

Moto di un cilindro colpito da un proiettile

16 aprile 2022

Esercizio

Un cilindro di legno è alto L , ha raggio R e massa M .

Esso è disposto con la generatrice diretta nella direzione dell'asse x e il centro di simmetria posto nell'origine degli assi. Il cilindro, soggetto alla forza peso, è appoggiato su un piano orizzontale, di equazione $z = -R$, su cui può muoversi senza attrito ed è inizialmente in quiete.

Contro il cilindro viene sparato un proiettile di massa $m \ll M$ e di impulso $\vec{p}$ diretto come l'asse y . Assumeremo che il proiettile, dopo l'impatto, venga comunque trattenuto all'interno del cilindro.

Qual è il moto del cilindro in funzione della posizione d'impatto del proiettile?

Risoluzione

Consideriamo il sistema *proiettile+cilindro*. Poiché il piano può esercitare (solo) forze ortogonali a esso, possiamo concludere che

- la risultante $\vec{F}$ delle forze esterne è nulla;
- il momento risultante delle forze esterne è anch'esso nullo (rispetto a ogni punto, visto che $\vec{F} = 0$).

Dunque nel processo d'urto si conserva sia l'impulso totale $\vec{P}$ del sistema, come pure il momento angolare $\vec{J}$, valutato rispetto a qualsiasi punto. L'impulso del sistema coincide, prima dell'urto, con l'impulso del proiettile $\vec{p}_p = (0, p, 0)$, quindi, la conservazione dell'impulso implica che la velocità $\vec{V}$ del CM del sistema dopo l'urto sia tale che

$$(M + m)\vec{V} = \vec{P} \Rightarrow \vec{V} = \frac{\vec{p}_p}{M + m} \approx \frac{\vec{p}_p}{M} \quad (1)$$

diretta, ovviamente, lungo l'asse y .

Questo risultato non dipende dal punto d'impatto del proiettile¹.

La conservazione di $\vec{J}$, invece, implica conseguenze diverse a seconda della posizione d'impatto del proiettile.

¹Si ricordi che, per ipotesi, il proiettile si ferma nel cilindro e dunque gli trasferisce tutto il suo impulso.

Iniziamo immaginando che la traiettoria del proiettile sia descritta dalla legge oraria $(0, v t, b)$, ovvero che essa giaccia nel piano zy (di simmetria del cilindro).

Rispetto all'origine degli assi che, come si è detto, coincide con il centro di simmetria del cilindro prima dell'urto, risulta

$$\vec{J} = (0, v t, b) \wedge (0, p, 0) = (-b p, 0, 0) \quad (2)$$

Questo momento angolare sarà anche quello del cilindro (con il proiettile al suo interno) dopo l'impatto, valutato, per esempio, rispetto all'origine degli assi. Per via di questa la scelta, il termine legato al moto del CM non contribuisce a $\vec{J}$ e quindi l'unico contributo a esso può venire solo dal momento angolare valutato rispetto al CM che si muove di moto rettilineo e uniforme. Data la simmetria del cilindro (trascuriamo qui l'asimmetria generata dall'assorbimento del proiettile che, comunque, può essere resa piccola a piacere dipendendo essa dalla massa dello stesso e non dal suo impulso ...), dovendo esso possedere un momento angolare intorno all'asse x , che è la generatrice stessa del cilindro, il cilindro ruoterà intorno alla sua generatrice con una velocità angolare $\vec{\Omega} = (\omega, 0, 0)$ dove

$$\omega = \frac{J_x}{I_{xx}} = -\frac{b p}{\frac{1}{2} M R^2} = -\frac{2 b p}{M R^2} = -\frac{2 b M V}{M R^2} = -\frac{2 b V}{R^2} \quad (3)$$

Come si vede, se in particolare $b = 0$, che corrisponde a una traiettoria del proiettile coincidente con l'asse y , il cilindro dopo l'urto si limita a traslare parallelamente a se stesso.

Ma immaginiamo adesso che il proiettile, pur muovendosi parallelamente all'asse y , segua una traiettoria traslata rispetto al piano zy come, per esempio, la traiettoria $(a, v t, b)$. In questo caso abbiamo

$$\vec{J} = (a, v t, b) \wedge (0, p, 0) = (-b p, 0, a p) \quad (4)$$

e dunque $\vec{J}$ possiede anche una componente lungo l'asse z . Poiché, come si è detto, il moto del CM non può contribuire al momento angolare rispetto all'origine, dovrà essere

$$J_j = I_{jk} \omega_k \quad (5)$$

D'altronde siccome gli assi x, y, z comoventi con il CM e paralleli agli assi del sistema fisso, sono assi principale d'inerzia, abbiamo semplicemente che

$$J_x = -b p = I_{xx} \omega_x = \frac{1}{2} M R^2 \omega_x \quad (6)$$

$$J_y = 0 = I_{yy} \omega_y \quad (7)$$

$$J_z = a p = I_{zz} \omega_z = \left(\frac{1}{12} M L^2 + \frac{1}{4} M R^2 \right) \omega_z \quad (8)$$

da cui si ricavano le tre componenti della velocità angolare.