Alcune considerazioni su un filo percorso da corrente

17 aprile 2022

Consideriamo un filo rettilineo, infinitamente lungo e di dimensione trasversa trascurabile e iniziamo supponendo che su di esso sia distribuita una densità lineare di carica λ . Immaginiamo, per comodità che il filo coincida con l'asse z .

Esso genera nello spazio un campo elettrico ortogonale al filo, ovvero nel piano xy , che, detto $\vec{n}$ il versore uscente dal filo e normale a esso, vale¹

$$\vec{E} = \frac{2\lambda}{r} \vec{n} \quad (3)$$

come è facile ottenere attraverso il teorema di Gauss.

Supponiamo adesso di osservare questo stesso filo da un riferimento, che chiameremo $RS1$ per distinguerlo dal precedente che indicheremo con $RS0$, il quale sia in moto rettilineo e uniforme lungo z , con velocità $\vec{v} = (0, 0, v) \equiv v\vec{k}$, essendo $v \equiv |\vec{v}|$ e $\vec{k}$ il versore dell'asse z .

Evidentemente, in $RS1$ il filo, che si trova in quiete in $RS0$, apparirà animato da una velocità orientata nel verso $-\vec{k}$ e di modulo v .

Ricordiamo adesso le leggi di trasformazione del campo elettromagnetico.

Se $\vec{E}'$ e $\vec{B}'$ sono i campi elettrici e magnetici in $RS1$ mentre quelli senza apice sono quelli in $RS0$, allora

$$\vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel}; \quad \vec{E}'_{\perp} = \gamma(\vec{E}_{\perp} + \vec{\beta} \times \vec{B}) \quad (4)$$

$$\vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel}; \quad \vec{B}'_{\perp} = \gamma(\vec{B}_{\perp} - \vec{\beta} \times \vec{E}) \quad (5)$$

dove $\vec{\beta} \equiv \frac{v}{c}\vec{k}$ è la velocità di $RS1$ rispetto a $RS0$, espressa in unità di c e le componenti parallele e perpendicolari dei campi sono valutate, appunto,

¹Useremo il sistema *cgs es* dove le equazioni di Maxwell hanno la forma

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi \rho; \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0; \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2)$$

rispetto alla direzione definita da $\vec{v}$, ovvero da $\vec{k}$.

Nel riferimento *RS0* non c'è campo magnetico e il campo elettrico è ortogonale alla velocità di *RS1*, dunque, anche in questo riferimento *non* avremo componenti dei campi paralleli a z , bensì avremo

$$\vec{E}' = \gamma \vec{E}; \quad \vec{B}' = -\gamma \vec{\beta} \times \vec{E} = -\vec{\beta} \times \vec{E}' \quad (6)$$

per cui, essendo le coordinate trasverse invarianti nella trasformazione fra i due riferimenti e quindi restando le stesse, risulta

$$\vec{E}' = \gamma \frac{2\lambda}{r} \vec{n}; \quad \vec{B}' = -\gamma \frac{2\lambda}{r} \vec{\beta} \times \vec{n} \quad (7)$$

Prima di considerare il campo magnetico comparso in questo riferimento, osserviamo che il campo elettrico ha la stessa forma che nel riferimento *RS0* ma appare moltiplicato per il fattore γ .

Sempre dalle equazioni di Maxwell relative alla divergenza del campo elettrico, è facile concludere che in *RS1* la densità lineare di carica non è più λ come in *RS0*, bensì è diventata $\lambda' = \gamma\lambda$.

Inoltre, poiché questa carica si sta muovendo con velocità $-\vec{v}$, in *RS1* è presente anche una corrente elettrica data da $\vec{j}' = \lambda'(-\vec{v})$ e riscrivendo i campi in termini di queste grandezze, abbiamo

$$\vec{E}' = \frac{2\lambda'}{r} \vec{n}; \quad \vec{B}' = \frac{2}{rc} \vec{j}' \times \vec{n} \quad (8)$$

ovvero, per quanto riguarda per esempio il campo magnetico, otteniamo ciò che avremmo ottenuto usando semplicemente la legge di Biot-Savart.

Il principio di equivalenza dei riferimenti inerziali ci consente di concludere che se fossimo restati in *RS0* e avessimo semplicemente confrontato quanto accadeva quando il filo era fermo con quello che accadeva, sempre in *RS0*, quando il filo era posto in moto con velocità $-\vec{v}$, avremmo ottenuto lo stesso risultato.

Ricordiamo adesso che le equazioni di Maxwell sono lineari e dunque vale il principio di sovrapposizione.

Iniziamo dunque supponendo di avere, in *RS0*, due fili entrambi rettilinei e unidimensionali, uno carico con densità λ e l'altro con densità opposta $-\lambda$, entrambi fermi. Evidentemente se sovrapporli, ogni effetto elettrico si cancellerà e quindi in *RS0* non sarà presente alcun campo elettrico né magnetico. Però, se adesso immaginiamo di mettere in moto il primo filo con velocità uniforme $\vec{v} = v\vec{k}$, ecco che, per quanto detto sopra, in *RS0* nascerà un campo magnetico di Biot-Savart legato alla corrente² $\vec{j} = \gamma\lambda\vec{v}$. Quanto al campo elettrico, poiché la nuova densità di carica associata al filo

²Siccome siamo nel caso unidimensionale, stiamo confondendo il concetto di corrente con quello di densità di corrente ...

in moto è diventata $\lambda\gamma$, ecco che i due fili, pur sovrapposti, non daranno più luogo a un densità lineare di carica nulla, bensì essa sarà pari a

$$\lambda_{res} = \lambda(\gamma - 1) \quad (9)$$

Questa densità di carica residua è sorgente di un campo elettrico radiale rispetto ai due fili sovrapposti, che avremmo potuto ottenere direttamente sommando il campo elettrico prodotto dal filo fermo e quello prodotto dal filo in moto, come dato dalla (6)

In conclusione, nel riferimento *RS0* dove, in presenza di una distribuzione lineare di carica sull'asse z avente densità lineare $-\lambda$, il filo, con densità lineare di carica $+\lambda$, sovrapposto spazialmente alla precedente distribuzione di carica, è messo in moto con velocità $\vec{v} = v\vec{k}$, sono presenti sia un campo elettrico che un campo magnetico dati, rispettivamente, da

$$\vec{E} = \frac{2\lambda}{r}(\gamma - 1)\vec{n} \quad (10)$$

$$\vec{B} = \frac{2\lambda\gamma}{rc}\vec{v} \times \vec{n} = \frac{2\lambda\gamma}{r}\vec{\beta} \times \vec{n} \quad (11)$$

Fino a qui, abbiamo considerato come trascurabili le dimensioni trasverse del filo. Vediamo cosa succede se non vogliamo considerare il filo come unidimensionale. Immaginiamo dunque che la sua sezione sia circolare di raggio R e che sia omogeneo, rettilineo e infinitamente lungo.

In questo caso non parleremo di densità lineare λ bensì di densità di volume ρ_0 . Di nuovo, questo valore è quello nel riferimento *RS0* del filo in quiete, mentre è facile convincersi che visto dal riferimento *RS1* esso diventa ancora pari a $\gamma\rho_0$, accompagnato da una densità di corrente $\vec{j} = -\gamma\rho_0\vec{v}$, essendo $\vec{v}$ la velocità di *RS1* rispetto a *RS0*.

Questo accade perché

$$j^\mu = (\rho c, \vec{j}) \quad (12)$$

è un quadrivettore !

Immaginiamo adesso di pensare il filo come la sovrapposizione di un "filo" costituito dal reticolo del metallo di cui il filo è costituito e di un analogo "filo" costituito però dagli elettroni considerati liberi di muoversi all'interno del volume definito dal reticolo. Inizialmente sia tutto scarico, per cui la densità di carica associata alle cariche positive sarà ρ_0 mentre quella associata alle cariche negative sarà $-\rho_0$: nello spazio non sono presenti né campi elettrici né campi magnetici.

Ma supponiamo adesso di poter mettere in moto, in *RS0*, il filo legato al reticolo del metallo, conferendogli una velocità $\vec{v} = v\vec{k}$ senza che questo moto trascini l'analogo "filo" associato agli elettroni. Evidentemente, ragionando nel solito modo, in *RS0* nascerà un campo magnetico $\vec{B}$ di Biot-Savart,

legato alla densità di corrente che è, per quanto visto sopra, $\gamma\rho_0\vec{v}$, dato da

$$r \leq R : \vec{B} = 2\pi r \gamma \rho_0 \beta \vec{k} \times \vec{n} \quad (13)$$

$$r \geq R : \vec{B} = \frac{2\pi R^2}{r} \gamma \rho_0 \beta \vec{k} \times \vec{n} \quad (14)$$

il quale, comunque, non avrà influenza alcuna sugli elettroni che sono in quiete. In *RS0*, però, è nato anche un campo elettrico radiale, proprio perché la densità associata alla carica positiva è cresciuta del fattore γ mentre, se la distribuzione degli elettroni non è cambiata, quella negativa è rimasta la stessa. Questo campo, però, non può essere presente laddove ci sono gli elettroni perché, per ipotesi, essi sono liberi. Ne segue che, dove sono gli elettroni (in quiete) occorre che non ci sia campo elettrico e dunque, per la prima equazione di Maxwell, laddove si trovano gli elettroni fermi, la densità di carica negativa deve coincidere con quella positiva. Questo significa solamente che, in un transitorio, sotto l'effetto del campo radiale che è diretto nel verso di $\vec{n}$, gli elettroni si ridistribuiscono uniformemente all'interno di un nuovo volume il quale per simmetria sarà ancora cilindrico e coassiale all'originale, ma con dimensione radiale $R' < R$, tale che

$$\left(\frac{R}{R'}\right)^2 = \gamma \quad (15)$$

in modo che, in questo volume, le densità di carica positiva e negativa siano bilanciate non ci sia campo elettrico. Questo ha come conseguenza che, nella cortecchia definita da $R' \leq r \leq R$, sia presente solamente la densità di carica positiva, per cui il filo presenterà una densità lineare di carica che, ponendo $\lambda_0 \equiv \pi\rho_0 R^2$, è pari a

$$\lambda = \gamma\rho_0\pi(R^2 - R'^2) = \gamma\rho_0\pi R^2 \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) = \pi\rho_0 R^2(\gamma - 1) \equiv \lambda_0(\gamma - 1) \quad (16)$$

in accordo con la (9), ottenuta nel caso unidimensionale.

L'eccesso di carica presente sulla superficie del filo è naturalmente di segno *positivo* ed è responsabile della presenza del campo elettrico radiale presente esternamente a R' .

Nel riferimento *RS0*, dove gli elettroni sono fermi ma si muove il reticolo con velocità $\vec{v} = v\vec{k}$, quanto alle densità totali di carica e di corrente, risulta

$$0 \leq r \leq R' : \rho_T = 0 \quad (17)$$

$$R' \leq r \leq R : \rho_T = \gamma\rho_0 \quad (18)$$

$$0 \leq r \leq R : \vec{j}_T = \gamma\rho_0 v \vec{k} \quad (19)$$

essendo esse identicamente nulle fuori dal filo definito dal reticolo, ovvero per $r > R$.

All'equilibrio, questa configurazione è niente altro, evidentemente, che la sovrapposizione delle seguenti due quadricorrenti

$$0 \leq r \leq R' : J_-^\mu = -\gamma \rho_0 (1, \vec{0}) \quad (20)$$

$$0 \leq r \leq R : J_+^\mu = +\gamma \rho_0 (1, \beta \vec{k}) \quad (21)$$

a partire dalle quali possono essere facilmente calcolati sia il campo elettrico che il campo magnetico presenti nello spazio. Iniziamo dalla distribuzione di carica negativa (20) che, essendo ferma, genera solo un campo elettrico radiale dato da

$$r \leq R' : \vec{E}_- = -2\pi \gamma \rho_0 r \vec{n} \quad (22)$$

$$r \geq R' : \vec{E}_- = -2\pi \gamma \rho_0 \frac{R'^2}{r} \vec{n} \quad (23)$$

La distribuzione di carica positiva, analogamente, produce un campo elettrico radiale dato da

$$r \leq R : \vec{E}_+ = 2\pi \gamma \rho_0 r \vec{n} \quad (24)$$

$$r \geq R : \vec{E}_+ = 2\pi \gamma \rho_0 \frac{R^2}{r} \vec{n} \quad (25)$$

Poichè $R \neq R'$ il campo elettrico risultante totale $\vec{E}_T$ è identicamente nullo solo dove sono presenti gli elettroni liberi, i.e. per $r \leq R'$, e si ha

$$r \leq R' : \vec{E}_T = 0 \quad (26)$$

$$R' \leq r \leq R : \vec{E}_T = 2\pi \gamma \rho_0 \left(r - \frac{R'^2}{r} \right) \vec{n} = 2\pi \rho_0 \left(\gamma r - \frac{R^2}{r} \right) \vec{n} \quad (27)$$

$$r \geq R : \vec{E}_T = 2\pi \rho_0 \gamma \frac{R^2 - R'^2}{r} = 2\pi \rho_0 \frac{R^2}{r} (\gamma - 1) \quad (28)$$

dove abbiamo usato il fatto che, per la (15), $\gamma R'^2 = R^2$.

Riguardo al campo magnetico, evidentemente la distribuzione degli elettroni non ne genera alcuno e quindi il campo magnetico totale coincide con quello generato dalla distribuzione della carica positiva in moto, ovvero, per quanto visto sopra

$$r \leq R : \vec{B}_T = 2\pi r \gamma \beta \rho_0 \vec{k} \times \vec{n} \quad (29)$$

$$r \geq R : \vec{B}_T = \frac{2\pi R^2}{r} \gamma \beta \rho_0 \vec{k} \times \vec{n} \quad (30)$$

Ovviamente, come è già stato osservato, questo campo magnetico non determinerà comunque alcun effetto sugli elettroni, essendo questi fermi.

Se vogliamo vedere adesso qual è la situazione di campi e correnti nel sistema di riferimento RS1 dove è il reticolo a essere fermo, basta, naturalmente, trasformare quanto ottenuto in RS0 usando la trasformazione di

Lorentz definita dalla velocità $\vec{v} = v \vec{n}$. Riguardo alle due quadricorrenti (20) e (21), abbiamo adesso (si ricordi che la trasformazione non altera le coordinate trasverse ...)

$$0 \leq r \leq R' : J_-^\mu = -\gamma^2 \rho_0 (1, -\vec{\beta}) = \rho_0 (-\gamma^2, \gamma^2 \beta \vec{k}) \quad (31)$$

$$0 \leq r \leq R : J_+^\mu = +\rho_0 (1, \vec{0}) \quad (32)$$

Da questo segue che, in *RS1*, riferimento del reticolo fermo, è presente una densità lineare di carica pari a

$$\lambda = \pi (-\rho_0 \gamma^2 R'^2 + \rho_0 R^2) = \pi \rho_0 R^2 (1 - \gamma) \quad (33)$$

che è giusto l'opposto di quanto avevamo trovato in *RS0*.

La distribuzione positiva, adesso in quiete, genera solo un campo elettrico dato da

$$r \leq R : \vec{E}'_+ = 2\pi \rho_0 r \vec{n} \quad (34)$$

$$r \geq R : \vec{E}'_+ = 2\pi \rho_0 \frac{R^2}{r} \vec{n} \quad (35)$$

mentre quella negativa produce il campo elettrico

$$r \leq R' : \vec{E}'_- = -2\pi \gamma^2 \rho_0 r \vec{n} \quad (36)$$

$$r \geq R' : \vec{E}'_- = -2\pi \gamma^2 \rho_0 \frac{R'^2}{r} \vec{n} = -2\pi \gamma \rho_0 \frac{R^2}{r} \vec{n} \quad (37)$$

Il campo elettrico risultante è dunque dato da

$$r \leq R' : \vec{E}'_T = 2\pi \rho_0 r (1 - \gamma^2) \vec{n} = -2\pi \rho_0 r \gamma^2 \beta^2 \vec{n} \quad (38)$$

$$R' \leq r \leq R : \vec{E}'_T = 2\pi \rho_0 \left(r - \frac{\gamma R^2}{r} \right) \vec{n} \quad (39)$$

$$r \geq R : \vec{E}'_T = 2\pi \rho_0 \frac{R^2}{r} (1 - \gamma) \quad (40)$$

mentre per il campo magnetico abbiamo (si ricordi che $\gamma R'^2 = R^2$)

$$r \leq R' : \vec{B}'_T = 2\pi r \gamma^2 \beta \rho_0 \vec{k} \times \vec{n} \quad (41)$$

$$r \geq R' : \vec{B}'_T = \frac{2\pi R'^2}{r} \gamma^2 \beta \rho_0 \vec{k} \times \vec{n} = \frac{2\pi R^2}{r} \gamma \beta \rho_0 \vec{k} \times \vec{n} \quad (42)$$

Poiché gli elettroni stanno muovendosi nel filo con velocità $\vec{v} = -v \vec{k}$, la forza di Lorentz agente su di essi deve essere nulla e infatti per $r \leq R'$ abbiamo

$$\begin{aligned} r \leq R' : \vec{E}_T + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B}_T &= \vec{E}'_T - \beta \vec{k} \times \vec{B}'_T = \\ &= -2\pi \rho_0 r \gamma^2 \beta^2 \vec{n} - \beta 2\pi r \gamma^2 \rho_0 \beta \vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{n}) = \\ &= -2\pi \rho_0 r \gamma^2 \beta^2 \left[\vec{n} + \vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{n}) \right] = 0 \end{aligned} \quad (43)$$

Ovviamente, sarebbe stato possibile ottenere il risultato che abbiamo trovato per i campi in *RS1* anche utilizzando semplicemente le leggi di trasformazione (4) e (5) a partire dai campi in *RS0*.

Poiché i campi elettrici e magnetici sono solo trasversi, abbiamo che

$$\vec{E}'_T = \gamma(\vec{E}_T + \vec{\beta} \times \vec{B}) \quad (44)$$

$$\vec{B}'_T = \gamma(\vec{B}_T - \vec{\beta} \times \vec{E}) \quad (45)$$

Per il campo elettrico risulta dunque

$$\begin{aligned} r \leq R' : \vec{E}'_T &= \gamma[\vec{\beta} \times \vec{B}] = \gamma \beta \vec{k} \times \vec{B} = \gamma \beta 2\pi r \gamma \rho_0 \beta \vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{n}) = \\ &= -2\pi r \gamma^2 \beta^2 \rho_0 \vec{n} \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} R' \leq r \leq R : \vec{E}'_T &= \gamma[\vec{E}_T + \vec{\beta} \times \vec{B}] = \gamma 2\pi \rho_0 \left(\gamma r - \frac{R^2}{r} \right) \vec{n} - 2\pi r \gamma^2 \beta^2 \rho_0 \vec{n} = \\ &= \left(2\pi \rho_0 \gamma^2 r - 2\pi \rho_0 \gamma \frac{R^2}{r} \right) \vec{n} - 2\pi r \gamma^2 \beta^2 \rho_0 \vec{n} = \\ &= 2\pi \rho_0 r (\gamma^2 - \gamma^2 \beta^2) \vec{n} - 2\pi \rho_0 \gamma \frac{R^2}{r} \vec{n} = \\ b &= 2\pi \rho_0 \left(r - \frac{\gamma R^2}{r} \right) \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} r \geq R : \vec{E}'_T &= \gamma[\vec{E}_T + \vec{\beta} \times \vec{B}] = \gamma 2\pi \rho_0 \frac{R^2}{r} (\gamma - 1) + \gamma \beta \frac{2\pi R^2}{r} \gamma \rho_0 \beta \vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{n}) = \\ &= 2\pi \rho_0 \frac{R^2}{r} (\gamma^2 - \gamma - \gamma^2 \beta^2) = 2\pi \rho_0 \frac{R^2}{r} (1 - \gamma) \end{aligned} \quad (48)$$

in accordo con il risultato trovato direttamente a partire dalle distribuzioni di carica in *RS1*. Per il campo magnetico, analogamente si ha

$$\begin{aligned} r \leq R' : \vec{B}'_T &= \gamma \vec{B}_T = \gamma 2\pi r \gamma \rho_0 \beta \vec{k} \times \vec{n} = \\ &= 2\pi r \gamma^2 \beta \vec{k} \times \vec{n} \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} R' \leq r \leq R : \vec{B}'_T &= \gamma[\vec{B}_T - \vec{\beta} \times \vec{E}] = \\ &= 2\pi \rho_0 r \gamma^2 \beta \vec{k} \times \vec{n} - \gamma \beta 2\pi \rho_0 \left(\gamma r - \frac{R^2}{r} \right) \vec{k} \times \vec{n} = \\ &= 2\pi \rho_0 \gamma \beta \frac{R^2}{r} \vec{k} \times \vec{n} \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} r \geq R : \vec{B}'_T &= \gamma[\vec{B}_T - \vec{\beta} \times \vec{E}] = \\ &= \gamma 2\pi \frac{R^2}{r} \gamma \rho_0 \beta \vec{k} \times \vec{n} - \gamma \beta 2\pi \rho_0 \frac{R^2}{r} (\gamma - 1) \vec{k} \times \vec{n} = \\ &= 2\pi \rho_0 \frac{R^2}{r} \beta \gamma [\gamma - (\gamma - 1)] \vec{k} \times \vec{n} = 2\pi \rho \frac{R^2}{r} \beta \gamma \vec{k} \times \vec{n} \end{aligned} \quad (51)$$

in accordo con quanto ottenuto a partire dalle densità di corrente.

Può essere utile, per concludere l'argomento, determinare in un caso concreto quale sia, per esempio, il fattore γ .

Nel caso di un filo di rame³ di 1 cm di raggio, percorso da una corrente di 1000 A , possiamo valutare $\rho_0 \approx 10^{23}\text{ e}^-/\text{cm}^3$ e $\vec{v} \approx 10^{-1}\text{ cm/s}$, per cui $\gamma \approx 1 + \frac{\beta^2}{2}$ differisce dall'unità di 3 parti su 10^{25} , dunque l'aumento di densità dovuto alla contrazione di Lorentz è dell'ordine di qualche per cento di elettrone in più per ogni centimetro cubo !

³Ricordiamo che il peso atomico del rame è 63.54 mentre la sua densità vale 8.92 g/cm^3 . Stimando un elettrone libero per ione, in un grammo di rame, essendoci $8.92/63.54 \approx 0.140$ grammoatomi di rame, ci saranno quindi un numero di elettroni liberi pari a $6.023 \cdot 10^{23} \times 0.140 = 0.84 \cdot 10^{23}$.

Data una corrente di 1000 A in un filo con raggio $R = 1\text{ cm}$, ne segue una densità di corrente $J = 1000/\pi\text{ A/cm}^2$ ovvero un flusso di elettroni pari a $1000/(\pi \times 1.6 \cdot 10^{-19})\text{ e}^-/(\text{cm}^2 \cdot \text{s}) \approx 2 \cdot 10^{21}\text{ e}^-/(\text{cm}^2 \cdot \text{s})$. In presenza della densità di elettroni liberi sopra citata, questo significa una velocità di deriva pari a $v = 2 \cdot 10^{21}/(0.8 \cdot 10^{23}) \approx 2.5 \cdot 10^{-2}\text{ cm/s} \Rightarrow \beta = 0.8 \cdot 10^{-12}$ a cui corrisponde $\gamma \approx 1 + 0.32 \cdot 10^{-24}$.