 2\rho\sigma h_0] = \\ &= g\left[M + m_0 - \rho\sigma v_0 t - \rho\sigma\,\frac{v_0^2}{g}\right] = g\left[M + m_0 - \rho\sigma v_0\left(t + \frac{v_0}{g}\right)\right] = \\ &= g(M + m_0) - \sigma\rho v_0(v_0 + gt) \end{aligned} \tag{9}$$

Questo risultato vale per $0 \le t < \tau_0$: il peso del sistema raggiunge il suo valore minimo per $t = \tau_{0-}$, quando si ha

$$\begin{aligned} P(\tau_{0-}) &= g(M + m_0) - g\,\rho\,\sigma\, v_0\, \tau_0 - \rho\,\sigma\, v_0^2 = \\ &= g(M + m_0) - \rho\sigma v_0^2 - \rho\sigma v_0\left(-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gH}\right) = \\ &= g(M + m_0) - \rho\sigma v_0\sqrt{v_0^2 + 2gH} \end{aligned} \tag{10}$$

Per fissare le idee, consideriamo il caso concreto in cui

$$\rho = 1\, g/cm^3 \tag{11}$$
$$H = 100\, cm \tag{12}$$
$$h_0 = 20\, cm \tag{13}$$
$$S = 500\, cm^2 \tag{14}$$
$$\sigma = 1\, cm^2 \tag{15}$$

da cui discende che

$$m_0 = \rho\, S\, h_0 = 1 \times 500 \times 20 = 10^4\, g \ \Rightarrow\ m_0 g \approx 10^7\, dyne \tag{16}$$
$$v_0 = \sqrt{2gh_0} = \sqrt{2 \times 1000 \times 20} = 200\, cm/s \tag{17}$$
$$\tau_0 = \tau_0 = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gH}}{g} = \frac{-200 + \sqrt{4 \times 10^4 + 2 \times 1000 \times 100}}{1000} \approx 0.29\, s \tag{18}$$

e dunque il termine che si sottrae nella (10) al peso statico della massa d'acqua di cui alla (16), di $m_0 g = 10^7\, dyne$, vale

$$\rho\sigma v_0\sqrt{v_0^2 + 2gH} = 1 \times 1 \times 200 \times \sqrt{4 \times 10^4 + 2 \times 1000 \times 100} \approx 10^5\, dyne \tag{19}$$

Si tratta, quindi, dell' 1% ...

Torniamo adesso al problema iniziale.
Al tempo $t = \tau_0$ l'acqua inizierà a raccogliersi nel mastello inferiore dove, per $t = \tau_0$, giungerà con una velocità pari a

$$w = v_0 + g\,\tau_0 = v_0 + g\left(\frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gH}}{g}\right) = \sqrt{v_0^2 + 2gH} \tag{20}$$

Fra τ_0 e $\tau_0 + dt$ arriverà la massa fuoriuscita fra 0 e dt, ovvero

$$dm = \rho\,\sigma\,v_0\,dt \tag{21}$$

e questa acqua possiede un impulso

$$dp = dm\,w = \rho\,\sigma\,v_0\;w\,dt \tag{22}$$

che viene assorbito dal mastello inferiore, il quale, dunque, subirà una forza verso il basso pari a

$$\frac{dp}{dt} = \rho\,\sigma\,v_0\,w \tag{23}$$

Per sostenere il sistema dei due mastelli al tempo $t = \tau_{0+}$, servirà dunque bilanciare una forza (peso) complessiva pari a

$$\begin{aligned} P(\tau_{0+}) &= g\left[M + m_0 - \rho\sigma v_0\left(\tau_0 + \frac{v_0}{g}\right)\right] + \rho\,\sigma\,v_0\,w = \\ &= g(M + m_0) - g\rho\sigma v_0\tau_0 - \rho\sigma v_0^2 + \rho\sigma v_0 w = \\ &= g(M + m_0) + \rho\sigma v_0(w - g\tau_0 - v_0) = \\ &= g(M + m_0) \end{aligned} \tag{24}$$

La forza peso del sistema risulta quindi essere *discontinua* per $t = \tau_0$ e, per $t = \tau_{0+}$ essa coincide con quella *statica*.

Vediamo ora come cambia questo risultato quando teniamo conto della variazione nel tempo della velocità di uscita $v = v(t)$ dell'acqua dal foro nel mastello.

Iniziamo determinando la legge di variazione della velocità di uscita $v(t)$.
Abbiamo

$$v^2(t) = 2g\,h(t) = 2g\frac{m(t)}{\rho S} \tag{25}$$

Differenziando si ha

$$\begin{aligned} 2v\,dv &= \frac{2g}{\rho S}\,dm = -\frac{2g}{\rho S}\,\rho\sigma v\,dt \quad\Rightarrow\quad v\,dv = -\frac{g\sigma}{S}\,v\,dt \\ &\Rightarrow\quad dv = -\frac{g\sigma}{S}\,dt \end{aligned} \tag{26}$$

Ponendo allora

$$A \equiv g\,\frac{\sigma}{S} \tag{27}$$

e tenendo conto che per $t = 0$ $v(0) = v_0$, abbiamo

$$v(t) = v_0 - A\,t \tag{28}$$

Facendo uso di questa dipendenza temporale della velocità di uscita, durante il transiente iniziale per $0 \leq t < \tau_0$, la massa d'acqua nel mastello superiore diminuirà in modo che

$$dm = -\rho\sigma\,v\,dt = -\rho\sigma(v_0 - At)dt \;\;\Rightarrow\;\; m(t) = m_0 - \rho\sigma v_0 t + \rho\sigma\frac{A}{2}t^2 \tag{29}$$

da confrontare con la (6), dove il termine quadratico nel tempo è assente.
Come sappiamo, oltre alla diminuzione di peso legata all'acqua in caduta libera, occorre considerare anche l'effetto legato alla conservazione dell'impulso.
Per $0 \leq t < \tau_0$, l'acqua che cade, non ancora arrivata nel secondo mastello, porta con sé un impulso

$$dp(t) = dm(t)\,v(t) = -\rho\,\sigma\,v(t)\,dt\,v(t) \equiv -\rho\sigma\,v^2(t)\,dt \tag{30}$$

che, sul sistema dei due mastelli, dà luogo a una forza contraria alla forza peso, cioè diretta verso l'alto, di modulo pari a

$$\left|\frac{dp}{dt}\right| = \rho\sigma v^2(t) = \rho\sigma(v_0 - At)^2 \tag{31}$$

da confrontare con la (8).

In totale, il peso del sistema per $0 \leq t < \tau_0$ sarà dato, dunque, da

$$\begin{aligned}
P(t) &= g\,[M - m(t)] - \rho\sigma(v_0 - At)^2 = \\
&= g\left[M + m_0 - \rho\sigma v_0\,t + \rho\sigma\frac{A}{2}t^2\right] - \rho\sigma\left[v_0^2 - 2v_0At + A2t^2\right] = \\
&= g(M + m_0) - g\rho\sigma v_0 t + g\rho\sigma\frac{A}{2}t^2 - \rho\sigma v_0^2 + 2\rho\sigma v_0 At - \rho\sigma A^2t^2 = \\
&= g(M + m_0) - \rho\sigma v_0(gt + v_0 - 2At) + \rho\sigma At^2\left(\frac{g}{2} - A\right) = \\
&= g(M + m_0) - \sigma\rho v_0(v_0 + gt) + \sigma\rho\,At\left[2v_0 + t\left(\frac{g}{2} - A\right)\right] \qquad (32)
\end{aligned}$$

da confrontare con la (9), con la quale coincide per $At = 0$, ovvero nel limite in cui non consideriamo il cambiamento di velocità dell'acqua in uscita.

Per $t = \tau_{0+}$ si aggiungerà la forza dovuta all'urto del flusso d'acqua che raggiunge la base del secondo mastello con velocità w.
Come si è visto (cfr(23)), questa forza vale

$$\frac{dp}{dt} = \sigma\rho\, v_0\, w \tag{33}$$

dove w è data dalla (20)

$$w = v_0 + g\,\tau_0 \tag{34}$$

Dunque, per $t = \tau_{0+}$, la forza peso del sistema diviene

$$\begin{aligned} P(\tau_{0+}) &= g(M+m_0) - \sigma\rho v_0(v_0+g\tau_0) + \sigma\rho\, A\tau_0\left[2v_0 + \tau_0\left(\frac{g}{2} - A\right)\right] + \sigma\rho v_0(v_0+g\tau_0) = \\ &= g(M+m_0) + \sigma\rho\, A\tau_0\left[2v_0 + \tau_0\left(\frac{g}{2} - A\right)\right] \end{aligned} \tag{35}$$

Nel caso numerico già illustrato, risulta

$$A = g\frac{\sigma}{S} \approx 1000 \times \frac{1}{500} = 2\,cm/s^2 \quad \Rightarrow \quad A\tau_0 = 0.58\,cm/s \tag{36}$$

e la correzione al peso, dovuta alla variazione della velocità di uscita, vale

$$\sigma\rho\, A\tau_0\left[2v_0 + \tau_0\left(\frac{g}{2} - A\right)\right] = 1 \times 1 \times 0.58\,[400 + 0.29(500-2)] \approx 316\,dyne \tag{37}$$

da confrontare con il peso dell'acqua che abbiamo visto essere di circa $10^7\,dyne$.

Occupiamoci adesso di vedere che succede durante lo svuotamento del mastello superiore, per tempi successivi a τ_0.
Abbiamo visto che la velocità di uscita è data da

$$v(t) = v_0 - A\,t = \sqrt{2g\,h(t)} \tag{38}$$

Evidentemente il tempo T di svuotamento totale del mastello sarà definito dalla condizione

$$h(T) = 0 \quad \Rightarrow \quad v(T) = 0 \tag{39}$$

ovvero[1]

$$T = \frac{v_0}{A} = \frac{S}{\sigma}\sqrt{\frac{2h_0}{g}} \tag{40}$$

Allo scopo di determinare il peso del sistema dei due mastelli quando $\tau_0 < t < T$, è bene puntualizzare che, durante questo tempo, avremo

[1] Nel caso che stiamo considerando, essendo $A = 2\,cm/s^2$ e $v_0 = 200\,cm/s$, risulta $T = 100\,s$.

- una massa residua $m(t)$

$$\begin{aligned} m(t) &= \rho S\, h(t) = \rho\, S \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\sigma}{S}\right)^2 g\, t^2 - \frac{\sigma}{S} \sqrt{2gh_0}\, t + h_0 \right] = \\ &= m_0 - \rho\, \sigma \sqrt{2gh_0}\, t + \rho\, \frac{\sigma^2}{2S}\, g\, t^2 = m_0 - \rho\sigma\, v_0\, t + \rho\sigma \frac{At^2}{2} \end{aligned} \tag{41}$$

  nel mastello superiore;

- una massa d'acqua $\mu(t) \equiv S\, \tilde{h}(t)$ nel mastello inferiore;

- una "colonna" d'acqua $C(t)$, alta $H = H_0 - \tilde{h}(t)$, in caduta libera dal primo al secondo mastello.
  Poiché quest'acqua non sarà uscita dal foro tutta al tempo t, la velocità di fuoriuscita non è la stessa per tutta l'acqua della colonna.

La conservazione della massa d'acqua implica naturalmente che

$$m(t) + \mu(t) + C(t) = m_0 \quad \Rightarrow \quad \mu(t) + C(t) = \rho\, \sigma\, v_0 \cdot t - \rho\sigma\, \frac{At^2}{2} \tag{42}$$

Vediamo di esplicitare meglio $\mu(t)$ e $C(t)$.
Iniziamo osservando che il tempo di caduta τ *non* è costante poiché la velocità di uscita dal mastello superiore diminuisce nel tempo e inoltre, nel mastello inferiore, il livello dell'acqua $\tilde{h}(t)$ cresce, riducendo così il dislivello di caduta libera.
Indichiamo con $\tau = \tau(t)$ questa quantità. Abbiamo

$$\begin{aligned} C(t) &= \sigma\, \rho \int_{t-\tau}^{t} v(y)\, dy = \sigma\, \rho \int_{t-\tau}^{t} \left(-\frac{g\sigma}{S}\, y + \sqrt{2g\, h_0} \right) dy = \\ &= -g\rho \frac{\sigma^2}{S}\, \frac{1}{2} \left(t^2 - (t-\tau)^2 \right) + \sigma\rho\sqrt{2gh_0}\, \tau = \\ &= -g\rho \frac{\sigma^2}{S} \frac{1}{2} \left(2t\tau - \tau^2 \right) + \sigma\rho\sqrt{2gh_0}\, \tau = \\ &= \tau\, \sigma\, \rho \left[\sqrt{2gh_0} - \frac{\sigma}{S}\, gt \right] + g\, \rho \frac{\sigma^2}{2S}\, \tau^2 = \\ &= \rho\sigma\tau\, v(t) + \frac{g\sigma}{S}\, \rho\sigma\tau\, \frac{\tau}{2} = \rho\sigma\tau(v_0 - At) + A\, \rho\sigma\tau\, \frac{\tau}{2} = \\ &= \rho\sigma\tau \left(v_0 - At + \frac{A\tau}{2} \right) \end{aligned} \tag{43}$$

Analogamente risulta[2]

$$
\begin{aligned}
\mu(t) &= \sigma\,\rho \int_0^{t-\tau} v(y)\,dy = \sigma\,\rho \int_0^{t-\tau} (v_0 - Ay)\,dy = \\
&= \sigma\,\rho \left[v_0 \cdot (t-\tau) - A\frac{(t-\tau)^2}{2} \right] = \sigma\rho(t-\tau) \left[v_0 - \frac{A}{2}(t-\tau) \right] \qquad (45)
\end{aligned}
$$

Veniamo adesso alla determinazione del peso complessivo $P(t)$ del sistema al tempo t.
La sua prima componente $P1(t)$ riguarda la massa d'acqua presente nei due mastelli. Abbiamo

$$
\begin{aligned}
P1(t) &= g\,[m(t) + \mu(t)] = g\,[m_0 - C(t)] = \\
&= g \left[m_0 - \rho\sigma\tau \left(v_0 - At + \frac{A\tau}{2} \right) \right] = \\
&= g\,m_0 - \sigma\rho\,g\,v_t\,\tau - \sigma\rho g\,A\frac{\tau^2}{2} \qquad (46)
\end{aligned}
$$

dove abbiamo indicato con v_t la velocità di uscita dell'acqua dal mastello superiore al tempo t.
La seconda componente $P2(t)$ della forza nasce dalla variazione di impulso che subisce il sistema a causa dell'acqua che cade liberamente, sotto l'azione della gravità. Abbiamo

$$
P2(t)\,dt = -v_t\,dm_t + (v_{t-\tau} + g\tau)\,dm_{t-\tau} \qquad (47)
$$

dove abbiamo indicato con dm_x la massa infinitesima di acqua fuoriuscita fra x e $x + dx$. Poiché

$$
dm_x = \sigma\rho\,v_x\,dt \qquad (48)
$$

possiamo concludere che

$$
P2(t) = -v_t\,\sigma\rho v_t + (v_{t-\tau} + g\tau)\sigma\rho\,v_{t-\tau} = \sigma\rho\left[v_{t-\tau}^2 - v_t^2 + g\tau\,v_{t-\tau}\right] \qquad (49)
$$

Dunque, quanto al peso dell'intero sistema, risulta

$$
\begin{aligned}
P(t) \equiv P1(t) + P2(t) &= g\,m_0 - \sigma\rho\,g\,v_t\,\tau - \sigma\rho g\,A\frac{\tau^2}{2} + \\
&+ \sigma\rho\left[v_{t-\tau}^2 - v_t^2 + g\tau\,v_{t-\tau}\right] \qquad (50)
\end{aligned}
$$

[2]Si osservi che, come deve essere per la (42), abbiamo che

$$
\begin{aligned}
\mu(t) + C(t) &= \rho\sigma(t-\tau)\left[v_0 - \frac{A}{2}(t - tau)\right] + \rho\sigma\tau\left[v_0 - At + \frac{A\tau}{2}\right] = \\
&= v_0\,[\rho\sigma(t-\tau) - \rho\sigma\tau] + A\sigma\rho\left[-\frac{(t-\tau)^2}{2} - \tau t + \frac{\tau^2}{2}\right] = \\
&= v_0\,\sigma\rho\,t + A\sigma\rho\left[-\frac{t^2}{2} + t\tau - \frac{\tau^2}{2} - t\tau + \frac{\tau^2}{2}\right] = \sigma\rho\left[v_0\,t - A\frac{t^2}{2}\right] \qquad (44)
\end{aligned}
$$

ovvero

$$P(t) = g\, m_0 + \sigma\rho g\tau(v_{t-\tau} - v_t) + \sigma\rho\left[(v_{t-\tau}^2 - v_t^2) - Ag\frac{\tau^2}{2}\right] \tag{51}$$

Ma dalla (28) risulta

$$\begin{aligned} v_{t-\tau} - v_t &= A\tau & (52)\\ v_{t-\tau}^2 - v_t^2 &= (v_{t-\tau} - v_t)(v_{t-\tau} + v_t) = A\tau\,(2v_0 - 2At + A\tau) & (53) \end{aligned}$$

e dunque

$$\begin{aligned} P(t) &= gm_0 + \sigma\rho g\tau\, A\tau + \sigma\rho\left[A\tau(2v_0 - At + A\tau) - A\tau\frac{g\tau}{2}\right] = \\ &= gm_0 + A\tau\left[\sigma\rho g\tau + \sigma\rho(2v_0 - At + A\tau) - \sigma\rho\frac{g\tau}{2}\right] = \\ &= gm_0 + A\tau\,\sigma\rho\left[\frac{g\tau}{2} + 2v_0 - 2At + A\tau\right] & (54) \end{aligned}$$

Si osservi che per $t = \tau_0$, ritroviamo il risultato di cui alla (35), infatti si ha

$$\begin{aligned} P(\tau_0) &= gm_0 + A\tau_0\,\sigma\rho\left[\frac{g\tau_0}{2} + 2v_0 - 2A\tau_0 + A\tau_0\right] = \\ &= g(M + m_0) + \sigma\rho\, A\tau_0\left[2v_0 + \tau_0\left(\frac{g}{2} - A\right)\right] & (55) \end{aligned}$$

Infine, quanto accade nel transiente finale, ovvero fra quando l'ultima acqua ha lasciato il mastello superiore e quando essa arriva su quello inferiore, lo lasciamo al lettore !