

Catena arrotolata in caduta da un piano

13 aprile 2022

Sommario

Viene trattato il moto di caduta di una catena inizialmente arrotolata, che si svolge per un'altezza L , finché si appoggia sul terreno e continua a srotolarsi fino a cadere completamente in basso. Si assume che la lunghezza della catena sia finita ma molto maggiore di L .

Le equazioni del moto

Sia μ la densità lineare di massa della catena e sia L il dislivello fra cui cade la catena. Detta allora $x = x(t)$ la lunghezza della catena disposta in verticale, ecco che, per $x < L$, l'equazione del moto è la seguente

$$m g = \frac{dp}{dt} \Rightarrow \mu x g = \frac{d}{dt}(\mu x \dot{x}) \Rightarrow x g = \frac{d}{dt}(x \dot{x}) \quad (1)$$

Poniamo adesso

$$\xi \equiv \frac{x}{L}; \quad t = \tau \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (2)$$

Poiché

$$\frac{d}{dt} = \sqrt{\frac{g}{L}} \frac{d}{d\tau} \quad (3)$$

abbiamo che l'equazione (1) diviene

$$g L \xi = \sqrt{\frac{g}{L}} \frac{d}{d\tau} (\xi L L \xi' \sqrt{\frac{g}{L}}) \quad (4)$$

dove abbiamo posto

$$\xi' \equiv \frac{d\xi}{d\tau} \quad (5)$$

Abbiamo dunque

$$g L \xi = \frac{g}{L} L^2 \frac{d}{d\tau} (\xi \xi') \Rightarrow \xi = \frac{d}{d\tau} (\xi \xi') = \xi \xi'' + (\xi')^2 \Rightarrow \xi(1 - \xi'') = (\xi')^2 \quad (6)$$

Ponendo ora, come suggerisce Sommerfeld,

$$\xi \equiv \sqrt{u} \quad \xi' = \frac{1}{2\sqrt{u}} u' = \frac{u'}{2\xi} \quad (7)$$

abbiamo che

$$\xi = \frac{d}{d\tau}(\xi \xi') \Rightarrow \sqrt{u} = \frac{d}{d\tau}(\xi \frac{u'}{2\xi}) \Rightarrow u'' = 2\sqrt{u} \quad (8)$$

Questa equazione differenziale, però, è tutt'altro che semplice da risolvere in generale, richiedendo integrali ellittici ...

Torniamo quindi a considerare piuttosto l'equazione nella ξ , i.e.

$$\xi = \frac{d}{d\tau}(\xi \xi') \quad (9)$$

Nel caso in cui le condizioni iniziali siano $\xi(0) = 0$; $\xi'(0) = 0$, immaginando di poter rappresentare la funzione $\xi(\tau)$ in serie di potenze, abbiamo

$$\xi = a\tau^2 + b\tau^3 + c\tau^4 + \dots \quad (10)$$

L'equazione differenziale (9) impone allora che

$$\begin{aligned} a\tau^2 + b\tau^3 + c\tau^4 + \dots &= \frac{d}{d\tau} [(a\tau^2 + b\tau^3 + c\tau^4 + \dots)(2a\tau + 3b\tau^2 + 4c\tau^3 + \dots)] = \\ &= \frac{d}{d\tau} [\tau^3(2a^2) + \tau^4(3ab + 2ab) + \tau^5(4ac + 3b^2 + 6ac) + \dots] = \\ &= 3\tau^2(2a^2) + 4\tau^3(5ab) + 5\tau^4(10ac + 3b^2) + \dots \end{aligned} \quad (11)$$

e identificando tra loro i coefficienti delle varie potenze di τ , otteniamo che l'unico termine che può essere non nullo è $a = 1/6$, ovvero che la soluzione cercata è

$$\xi = \frac{1}{6}\tau^2 \Rightarrow x = L\xi = \frac{L}{6}\tau^2 = \frac{L}{6}\frac{g}{L}t^2 = \frac{1}{6}gt^2 \quad (12)$$

Questa soluzione corrisponde a un moto uniformemente accelerato con accelerazione costante $g/3$. Questo moto continua per il tempo in cui la catena scende senza toccare terra, ovvero fino a che $x = L$. Il tempo impiegato T per raggiungere terra è dunque tale che

$$L = \frac{1}{6}gT^2 \Rightarrow T = \sqrt{\frac{6L}{g}} \quad (13)$$

Nel momento in cui la catena tocca terra essa ha raggiunto la velocità

$$V_t = \frac{g}{3}T = \frac{g}{3}\sqrt{\frac{6L}{g}} = \sqrt{\frac{2}{3}}Lg \quad (14)$$

Da questo momento, l'equazione di moto della catena cambia perché il tratto di catena che appoggia a terra non agisce più sulla catena stessa.

La componente verticale delle forze esterne sulla catena diviene così una costante e pari a $\mu L g$: dunque

$$\mu L g = \frac{dp}{dt} = \frac{dm}{dt} v + m\dot{v} \quad (15)$$

dove il termine $\frac{dm}{dt} v$ indica la variazione di impulso della catena dovuta al fatto che, nel tempo dt , una sua massa $dm = \mu v dt$ deve acquistare, da ferma, la velocità v di tutta la catena. Dunque

$$\mu L g = \mu v v + m\dot{v} = \mu v v + \mu L \dot{v} \Rightarrow L g = v^2 + L \dot{v} \quad (16)$$

Abbiamo quindi da risolvere adesso l'equazione differenziale

$$L(g - \dot{v}) = v^2 \quad (17)$$

con la condizione iniziale (il tempo $t=0$ è adesso quello in cui la catena ha appoggiato l'estremo a terra) $V_0 = \sqrt{\frac{2}{3} Lg}$.

Osserviamo che l'equazione (17) ammette una soluzione in cui la velocità è costante nel tempo, ed è quella per cui $V_{asint} = \sqrt{Lg}$.

L'integrale generale dell'equazione (17) è il seguente

$$V(t) = \sqrt{Lg} \tanh \left[\sqrt{\frac{g}{L}} (t + t_0) \right] \quad (18)$$

dove t_0 è determinato dalle condizioni iniziali: nel nostro caso è

$$\begin{aligned} \sqrt{Lg} \tanh \left[\sqrt{\frac{g}{L}} t_0 \right] &= \sqrt{\frac{2}{3} Lg} \Rightarrow \tanh \left[\sqrt{\frac{g}{L}} t_0 \right] = \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \Rightarrow t_0 &= \sqrt{\frac{L}{g}} \tanh^{-1} \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \right) \end{aligned} \quad (19)$$

Infine, assumendo che la catena sia così lunga da poter considerare che raggiunga la velocità asintotica $V_{asint} = \sqrt{Lg}$, nel momento in cui non ci sarà più catena in alto, tutta la catena restante, di lunghezza L , prenderà a cadere di moto uniformemente accelerato con accelerazione g e velocità iniziale V_{asint} .

Per arrivare interamente in basso, la catena restante impiegherà un tempo T tale che

$$V_{asint} T + \frac{1}{2} g T^2 = L \Rightarrow \frac{1}{2} g T^2 + V_{asint} T - L = 0 \quad (20)$$

ovvero

$$T = \frac{-\sqrt{Lg} + \sqrt{Lg + 2Lg}}{g} = \sqrt{\frac{L}{g}} (\sqrt{3} - 1) \quad (21)$$

con una velocità finale pari a

$$V_{fin} = V_{asint} + gT = \sqrt{Lg} + \sqrt{Lg}(\sqrt{3} - 1) = \sqrt{3Lg} \quad (22)$$