Moto di un razzo

18 aprile 2022

Consideriamo il moto di un razzo in un riferimento inerziale e in assenza di gravità. Assumiamo che il razzo espella una quantità di massa $dm/dt = \lambda$ costante, a velocità $\vec{v}_0$ rispetto al razzo, anch'essa costante nel tempo.

Assumiamo che, al tempo $t = 0$, quando inizia il moto, il razzo sia fermo nel riferimento inerziale in cui abbiamo deciso di studiarne il moto.

Sia M_0 la massa iniziale del razzo e indichiamo con $\vec{V}(t)$ la sua velocità al tempo t che, date le condizioni iniziali e la legge del moto, potremo assumere sempre diretta nel verso positivo dell'asse x .

E' evidente che il processo di espulsione della massa descritto sopra potrà avvenire solo per un tempo T tale che $T \leq T_0 = M_0/\lambda$, dove T_0 corrisponde all'espulsione di tutta la massa del razzo stesso.

Al tempo t , la componente x dell'impulso del razzo (l'unica rilevante ...) sarà

$$P(t) = M(t) V(t) \quad (1)$$

e al tempo $t + dt$ sarà

$$P(t + dt) = (M(t) - \lambda dt)V + M(t) dV + \lambda dt(V - v_0) \quad (2)$$

dunque avremo una variazione dell'impulso del sistema data da

$$dP = P(t + dt) - P(t) = M dV - \lambda dt v_0 \quad (3)$$

il quale, trattandosi di un sistema isolato, deve essere nullo. Dunque

$$M dV = \lambda v_0 dt \quad (4)$$

Ma $M = M_0 - \lambda t$, quindi

$$(M_0 - \lambda t) dV = \lambda v_0 dt \quad \Rightarrow \quad \frac{dV}{V_0} = \frac{\lambda dt}{M_0 - \lambda t} \quad (5)$$

che, integrata, fornisce

$$\frac{V(t)}{V_0} = -\ln(M_0 - \lambda t) + \text{cost} \quad (6)$$

e dunque, essendo per ipotesi $V = 0$ per $t = 0$, si ha

$$-\ln(M_0) + cost = 0 \Rightarrow cost = \ln(M_0) \quad (7)$$

per cui, per $0 \leq t \leq T \leq T_0$, sarà

$$\frac{V(t)}{V_0} = -\ln(M_0 - \lambda t) + \ln(M_0) \Rightarrow V(t) = V_0 \ln\left(\frac{M_0}{M_0 - \lambda t}\right) \quad (8)$$

Cessata l'espulsione della massa, per $t > T$, la velocità del razzo resterà poi costante e pari¹ a

$$V(t) = V_0 \ln\left(\frac{M_0}{M_0 - \lambda T}\right) \quad (9)$$

¹Si ricordi che, per ipotesi, $T \leq T_0 = M_0/\lambda$ e dunque $M_0 - \lambda T \geq 0$.