Alcuni effetti dell'accelerazione di Coriolis

14 aprile 2022

Sommario

E' possibile osservare in un moto di caduta in Laboratorio, gli effetti legati all'accelerazione di Coriolis dovuta alla rotazione della Terra intorno al proprio asse ?

Le equazioni del moto

L'accelerazione di Coriolis ha la forma

$$\vec{a}_c = 2\,\vec{\omega} \wedge \vec{v} \tag{1}$$

dove, nel caso considerato, $\vec{\omega}$ si riferisce appunto alla velocità angolare relativa alla rotazione terrestre intorno al proprio asse e ha modulo

$$\omega = \frac{2\,\pi}{86400} \approx 7.3 \times 10^{-5}\, s^{-1} \tag{2}$$

Nel caso in cui il moto sia quello di una massa puntiforme M in caduta libera, l'accelerazione di Coriolis agisce sostanzialmente nel piano orizzontale e, in modulo, vale

$$a_c(t) = 2\,\omega\, v(t)\, cos\lambda \tag{3}$$

dove λ è la latidudine del luogo, mentre $v(t)$ indica la componente verticale della velocità della massa, che, in assenza di attriti e con partenza da fermo, vale naturalmente

$$v(t) = g\,t \tag{4}$$

per cui il moto nel piano orizzontale ha accelerazione

$$a_c(t) = 2\,\omega\, g\, t\, cos\lambda \tag{5}$$

In un sistema di riferimento che abbia l'asse z orientato secondo la verticale verso il centro della Terra e l'asse orizzontale x disposto ortogonalmente al piano individuato dalla direzione verticale e da quella di $\vec{\omega}$, risulta

$$z = \frac{1}{2}\, g\, t^2 \tag{6}$$

$$x = 2\,\omega\, g\, cos\lambda\ \frac{t^3}{6} \tag{7}$$

ovvero, indicando rispettivamente con H e T l'altezza e il tempo di caduta, si ha

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2}\, g\, T^2 \qquad \Rightarrow \qquad T = \sqrt{\frac{2H}{g}} && (8)\\
x(H) &= \frac{1}{3}\, \omega\, g\, cos\lambda\, \frac{2H}{g}\, \sqrt{\frac{2H}{g}} = \frac{2}{3}\, \omega\, cos\lambda\, H\, \sqrt{\frac{2H}{g}} && (9)
\end{aligned}
$$

Assumendo $H = 5m$ e $cos\lambda = 0.7$, risulta

$$x(5m) \approx \frac{2}{3} \times 7.3 \cdot 10^{-5} \times 0.7 \times 5 \times 1 \approx 0.17\, mm \tag{10}$$

La formula (9) mostra che l'effetto legato all'accelerazione di Coriolis risulta amplificato nel caso di una minore accelerazione verticale.

Occorre però osservare che questa diminuzione della accelerazione di caduta *deve* avvenire in relazione all'applicazione di una forza che agisce, come la forza peso, esattamente lungo la verticale: qualunque sua componente orizzontale darebbe luogo a effetti che, sovrapponendosi a quelli legati alla accelerazione di Coriolis, potrebbero vanificare il risultato.

Si potrebbe pensare, per esempio, di ridurre l'accelerazione di caduta usando una massa M trattenuta attraverso un filo inestensibile e di massa nulla, collegato ad una massa $M - m$ che scorre senza attrito intorno ad un punto fisso (carrucola), che possiamo immaginare costituisca l'origine del sistema di riferimento.
L'accelerazione verticale di M, in questo caso, sarà data da

$$a = g\, \frac{m}{2M - m} \tag{11}$$

e quindi è compresa fra $a = 0$, quando $m = 0$, e $a = g$, quando $m = M$; mentre la tensione τ del filo risulta essere

$$\tau = M(g - a) = Mg\, \frac{2M - 2m}{2M - m} \tag{12}$$

e varia quindi fra Mg quando $m = 0$, fino a 0, quando $m = M$.

Nel piano orizzontale, però, adesso, oltre alla accelerazione di Coriolis, sarà presente anche l'accelerazione determinata sulla massa M dalla componente orizzontale della tensione τ del filo, la quale, quando la massa si trova nel generico punto di coordinata (x, z), vale

$$a_\tau = -\frac{\tau}{M}\, tg\theta = -\, g\, \frac{2M - 2m}{2M - m}\, \frac{x}{z} \tag{13}$$

essendo $\theta \approx \frac{x}{z}$ l'angolo fra il filo e la verticale. Abbiamo dunque che

$$\ddot{x}(t) = a_c + a_\tau = 2\,\omega\,a\,t\,cos\lambda - \,(g-a)\;\frac{x(t)}{z(t)} = 2\,\omega\,a\,t\,cos\lambda - \,g\,\frac{2M-2m}{2M-m}\;\frac{x(t)}{z(t)} \tag{14}$$

D'altronde, assumendo che la caduta avvenga a partire dall'origine, risulta

$$z(t) = \frac{1}{2}\,a\,t^2 \tag{15}$$

da cui

$$\ddot{x} = 2\,\omega\,a\,t\,cos\lambda - \frac{2x}{a\,t^2}\;(g-a) \equiv k\,t + \frac{h\,x}{t^2} \tag{16}$$

dove si è posto

$$k \;\equiv\; 2\,\omega\,a\,cos\lambda \tag{17}$$

$$h \;\equiv\; \frac{2(g-a)}{a} \tag{18}$$

Moltiplicando per t^2, abbiamo

$$t^2\,\ddot{x} - h\,x = k\,t^3 \tag{19}$$

che, con le condizioni iniziali $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 0$, ha come soluzione

$$x = \frac{k}{h+6}\,t^3 = \frac{2\,\omega\,a\,cos\lambda}{6+\frac{2(g-a)}{a}}\;t^3 = \frac{\omega\,a^2\,cos\lambda}{g+2a}\;t^3 \tag{20}$$

Per una caduta di altezza H, risulta dunque

$$\begin{aligned} x(H) &= \frac{\omega\,a^2\,cos\lambda}{g+2a}\;\frac{2H}{a}\,\sqrt{\frac{2H}{a}} = 2\,\omega\,cos\lambda\;\frac{a}{g+2a}\;H\,\sqrt{\frac{2H}{a}} = \\ &= \frac{2}{3}\,\omega\,cos\lambda\;\frac{3a}{g+2a}\;H\,\sqrt{\frac{2H}{a}} = \frac{2}{3}\,\omega\,cos\lambda\,H\,\sqrt{\frac{2H}{g}}\,\sqrt{\frac{g}{a}}\;\frac{3a}{g+2a} \end{aligned} \tag{21}$$

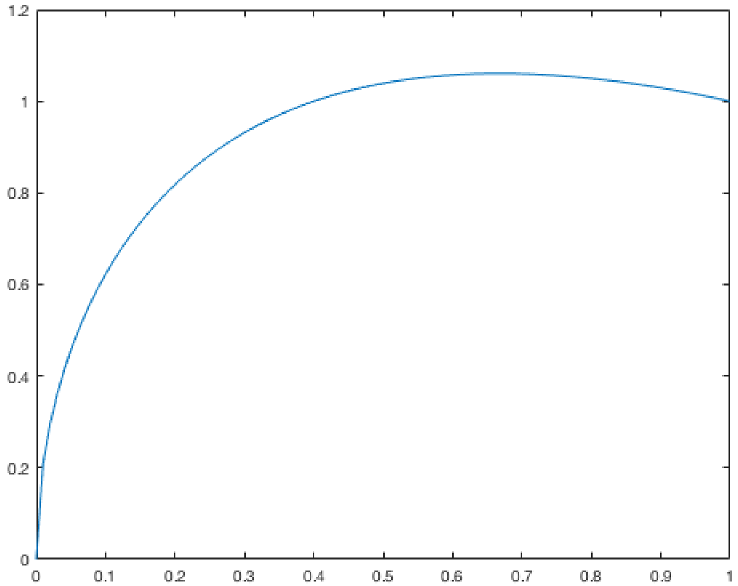
Poniamo per comodità di notazione

$$\xi \;\equiv\; \frac{m}{M} \quad\Rightarrow\quad 0 \le \xi \le 1 \tag{22}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{g}{a}}\;\frac{3a}{g+2a} &= \sqrt{\frac{2M-m}{m}}\,\frac{\frac{3m}{2M-m}}{1+\frac{2m}{2M-m}} = \sqrt{\frac{2M-m}{m}}\;\frac{3m}{2M+m} = \\ &= \frac{3\sqrt{m(2M-m)}}{2M+m} = 3\frac{\sqrt{\xi(2-\xi)}}{2+\xi} \equiv f(\xi) \end{aligned} \tag{23}$$

abbiamo allora che

$$x(H) = \frac{2}{3}\,\omega\,cos\lambda\,H\,\sqrt{\frac{2H}{g}}\;\;f(\xi) \tag{24}$$



da confrontare con l'espressione (9), ottenuta nel caso di caduta libera. Come si vede, l'effetto del rallentamento e quindi della diminuzione dell'accelerazione verticale, è descritto dalla funzione $f(\xi)$ definita dalla (23). L'andamento di questa funzione è riportato nella figura riportata sopra e questo mostra chiaramente come non ci sia sostanzialmente alcun vantaggio nell'operare nel modo illustrato sopra rispetto al caso della caduta libera. La funzione $f(\xi)$ ha infatti un massimo per $\xi = 2/3$ che vale $3/\sqrt{8} \approx 1.0607$.