

Teoria delle equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti

14 aprile 2022

Una equazione differenziale a coefficienti costanti, di grado n , lineare e omogenea ha la forma seguente

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0 \quad (1)$$

dove $y = y(t)$ è la funzione da determinare, mentre $y^{(j)}$ sta per la derivata j -esima delle $y(t)$ rispetto alla variabile indipendente t e gli $a_1, \dots, a_n$ sono, in generale, numeri complessi.

Essendo l'equazione (1) una equazione lineare e omogenea, l'insieme delle sue soluzioni costituisce uno spazio vettoriale sul corpo complesso, che indicheremo con $\mathcal{E}$. Per esplicitare questo spazio di soluzioni, iniziamo definendo l'operatore di derivazione nel modo seguente:

$$Df = f' \equiv \frac{df}{dt} \quad (2)$$

allora la (1) può essere posta nella forma seguente¹

$$(D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_n) y = 0 \quad (3)$$

Poiché D commuta con gli a_j , dalla teoria dei polinomi ricaviamo che

$$D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_n = (D - \lambda_1)^{s_1} \cdot \dots \cdot (D - \lambda_k)^{s_k} \quad (4)$$

dove $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sono le soluzioni, in generale complesse, dell'equazione algebrica

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (5)$$

e $s_1, \dots, s_k$ le rispettive molteplicità².

In questo modo, l'equazione differenziale di partenza può essere fattorizzata nel modo seguente

$$(D - \lambda_1)^{s_1} \cdot \dots \cdot (D - \lambda_k)^{s_k} y = 0 \quad (6)$$

¹I polinomi in D a coefficienti complessi, con le usuali operazioni di somma e prodotto, costituiscono un anello commutativo.

²Ricordiamo che, dalla teoria dei polinomi, esiste almeno una radice λ della (5) e la somma delle molteplicità s_j coincide con il grado n dell'equazione algebrica e quindi con quello dell'equazione differenziale data.

Ovviamente i diversi fattori

$$(D - \lambda_j)^{s_j} \equiv \Delta_j \quad (7)$$

commutano fra di loro e sono essi stessi operatori lineari.

Ne ricaviamo immediatamente che le soluzioni delle k equazioni differenziali

$$\Delta_j y = 0 \quad (8)$$

sono certamente anche soluzioni dell'equazione (1). Poiché anche le equazioni (8) sono lineari e omogenee, l'insieme delle loro soluzioni è ancora uno spazio vettoriale sul corpo complesso: lo indicheremo con $\mathcal{E}_j$.

Vogliamo dimostrare che

$$\mathcal{E} = \bigoplus_{j=1,k} \mathcal{E}_j \quad (9)$$

Cominciamo con l'esplicitare la struttura degli spazi $\mathcal{E}_j$. Per definizione si ha che

$$y \in \mathcal{E}_j \Leftrightarrow \Delta_j y = 0 \text{ i.e. } (D - \lambda_j)^{s_j} y = 0 \quad (10)$$

Assumiamo adesso che y sia una generica funzione C^∞ e poniamo

$$z(t) = y(t) e^{-\lambda_j t} \Leftrightarrow y = z e^{\lambda_j t} \quad (11)$$

E' immediato che

$$(D - \lambda_j) y = e^{\lambda_j t} D z \quad (12)$$

e dunque, iterando, possiamo concludere che, qualunque sia $n \geq 1$, risulta

$$(D - \lambda_j)^n y = e^{\lambda_j t} D^n z \quad (13)$$

Ma allora, se $y \in \mathcal{E}_j$ ovvero se $(D - \lambda_j)^{s_j} y = 0$ ecco che, definita la funzione z associata alla soluzione y attraverso la (11), per questa funzione deve accadere che

$$e^{\lambda_j t} D^{s_j} z = 0 \Leftrightarrow D^{s_j} z = 0 \quad (14)$$

Il problema di trovare gli elementi di $\mathcal{E}_j$ è quindi ricondotto a quello di cercare le soluzioni dell'equazione differenziale omogenea

$$D^{s_j} z = 0 \quad (15)$$

la quale può essere facilmente integrata e conduce a un generico polinomio di grado $s_j - 1$ nella variabile indipendente t

$$z(t) = P^{s_j-1}(t) \quad (16)$$

per cui possiamo concludere che la più generale soluzione dell'equazione $\Delta_j y = 0$, ovvero il generico elemento dello spazio vettoriale $\mathcal{E}_j$, è della forma

$$y(t) = e^{\lambda_j t} P^{s_j-1}(t) \quad (17)$$

E' del tutto evidente che il polinomio avrà s_j gradi di libertà e quindi che lo spazio vettoriale $\mathcal{E}_j$ avrà dimensione s_j : una specifica soluzione si otterrà fissando gli s_j coefficienti del polinomio, in base alle condizioni iniziali per $t = 0$ sulla funzione y e le sue derivate fino a y^{s_j-1} .

Passiamo adesso a dimostrare che gli operatori lineari Δ_j godono della seguente proprietà

$$\Delta_j : \mathcal{E}_m \rightarrow \mathcal{E}_m \quad e' \text{ bigettiva se } j \neq m \quad (18)$$

Iniziamo osservando che, poiché $\mathcal{E}_j$ commuta con $\mathcal{E}_m$, effettivamente l'immagine di $\mathcal{E}_m$ secondo Δ_j è fatta da soluzioni y dell'equazione $\Delta_m y = 0$ e quindi è contenuta in $\mathcal{E}_m$. Per dimostrare la bigettività, occorre e basta quindi dimostrarne l'iniettività. Trattandosi di un operatore lineare, l'iniettività equivale alla condizione

$$\Delta_j y = 0 \Leftrightarrow y = 0 \quad (19)$$

ovvero che se un vettore y di $\mathcal{E}_m$ è mandato nel vettore nullo dall'operatore Δ_j , allora deve essere che $y = 0$, cioè che quel vettore è il vettore nullo; ovvero, in altri termini, che

$$m \neq j : \mathcal{E}_m \cap \mathcal{E}_j = \{0\} \quad (20)$$

Supponiamo per assurdo che y , oltre a soddisfare l'equazione $\Delta_m y = 0$ e quindi a essere un elemento di $\mathcal{E}_m$, soddisfi anche l'equazione $\Delta_j y = 0$, e dunque appartenga anche a $\mathcal{E}_j$, ovvero

$$(D - \lambda_j)^{s_j} y = 0 \quad (21)$$

e sia σ il minimo esponente per cui la (21) continua a essere vera: per l'ipotesi fatta, $\sigma \geq 1$.

Se $\sigma = 1$ abbiamo che

$$Dy = \lambda_j y = 0 \quad (22)$$

e dunque

$$\Delta_m y = (D - \lambda_m)^{s_m} y = (\lambda_j - \lambda_m)^{s_m} y \quad (23)$$

la quale, contro l'ipotesi fatta, non può essere nulla se $y \neq 0$, essendo $m \neq j$. Consideriamo ora il caso $\sigma > 1$ e poniamo

$$Y = (D - \lambda_j)^{\sigma-1} y \quad (24)$$

Questa funzione Y , data la definizione dell'esponente σ , è diversa da zero e appartiene a $\mathcal{E}_m$ visto che y gli apparteneva e gli operatori Δ commutano fra loro. Essa soddisfa l'equazione

$$(D - \lambda_j) Y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad DY = \lambda_j Y \quad (25)$$

per cui ci ritroviamo nello stesso caso di cui sopra, ovvero nell'assurdo che Y non può appartenere anche a $\mathcal{E}_m$.

Questo prova la (20), ovvero che gli spazi vettoriali $\mathcal{E}_j$ hanno in comune solo il vettore nullo. Torniamo adesso al teorema enunciato mediante la (9), i.e.

$$\mathcal{E} = \bigoplus_{j=1,k} \mathcal{E}_j \quad (26)$$

Quanto abbiamo detto fin'ora, assicura che

- la somma diretta $\bigoplus_{j=1,k} \mathcal{E}_j$ è ben definita, visto che gli spazi lineari coinvolti hanno come unica intersezione il vettore nullo;
- lo spazio lineare $\mathcal{E}$ delle soluzioni dell'equazione differenziale data contiene certamente la somma diretta indicata, cioè

$$\mathcal{E} \supseteq \bigoplus_{j=1,k} \mathcal{E}_j \quad (27)$$

Per dimostrare la (26), dunque, occorre e basta dimostrare che

$$\mathcal{E} \subseteq \bigoplus_{j=1,k} \mathcal{E}_j \quad (28)$$

ovvero che ogni soluzione y dell'equazione differenziale data è necessariamente la somma di opportune funzioni Y_j le quali soddisfano, ciascuna separatamente, l'equazione $\Delta_j Y_j = 0$.

Sia dunque $y \in \mathcal{E}$ una soluzione dell'equazione differenziale data (1), ovvero sia y tale che

$$\Delta_1 \Delta_2 \dots \Delta_k y = 0 \quad (29)$$

Poniamo allora

$$v_1 \equiv \Delta_2 \dots \Delta_k y \quad (30)$$

Chiaramente $v_1 \in \mathcal{E}_1$, dato che

$$\Delta_1 v_1 = \Delta_1 \Delta_2 \dots \Delta_k y = 0 \quad (31)$$

Data l'invertibilità degli operatori lineari $\Delta_2, \dots, \Delta_k$ in $\mathcal{E}_1$, possiamo senz'altro definire la funzione $Y_1 \in \mathcal{E}_1$ così fatta

$$Y_1 = \Delta_k^{-1} \dots \Delta_2^{-1} v_1 \quad (32)$$

Se adesso poniamo

$$W_1 = y - Y_1 \quad (33)$$

questa funzione soddisfa evidentemente all'equazione

$$\Delta_2 \dots \Delta_k W_1 = \Delta_2 \dots \Delta_k (y - Y_1) = v_1 - v_1 = 0 \quad (34)$$

Iterando allora il procedimento di cui sopra, otteniamo

$$\begin{aligned} 1. \quad & W_1 = y - Y_1 \\ 2. \quad & W_2 = W_1 - Y_2 \\ & \dots \\ k-1 \quad & W_{k-1} = W_{k-2} - Y_{k-1} \end{aligned}$$

dove le funzioni Y_j appartengono agli spazi $\mathcal{E}_j$ mentre le funzioni W_j godono della proprietà che $\Delta_{j+1} \dots \Delta_k W_j = 0$.

Sommando membro a membro le $k-1$ equazioni di cui sopra, otteniamo

$$W_{k-1} = y - Y_1 - Y_2 - \dots - Y_{k-1} \quad (35)$$

ovvero

$$y = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{k-1} + W_{k-1} \quad (36)$$

Ma W_{k-1} verifica l'equazione $\Delta_k W_{k-1} = 0$ per cui appartiene a $\mathcal{E}_k$ e quindi è così dimostrato che ogni soluzione dell'equazione differenziale (1) risulta sempre esprimibile come combinazione lineare di elementi degli spazi $\mathcal{E}_j$.

Questo dimostra che

$$\mathcal{E} = \bigoplus_{j=1,k} \mathcal{E}_j \quad (37)$$

ovvero che l'integrale generale dell'equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti (1) ha la forma seguente:

$$y(t) = P^{s_1-1}(t) e^{\lambda_1 t} + P^{s_2-1}(t) e^{\lambda_2 t} + \dots + P^{s_k-1}(t) e^{\lambda_k t} \quad (38)$$

dove $P^s(t)$ è un generico polinomio di grado s .

Chiaramente, la dimensione dello spazio lineare delle soluzioni è la somma delle molteplicità s_j delle radici dell'equazione algebrica (5) associata all'equazione differenziale data, ovvero, per le proprietà delle radici dei polinomi nel campo complesso, essa è pari all'ordine dell'equazione data.