Velocità di fuoriuscita di un proiettile di fucile

10 aprile 2022

Iniziamo schematizzando la canna del fucile come un cilindro lungo $L+H$, avente sezione interna S e sia M la massa del fucile.
Supponiamo poi che il proiettile abbia invece massa m e possa anch'esso essere schematizzato come un cilindro di altezza h e sezione S, in grado di scorrere nella canna del fucile senza attrito.
Infine, la camera dove avviene lo scoppio della carica esplosiva sia lunga H.
Immaginiamo che al tempo $t = 0$, nella camera dove è avvenuto lo scoppio,

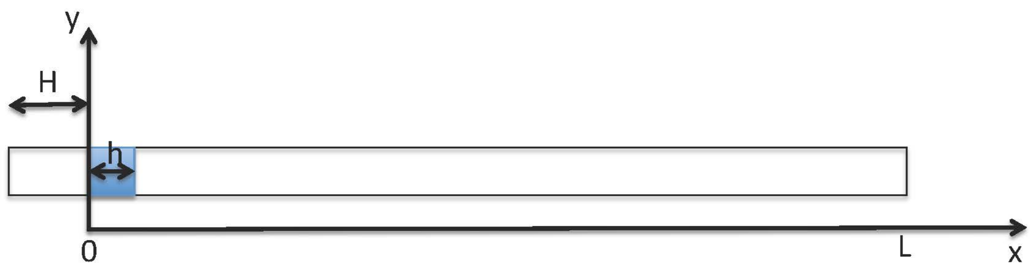

Figura 1: *Schema della canna del fucile carica*

sia presente un gas perfetto monoatomico alla temperatura T_0 e alla pressione P_0. Evidentemente, dalla legge dei gas perfetti, sarà

$$PV = nRT \quad \Rightarrow \quad P_0 H\, S = n\, R\, T_0 \tag{1}$$

Sul fondo del proiettile si eserciterà una pressione $P(x)$ e dunque, trascurando la presenza della pressione atmosferica, una forza che in modulo è pari a

$$F(x) = S\, P(x) \qquad con \;\; 0 \leq x \leq L \tag{2}$$

Questa forza è quella che determina l'accelerazione del proiettile e quindi la sua fuoriuscita.

Se assumiamo che il gas subisca una trasformazione adiabatica[1] e dunque anche che non ci sia attrito del proiettile sulla superficie interna del fucile, il lavoro fatto dalla forna $F(x)$ andrà tutto in energia cinetica del proiettile[2] e dunque avremo che

$$\frac{1}{2}\, m\, v^2(x) = \int_0^x d\xi\, S\, P(\xi) = S \int_0^x d\xi\, P(\xi) \tag{4}$$

Ma se il gas subisce una trasformazione adiabatica risulta che

$$P\, V^\gamma = P_0\, V_0^\gamma \equiv K \quad con\ \gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{5}{3} \tag{5}$$

dove K è dunque costante durante la trasformazione adiabatica e il valore di γ è quello del gas monoatomico. Dunque

$$P(\xi) = \frac{K}{V(\xi)^\gamma} \tag{6}$$

ma

$$V(\xi) = S(H + \xi) \quad \Rightarrow \quad P(\xi) = \frac{K}{S^\gamma (H + \xi)^\gamma} \tag{7}$$

Ponendo per comodità

$$A \equiv \frac{K}{S^\gamma} = \frac{P_0 V_0^\gamma}{S^\gamma} = \frac{P_0\, S^\gamma H^\gamma}{S^\gamma} = P_0\, H^\gamma \tag{8}$$

possiamo scrivere che

$$P(\xi) = \frac{A}{(H + \xi)^\gamma} \tag{9}$$

e dunque, quanto alla velocità di uscita del proiettile v_u, abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\, m\, v^2(u) &= S \int_0^L d\xi\, \frac{A}{(H+\xi)^\gamma} = S\, A \int_0^L d\xi\, \frac{1}{(H+\xi)^\gamma} = \\ &= S\, A\, \frac{1}{1-\gamma}\, (H+\xi)^{1-\gamma} \Big|_0^L = \frac{S\, A}{1-\gamma} \left[(H+L)^{1-\gamma} - H^{1-\gamma} \right] \end{aligned} \tag{10}$$

---

[1] Questa ipotesi è certamente molto approssimata quando la velocità di fuoriuscita del proiettile sia confrontabile con la velocità del suono v_s nel gas presente all'interno della canna del fucile. Ricordiamo che, in un gas perfetto all'equilibrio termodinamico (ma il gas nel fucile non lo è ...), la velocità del suono è tale che

$$v_s^2 = \gamma \frac{kT}{\mu} \tag{3}$$

dove k è la costante di Boltzmann ($k = 1,38 \times 10^{-23}\, J/K$), mentre μ è la massa del gas monoatomico considerato.
Assumendo, per fissare le idee, $T = 1500\,^0K$ e $\mu = 50\, m_{prot} \approx 8 \times 10^{-26}\, kg$, abbiamo $v_s \approx 800\, m/s$.

[2] Qui stiamo assumendo che la massa del fucile sia molto maggiore di quella del proiettile e che non ci sia rinculo del fucile stesso.

ovvero, ponendo

$$\chi \equiv \frac{L}{H} \tag{11}$$

abbiamo

$$\frac{1}{2}\, m\, v_u^2 = \frac{S\, A\, H^{1-\gamma}}{1-\gamma}\left[(1+\chi)^{1-\gamma} - 1\right] \tag{12}$$

Ma

$$S\, A\, H^{1-\gamma} = S\; P_0 H^{\gamma}\; H^{1-\gamma} = S\, P_0\, H = P_0\, V_0 \tag{13}$$

e dunque, ricordando che $\gamma = \frac{5}{3}$, si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\, m\, v_u^2 &= P_0\, V_0\, \frac{1}{\gamma - 1}\left[1 - \frac{1}{(1+\chi)^{\gamma-1}}\right] = P_0\, V_0\, \frac{3}{2}\left[1 - \frac{1}{(1+\chi)^{\frac{2}{3}}}\right] = \\ &= \frac{3}{2}\left[P_0 V_0 - P_u V_u\right] \end{aligned} \tag{14}$$

dove P_u e V_u sono, rispettivamente, la pressione e il volume del gas al momento della fuoriuscita del proiettile.
Poiché l'energia interna di un gas perfetto è data da

$$U = n\, C_v\, T = n\, \frac{3}{2}\, R\, T = \frac{3}{2}\, n\, R\, T = \frac{3}{2}\, P\, V \tag{15}$$

l'espressione trovata sopra traduce semplicemente la conservazione dell'energia che, in assenza di calore e lavoro dall'esterno, implica che l'energia cinetica del proiettile debba coincidere con il cambiamento di energia interna del gas in espansione adiabatica. Ovviamente, la massima energia cinetica possibile del proiettile si ottiene quando $\chi >> 1$ ovvero quando $L >> H$, nel qual caso

$$\frac{1}{2}\, m\, v_u^2 = \frac{3}{2}\, P_0\, V_0 \tag{16}$$

Nella figura rappresentata sotto sono riportati l'andamento dell'energia cinetica e della velocità del proiettile in funzione di $\chi = x/H$, normalizzati al valore asintotico fatto uguale a 1.

Venendo ora alla temperatura, ricordiamo che in gas perfetto che segue un'adiabatica, per la (1) e (5) risulta che

$$T\, V^{\gamma-1} = cost \tag{17}$$

e dunque

$$T_0 V_0^{\gamma-1} = T_u V_u^{\gamma-1} \;\; \Rightarrow \;\; T_u = T_0 \left(\frac{V_0}{V_u}\right)^{\gamma-1} = T_0 \left(\frac{H}{H+L}\right)^{\gamma-1} = T_0 \frac{1}{(1+\chi)^{\gamma-1}} \tag{18}$$

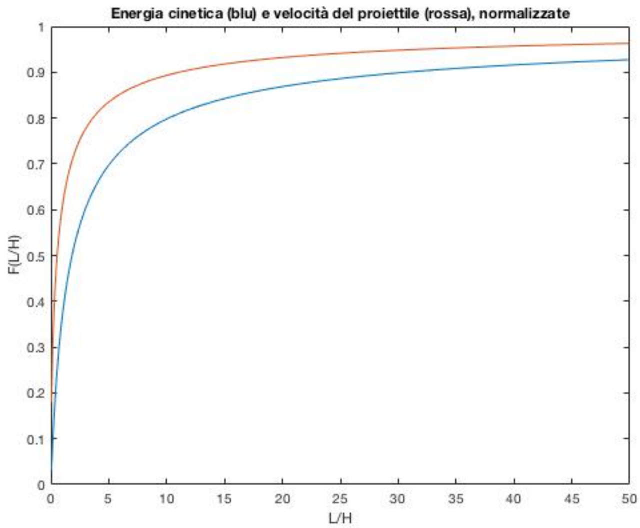

Figura 2: *Energia cinetica e velocità del proiettile, normalizzate*

Questo consente di riscrivere la (14) anche nel modo seguente

$$\frac{1}{2}\,m\,v_u^2 = \frac{3}{2}\,P_0 V_0 \left[1 - \frac{T_u}{T_0}\right] = \frac{3}{2}\,P_0 V_0\,\frac{T_0 - T_u}{T_0} \tag{19}$$

Esempio

Consideriamo, come esempio, un fucile Mauser il quale ha una canna lunga $L = 610\,mm$, un calibro di $7,92\,mm$ e una cartuccia lunga $57\,mm$.
La velocità di uscita del proiettile è di circa $v_u = 500\,m/s$.
Ipotizziamo una camera di scoppio pari a circa metà cartucccia, ovvero lunga $30\,mm$. Poiché la sezione della canna, dato il calibro, è di circa $50\,mm^2$, ecco che il volume V_0 della camera di scoppio sarà di circa $30 \times 50 = 1500\,mm^3 = 1.5 \times 10^{-6} m^3$. Assumendo che il proiettile sia lungo invece $25\,mm$, esso avrà un volume di circa $1250\,mm^3 = 1.25\,cm^3$ e quindi una massa m (assumendo sia sagomato come di solito è fatto un proiettile e sia di piombo) di circa $10\,g$.
L'energia cinetica del proiettile all'uscita del fucile è dunque pari a

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\,m\,v_u^2 \approx 1250\,J \tag{20}$$

Questo significa, poiché $\chi = 610/30 \approx 20$, che dovrà essere $P_0\,V_0 \approx 1000\,J$ e dunque, essendo $V_0 = 1.5 \times 10^{-6}\,m^3$, avremo

$$P_0 = \frac{1000}{1.5 \times 10^{-6}} \approx 6 \times 10^8\,Pa = 6000\,atm \tag{21}$$

L'energia da ricavare nell'esplosione dovrebbe essere $\frac{3}{2}P_0V_0 \approx 1500J$ ma, assumendo un'efficienza del 50%, servirà di produrre circa $3000\,J$: ipotizzando che l'esplosivo sia TNT o simili, poichè l'energia che si ricava nella sua esplosione è di circa $5000\,J/g$, ne serviranno circa $0.6\,g$.

Poichè la massa molare del TNT è di $227\, g/moli$, la quantità di esplosivo richiesta corrisponde a circa $3 \times 10^{-3}\, moli$. La formula chimica del TNT è $C_7H_5(NO_2)_3$ e possiamo quindi presumere che ogni molecola dia luogo a circa 12 molecole fra CO_2, H_2O e NO_2. Dunque il numero di moli di gas perfetto sarà circa pari a $n = 3.5 \times 10^{-2}$ e quindi

$$P_0V_0 = nRT_0 \quad \Rightarrow \quad T_0 = \frac{P_0V_0}{nR} = \frac{1000}{3.5 \times 10^{-2} \cdot 8.31} \approx 3400\, K \tag{22}$$

Poiché $\chi \approx 20$, ecco che, in base alla (18), quanto alla temperatura di uscita, risulta

$$T_u = T_0 \frac{1}{21^{2/3}} \approx 450\, K \tag{23}$$

Infine, quanto alla pressione al momento della fuoriuscita del proiettile, essendo

$$P_u = P_0 \left(fracV_0V_u\right)^{\gamma} = P_0 \left(\frac{H}{H+L}\right)^{\gamma} = P_0 \left(\frac{1}{1+\chi}\right)^{\gamma} \tag{24}$$

risulta

$$P_u \approx 6 \times 10^8 \frac{1}{21^{5/3}} \approx 6 \times 10^8\, \frac{1}{160} \approx 37.5 \times 10^5\, Pa = 37,5\, atm \tag{25}$$