

Moto di una carica elettrica nel campo di un monopolo magnetico

11 aprile 2022

Sommario

Vengono risolte le equazioni del moto di un elettrone nel campo prodotto da un monopolo magnetico, supposto immobile. Si dimostra che le traiettorie sono geodetiche sulla superficie di un cono. Infine, si imposta il calcolo della sezione d'urto differenziale del processo, mettendo in evidenza le relative difficoltà.

Le equazioni del moto

Consideriamo un elettrone nel campo di un monopolo magnetico, fisso nell'origine del sistema di riferimento, di carica magnetica μ . Per definizione, esso produce, nel punto di coordinate $\vec{r}$, un campo magnetico dato da

$$\vec{B} = \mu \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (1)$$

Se indichiamo con m la massa dell'elettrone di carica $-e$, ecco che le sue equazioni del moto saranno determinate dalla forza di Lorentz (assumiamo di poter trattare il moto come *non relativistico*), cioè avremo (sistema di unità di misura SI)

$$m\ddot{\vec{r}} = -e \vec{v} \times \vec{B} = -\frac{e\mu}{r^3} \dot{\vec{r}} \times \vec{r} \quad (2)$$

Definiamo adesso il versore radiale $\vec{e}_r$ ponendo

$$\vec{r} \equiv r \vec{e}_r \quad (3)$$

che, in coordinate polari (asse z come asse polare), è dato evidentemente da

$$\vec{e}_r = (\sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\theta) \quad (4)$$

Insieme a questo versore, è utile definire anche gli altri due seguenti versori ad esso ortogonali e ortogonali fra loro

$$\vec{e}_\theta = (\cos\theta \cos\phi, \cos\theta \sin\phi, -\sin\theta) \quad (5)$$

$$\vec{e}_\phi = (-\sin\phi, \cos\phi, 0) \quad (6)$$

Essi formano una terna destrorsa e sono quindi tali che

$$\vec{e}_r \times \vec{e}_\theta = \vec{e}_\phi; \quad \vec{e}_\theta \times \vec{e}_\phi = \vec{e}_r; \quad \vec{e}_\phi \times \vec{e}_r = \vec{e}_\theta \quad (7)$$

Risulta inoltre

$$\dot{\vec{e}}_r = \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{\phi} \sin\theta \vec{e}_\phi \quad (8)$$

$$\dot{\vec{e}}_\theta = -\dot{\theta} \vec{e}_r + \dot{\phi} \cos\theta \vec{e}_\phi \quad (9)$$

$$\dot{\vec{e}}_\phi = -\dot{\phi} \sin\theta \vec{e}_r - \dot{\phi} \cos\theta \vec{e}_\theta \quad (10)$$

In termini di questi versori, iniziamo determinando l'espressione della velocità della carica. Si ha

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\vec{e}}_r = \dot{r} \vec{e}_r + r \left(\dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{\phi} \sin\theta \vec{e}_\phi \right) \quad (11)$$

Passiamo quindi a calcolare l'accelerazione della carica. Abbiamo

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}} &= \ddot{r} \vec{e}_r + \dot{r} \dot{\vec{e}}_r + \dot{r} \left(\dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{\phi} \sin\theta \vec{e}_\phi \right) + \\ &+ r \left(\ddot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{\theta} \dot{\vec{e}}_\theta + \ddot{\phi} \sin\theta \vec{e}_\phi + \dot{\phi} \dot{\theta} \cos\theta \vec{e}_\phi + \dot{\phi} \sin\theta \dot{\vec{e}}_\phi \right) = \\ &= \ddot{r} \vec{e}_r + \dot{r} \left(\dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{\phi} \sin\theta \vec{e}_\phi \right) + \\ &+ \dot{r} \left(\dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{\phi} \sin\theta \vec{e}_\phi \right) + r \left(\ddot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{\theta} (-\dot{\theta} \vec{e}_r + \dot{\phi} \cos\theta \vec{e}_\phi) \right) + \\ &+ r \left(\ddot{\phi} \sin\theta \vec{e}_\phi + \dot{\phi} \dot{\theta} \cos\theta \vec{e}_\phi + \dot{\phi} \sin\theta (-\dot{\phi} \sin\theta \vec{e}_r - \dot{\phi} \cos\theta \vec{e}_\theta) \right) = \\ &= \vec{e}_r \left(\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 - r \dot{\phi}^2 \sin^2\theta \right) + \\ &+ \vec{e}_\theta \left(2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta} - r \dot{\phi}^2 \sin\theta \cos\theta \right) + \\ &+ \vec{e}_\phi \left(2\dot{r} \dot{\phi} \sin\theta + 2r \dot{\theta} \dot{\phi} \cos\theta + r \ddot{\phi} \sin\theta \right) \end{aligned} \quad (12)$$

D'altronde, dalle equazioni del moto risulta che deve altresì essere

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{e\mu}{m r^3} \dot{\vec{r}} \times \vec{r} \quad (13)$$

ed abbiamo

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}} \times \vec{r} &= r \left(\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta + r \dot{\phi} \sin\theta \vec{e}_\phi \right) \times \vec{e}_r = \\ &= r^2 \left(-\dot{\theta} \vec{e}_\phi + \dot{\phi} \sin\theta \vec{e}_\theta \right) \end{aligned} \quad (14)$$

per cui, confrontando le due espressioni (12) e (13) in cui abbiamo sostituito la (14), ne ricaviamo le seguenti tre equazioni del moto

$$\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 - r \dot{\phi}^2 \sin^2\theta = 0 \quad (15)$$

$$2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta} - r \dot{\phi}^2 \sin\theta \cos\theta = -\frac{e\mu}{m r} \dot{\phi} \sin\theta \quad (16)$$

$$2\dot{r} \dot{\phi} \sin\theta + 2r \dot{\theta} \dot{\phi} \cos\theta + r \ddot{\phi} \sin\theta = \frac{e\mu}{m r} \dot{\theta} \quad (17)$$

Come appare ovvio, esse non sono semplici da risolvere.

E' dunque opportuno vedere se possiamo giungere ad una loro forma più semplice, magari facendo uso di integrali primi.

Dato che la forza è ortogonale alla velocità, evidentemente l'energia cinetica T deve essere una costante del moto.

Possiamo quindi scrivere senz'altro il seguente integrale primo

$$\frac{T}{2m} = \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \quad (18)$$

Osserviamo adesso che *non* essendo la forza centrale, non dobbiamo aspettarci la conservazione del momento angolare.

La seconda legge della dinamica, data la (13), può essere riscritta come

$$m^2 \ddot{\vec{r}} = \frac{e\mu}{r^3} m \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \frac{e\mu}{r^3} \vec{L} \Rightarrow m \ddot{\vec{r}} = \frac{e\mu}{m r^3} \vec{L} \quad (19)$$

per cui, dalla definizione stessa del momento angolare, abbiamo

$$\vec{L} \equiv m \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \Rightarrow \dot{\vec{L}} = m \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = \frac{e\mu}{m r^3} \vec{r} \times \vec{L} \quad (20)$$

la quale mostra che la derivata del momento angolare è ortogonale al momento angolare stesso. Questo implica, naturalmente, che il modulo quadro di $\vec{L}$ sia una costante del moto, infatti

$$\frac{d}{dt} (\vec{L} \cdot \vec{L}) = 2 \vec{L} \cdot \dot{\vec{L}} = 0 \quad (21)$$

Abbiamo quindi un'altra grandezza scalare che è una costante del moto.

Riguardo al suo valore, usando la (14), abbiamo

$$\vec{L} = m \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = m r^2 (\dot{\theta} \vec{e}_\phi - \dot{\phi} \sin \theta \vec{e}_\theta) \quad (22)$$

e dunque

$$L^2 = m^2 r^4 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) \quad (23)$$

che, se la confrontiamo con l'espressione dell'energia cinetica (18), può essere riscritto nel modo seguente

$$L^2 = m^2 r^2 \left(\frac{T}{2m} - \dot{r}^2 \right) \Rightarrow \dot{r}^2 = \frac{T}{2m} - \frac{L^2}{m^2} \frac{1}{r^2} \quad (24)$$

Differenziando ancora una volta, otteniamo allora

$$2 \dot{r} \ddot{r} = 2 \frac{L^2}{m^2} \frac{1}{r^3} \dot{r} \quad (25)$$

Osserviamo che se $\dot{r} = 0$ ad ogni tempo, allora dalla (15) risulta che anche $\dot{\theta}$ e $\dot{\phi}$ devono essere nulli, che corrisponde alla soluzione in cui l'elettrone è

fermo nel riferimento del monopolio. Se questo non è il caso, allora possiamo concludere dalla (25) che deve valere l'equazione radiale seguente

$$\ddot{r} = \frac{L^2}{m^2} \frac{1}{r^3} \quad (26)$$

Poiché l'equazione radiale così ottenuta non è lineare in r , un fattore di scala può cambiarne l'aspetto: definiamo dunque la variabile ρ nel modo seguente

$$r \equiv \rho \sqrt{\frac{L}{m}} \quad (27)$$

Ne risulta che l'equazione differenziale per ρ diventa la seguente

$$\ddot{\rho} = \frac{1}{\rho^3} \quad (28)$$

la cui soluzione¹ è la seguente

$$\rho(t) = \sqrt{\frac{1 + \omega^2(t - t_0)^2}{\omega}} \quad (36)$$

dove ω e t_0 sono opportune costanti di integrazione ($\omega > 0$) di cui potremo meglio apprezzare il significato in seguito, tali che

$$\rho(0) = \sqrt{\frac{1 + \omega^2 t_0^2}{\omega}}; \quad \dot{\rho}(0) = -\frac{\omega t_0}{\rho(0)} \quad (37)$$

Riguardo alla distanza $r(t)$ fra la carica e il monopolio, abbiamo dunque

$$r(t) = \sqrt{\frac{L}{m}} \rho(t) = \sqrt{\frac{L}{m}} \sqrt{\frac{1 + \omega^2(t - t_0)^2}{\omega}} \quad (38)$$

la quale ha un minimo per $t = t_0$ (ecco il significato di questa costante di integrazione !) che vale

$$r_{min} = r(t_0) = \sqrt{\frac{L}{m\omega}} \quad (39)$$

¹Per risolvere l'equazione, osserviamo che la funzione $F = \sqrt{t}$, derivata due volte, conduce a $-\frac{1}{4F^3}$: il segno non è quello giusto, ma questo lascia pensare che la soluzione possa avere la forma

$$\rho(t) = \sqrt{F(t)} \quad (29)$$

con $F(t)$ polinomio opportuno in t . Risulta

$$\begin{aligned} \dot{\rho}(t) = \frac{\dot{F}}{2\sqrt{F}} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\rho}(t) &= \frac{2}{F} \left(\ddot{F} F - \frac{\dot{F} \dot{F}}{2\sqrt{F}} \right) = \frac{1}{2F} \frac{2\ddot{F} F - \dot{F}^2}{2\sqrt{F}} = \frac{2\ddot{F} F - \dot{F}^2}{4} \frac{1}{\sqrt{F}^3} = \\ &= \frac{2\ddot{F} F - \dot{F}^2}{4} \frac{1}{\rho^3} \end{aligned} \quad (30)$$

e diverge per $t \rightarrow \pm\infty$ come

$$t \rightarrow \pm\infty : r(t) \approx \sqrt{\frac{L\omega}{m}} |t| \quad (40)$$

Per risolvere le equazioni del moto relative ai gradi di libertà angolari, è opportuno adesso approfondire la questione della non conservazione del momento angolare orbitale $\vec{L}$.

Questo accade perché quello che si conserva è il momento angolare totale del sistema, fatto dalla somma di quello *orbitale* della carica in moto con quello del campo elettromagnetico che, anche nel caso statico, stavolta non è nullo.

Per trovare questo integrale primo, ripartiamo dalla definizione del momento angolare "orbitale"

$$\vec{L} = m \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \Rightarrow \dot{\vec{L}} = m \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} + m \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (41)$$

Usando allora la (19), abbiamo

$$\dot{\vec{L}} = \frac{e\mu}{m r^3} \vec{r} \times \vec{L} = \frac{e\mu}{r^3} \vec{r} \times (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \frac{e\mu}{r^3} (\vec{r}(\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) - r^2 \dot{\vec{r}}) = -e\mu \dot{\vec{e}}_r \quad (42)$$

dove abbiamo usato il fatto che il vettore velocità $\dot{\vec{r}}$ è ortogonale a quello di posizione $\vec{r} \equiv r\vec{e}_r$. Ne segue dunque che, definendo

$$\vec{J} = \vec{L} + e\mu \vec{e}_r \quad (43)$$

Potremo soddisfare l'equazione (28) usando una ρ della forma data dalla (29) se riusciamo a soddisfare la condizione

$$2\ddot{F}F - \dot{F}^2 = 4 \quad (31)$$

Visto che sono coinvolte la funzione e le sue derivate fino alla derivata seconda, proviamo con un polinomio di secondo grado, i.e.

$$F(t) = at^2 + 2bt + c \quad (32)$$

La condizione (31) diventa

$$4a(at^2 + 2bt + c) - (2at + 2b)^2 = 4 \Rightarrow 4a^2t^2 + 8abt + 4ac - 4a^2t^2 - 8abt - 4b^2 = 4 \\ \Rightarrow 4ac - 4b^2 = 4 \Rightarrow c = \frac{b^2 + 1}{a} \quad (33)$$

per cui, sostituendo, abbiamo

$$F(t) = at^2 + 2bt + \frac{b^2 + 1}{a} = \frac{a^2t^2 + 2abt + b^2 + 1}{a} = \frac{(at + b)^2 + 1}{a} \quad (34)$$

Ridefinendo allora, per comodità, i parametri liberi della funzione F in modo che risulti

$$\omega = a; \quad t_0 = -\frac{b}{a} \quad (35)$$

ne segue la soluzione (36).

risulta che

$$\dot{\vec{J}} = \dot{\vec{L}} + e\mu \dot{\vec{e}}_r = -e\mu \dot{\vec{e}}_r + e\mu \dot{\vec{e}}_r = 0 \quad (44)$$

Il vettore $\vec{J}$ è il momento angolare totale del sistema ed è una costante del moto il cui modulo, essendo $\vec{L}$ ed $\vec{e}_r$ ortogonali fra loro, vale

$$J^2 = L^2 + (e\mu)^2 \quad (45)$$

Fin'ora il sistema di riferimento in cui studiare il moto è stato scelto in modo arbitrario: possiamo però adesso continuare usando come asse polare quello definito dal versore $\vec{J}$ che, nel riferimento arbitrario iniziale, è univocamente determinato dalle condizioni iniziali (essendo una costante del moto ...).

Iniziamo determinando l'angolo Θ fra l'asse polare $\vec{J}$ ed il vettore posizione $\vec{r}$: si ha

$$\cos\Theta \equiv \frac{\vec{J} \cdot \vec{r}}{Jr} = \frac{(\vec{L} + e\mu \vec{e}_r) \cdot \vec{r}}{Jr} = \frac{e\mu r}{Jr} = \frac{e\mu}{J} = \frac{e\mu}{\sqrt{L^2 + (e\mu)^2}} \quad (46)$$

dove abbiamo usato di nuovo il fatto che $\vec{L}$ e $\vec{r}$ sono ortogonali.

Il risultato importante è che l'angolo polare della carica riferito all'asse polare $\vec{J}$ è una costante del moto, ovvero la traiettoria si svolge su un cono definito appunto dalla semiapertura angolare Θ la cui tangente (per definizione $0 \leq \Theta \leq \pi$), per quanto visto sopra, vale²

$$\tan\Theta = \frac{L}{e\mu} \quad \Leftrightarrow \quad \sin\Theta = \frac{L}{J} \quad (47)$$

Riprendiamo allora le equazioni del moto che, in un sistema di riferimento generico, abbiamo visto avere la forma seguente

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \sin^2\theta = 0 \quad (48)$$

$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \sin\theta \cos\theta = -\frac{e\mu}{mr} \dot{\phi} \sin\theta \quad (49)$$

$$2\dot{r}\dot{\phi} \sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi} \cos\theta + r\ddot{\phi} \sin\theta = \frac{e\mu}{mr} \dot{\theta} \quad (50)$$

Però, nel sistema in cui l'asse polare è definito da $\vec{J}$, sia $\dot{\Theta}$ come $\ddot{\Theta}$ sono entrambe nulle, quindi le equazioni diventano

$$\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 \sin^2\Theta = 0 \quad (51)$$

$$-r\dot{\phi}^2 \sin\Theta \cos\Theta = -\frac{e\mu}{mr} \dot{\phi} \sin\Theta \Rightarrow r\dot{\phi} \cos\Theta = \frac{e\mu}{mr} \quad (52)$$

$$2\dot{r}\dot{\phi} \sin\Theta + r\ddot{\phi} \sin\Theta = 0 \Rightarrow 2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi} = 0 \quad (53)$$

²Osserviamo che Θ è sempre diverso da zero, a meno che L sia nullo, nel qual caso, però, la carica elettrica o è ferma oppure si muove lungo $\vec{e}_r$ e quindi, essendo nulla la forza di Lorentz, essa procede di moto rettilineo e uniforme: in questo caso il cono degenera in una retta passante per l'origine, dove è il monopolio.

L'equazione (51), come abbiamo visto, usando l'espressione del modulo quadro di L , conduce all'equazione radiale (26), quindi l'abbiamo già soddisfatta attraverso la soluzione (38).

Venendo all'equazione (52), essa implica che

$$\dot{\phi} = \frac{e \mu}{m r^2 \cos \Theta} = \frac{J}{m r^2} \Leftrightarrow r^2 \dot{\phi} = \frac{J}{m} \quad (54)$$

dove abbiamo fatto uso della (46).

Si osservi che, derivando la (54) otteniamo la (53), quindi l'unica equazione differenziale che occorre ancora risolvere è appunto proprio la (54). Per questo, sostituiamo in essa la soluzione trovata per la distanza (38) fra monopolio e carica elettrica. Otteniamo³

$$\dot{\phi} = \frac{J}{m} \frac{m}{L} \frac{\omega}{1 + \omega^2(t - t_0)^2} = \frac{J}{L} \frac{\omega}{1 + \omega^2(t - t_0)^2} \quad (57)$$

da cui

$$\phi(t) = \phi_0 + \frac{J}{L} \arctg(\omega(t - t_0)) \quad (58)$$

Ponendo allora, per comodità di notazione,

$$\lambda \equiv \sin \Theta = \frac{L}{J} \quad (59)$$

$$\hat{\phi}(t) \equiv \phi(t) - \phi_0 \quad (60)$$

segue che

$$\tg(\lambda \hat{\phi}(t)) = \omega(t - t_0) \quad (61)$$

e dunque, facendo uso anche della (39), risulta

$$r(t) = \sqrt{\frac{L}{m}} \sqrt{\frac{1 + \tg^2(\lambda \hat{\phi}(t))}{\omega}} = \sqrt{\frac{L}{m \omega}} \frac{1}{\cos(\lambda \hat{\phi}(t))} \equiv \frac{r_{min}}{\cos(\lambda \hat{\phi}(t))} \quad (62)$$

Decidendo di contare il tempo dal momento in cui $r(t)$ assume il suo valore minimo e quindi facendo $t_0 = 0$ e ruotando gli assi xy intorno alla direzione

³Ricordiamo che l'equazione differenziale

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + x^2} \quad (55)$$

ha come soluzione generale

$$y(x) = y_0 + \arctg(x) \quad (56)$$

e dunque, nel nostro caso, appunto la (57).

definita da $\vec{J}$ in modo che anche $\phi(0) = 0$, possiamo riscrivere le soluzioni in modo ancora più semplice. Abbiamo infatti, in questo caso, che

$$\lambda\phi(t) = \arctg(\omega t) \quad (63)$$

$$r(t) = \frac{r_{min}}{\cos(\lambda\phi(t))} \quad (64)$$

$$\lambda = \sin\Theta = \frac{L}{J}; \quad \cos\Theta = \frac{e\mu}{J} \quad (65)$$

Evidentemente, quanto a $r(t)$, abbiamo

$$r_{min} \leq r(t) \leq +\infty \quad (66)$$

mentre, riguardo all'angolo azimutale, risulta che

$$-\frac{\pi}{2} \leq \lambda\phi(t) \leq \frac{\pi}{2} \quad (67)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2\sin\Theta} \leq \phi(t) \leq \frac{\pi}{2\sin\Theta} \quad (68)$$

che mostra come, nel caso di $\sin\Theta < \frac{1}{2}$, il range di variazione dell'angolo azimutale possa essere maggiore di 2π , significando che la traiettoria può "avvolgersi" intorno al cono anche per più di un giro completo ...

Le traiettorie

Vogliamo dimostrare adesso che la traiettoria percorsa dalla carica elettrica è una geodetica con la metrica indotta sul cono da quella euclidea in R^3 .

Al di là della dimostrazione analitica formale, possiamo rendercene conto se ricordiamo che la superficie del cono è sviluppabile su un piano, ovvero ha *curvatura intrinseca* nulla (come per il cilindro ...).

Iniziamo sviluppando il cono su un piano, "tagliandolo" lungo la sua generatrice definita da $\phi = \pi$ (semiretta definita da OQ nella parte sinistra della fig. 1)

Indichiamo con Θ la semiapertura del cono e consideriamo quindi la porzione della sua superficie fatta dai punti che hanno distanza dal vertice inferiore a una quantità generica R : chiaramente, nel piano, questi punti sono tutti e soli quelli che si trovano all'interno in un settore circolare di raggio R e di semiapertura $\psi = \pi \sin\Theta$, come è mostrato nella parte destra della figura 1. La lunghezza totale dell'arco che definisce il settore circolare è infatti uguale alla circonferenza individuata sul cono dai punti che sono a distanza R dal vertice, la cui lunghezza è appunto $2\pi R \sin\Theta$.

Volendo rappresentare la traiettoria seguita dalla particella carica sopra il piano di sviluppo del cono, occorre tenere presente che, come abbiamo già notato, a seconda delle condizioni iniziali, la traiettoria può "avvolgersi" sul cono anche per più di un giro.

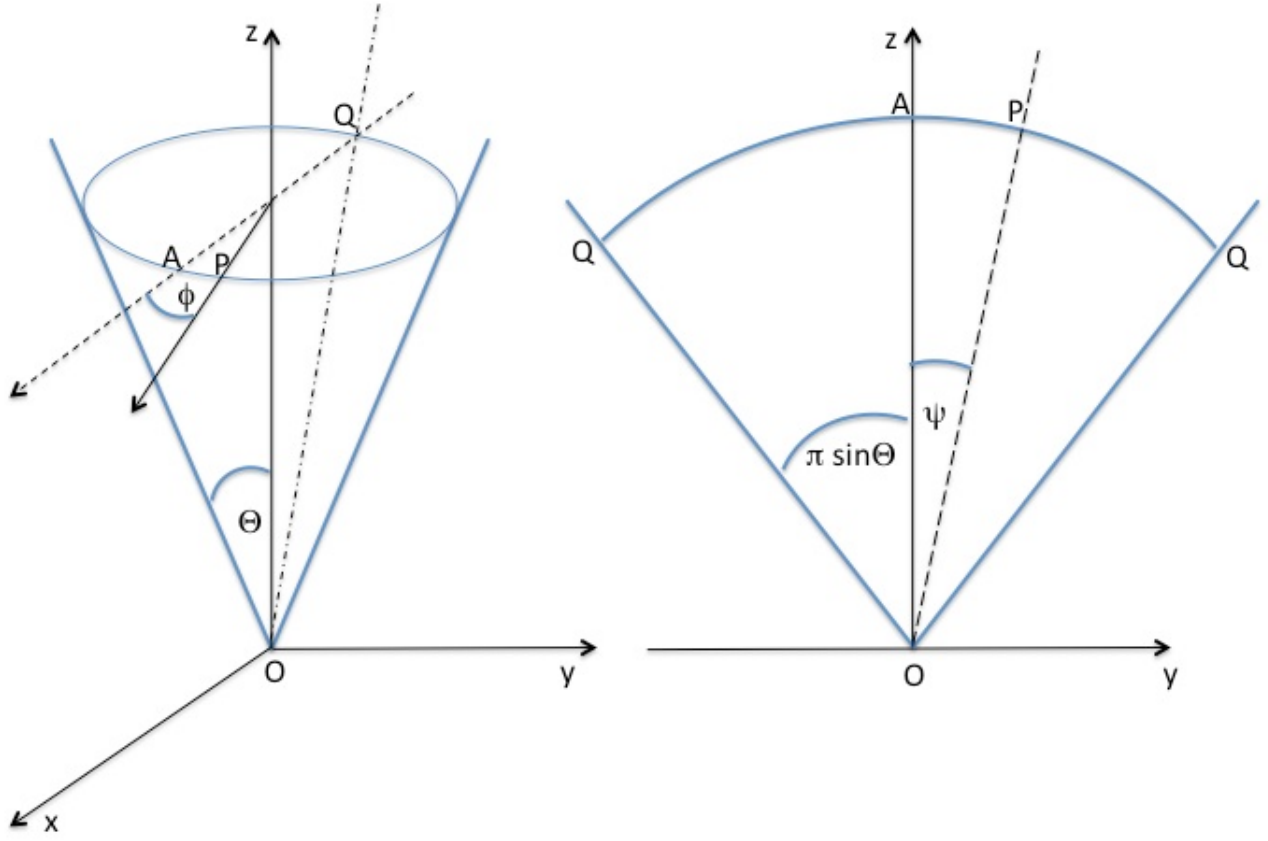


Figura 1: *Sviluppo della superficie del cono e corrispondenza fra la posizione P sul cono e quella nel piano di sviluppo dello stesso*

D'altronde, l'apertura della superficie conica sviluppata sul piano è definita dai possibili valori di $\psi = \phi \sin \Theta$ ovvero, per la definizione (59), di $\psi = \lambda \phi$.

La (67) dice che il range di questi valori, se vogliamo comprendere tutta la traiettoria descritta dalla carica sul cono, va da $-\pi/2$ a $+\pi/2$ ovvero è pari a un angolo piatto, che equivale a dire che la superficie sviluppata da considerare coincide semplicemente con tutto il semipiano $z \geq 0$. Su questo semipiano, il punto P che sul cono è individuato da $(r(t), \phi(t))$, sarà evidentemente individuato dalle coordinate

$$z(t) = r(t) \cos(\psi(t)) \equiv r(t) \cos(\lambda \phi(t)) \quad (69)$$

$$y(t) = r(t) \sin(\psi(t)) \equiv r(t) \sin(\lambda \phi(t)) \quad (70)$$

ovvero, ricordando che

$$r(t) = \frac{r_{min}}{\cos(\lambda \phi(t))} \quad (71)$$

$$\lambda \phi(t) = \arctg(\omega t) \quad (72)$$

ne risulta infine che

$$z(t) = r_{min} \quad (73)$$

$$y(t) = r_{min} \frac{\sin(\psi(t))}{\cos(\psi(t))} = r_{min} \tg(\psi(t)) = r_{min} \omega t \quad (74)$$

Il risultato ottenuto mostra che, sul piano dello sviluppo del cono, le traiettorie delle cariche elettriche sono comunque delle rette orizzontali e dunque si tratta effettivamente di geodetiche. Le rette sono disposte ad un'altezza $z = r_{min}$ e sono percorse con una velocità costante pari a $v = r_{min} \omega$. Poiché l'energia cinetica è una costante del moto, la velocità costante lungo la traiettoria non è una novità; però il risultato ottenuto ci consente di riscrivere

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m r_{min}^2 \omega^2 \quad (75)$$

Quanto al momento angolare orbitale, calcolandolo ad r_{min} , laddove la velocità è necessariamente ortogonale al raggio vettore, abbiamo

$$L = m r_{min} \cdot r_{min} \omega = m r_{min}^2 \omega \quad (76)$$

che ci permette di stabilire il significato di ω , risultando

$$\omega = \frac{2T}{L} \quad (77)$$

Infine, dalle (75) e (76), essendo

$$\frac{2T}{m} = r_{min}^2 \omega^2; \quad \frac{L}{m} = r_{min}^2 \omega \quad (78)$$

ne segue che

$$r_{min}^2 = \frac{\left(\frac{L}{m}\right)^2}{\frac{2T}{m}} = \frac{L^2}{m^2} \frac{m}{2T} = \frac{L^2}{2mT} \quad \Rightarrow \quad r_{min} = \frac{L}{\sqrt{2mT}} \quad (79)$$

e la (77) con la (79) mostrano come i due parametri dell'orbita, r_{min} e ω , risultino legati agli invarianti del moto T ed L .

Quanto, infine, alla semi apertura angolare Θ del cono che si sviluppa intorno a $\vec{J} = \vec{L} + e\mu \vec{e}_r$, abbiamo già detto che essa è tale per cui

$$\sin\Theta = \frac{L}{\sqrt{L^2 + (e\mu)^2}} \quad (80)$$

Geodetiche sul cono

Abbiamo visto come la traiettoria della carica elettrica nel campo del monopolo magnetico descriva una traiettoria che è risultata essere una geodetica sulla superficie di un cono di opportuna apertura angolare e opportuna orientazione nello spazio.

Prescindendo dal problema fisico considerato, affrontiamo adesso il problema generale della determinazione della forma generale delle geodetiche sulla superficie di un cono.

Supponendo che l'asse del cono, con vertice nell'origine, coincida con l'asse z , un generico punto sul cono è individuato dalle coordinate cartesiane

$$x = z \operatorname{tg} \Theta \cos \phi \quad (81)$$

$$y = z \operatorname{tg} \Theta \sin \phi \quad (82)$$

$$z = z \quad (83)$$

essendo Θ la semiapertura del cono. Ponendo, per comodità di notazione

$$\xi \equiv \operatorname{tg} \Theta \quad (84)$$

ecco che possiamo scrivere la metrica che R^3 induce sul cono nel modo seguente

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dz^2(1 + \xi^2) + z^2 \xi^2 d\phi^2 \quad (85)$$

Se indichiamo con t il generico parametro in grado di parametrizzare una curva sul cono assegnato, l'equazione delle geodetiche ha la forma seguente (variazione da prendere ad estremi fissi)

$$\delta \int_a^b \sqrt{(1 + \xi^2) \dot{z}^2 + z^2 \xi^2 \dot{\phi}^2} dt = 0 \quad (86)$$

dove abbiamo posto

$$\dot{z} \equiv \frac{dz}{dt}; \quad \dot{\phi} \equiv \frac{d\phi}{dt} \quad (87)$$

L'analogia con la descrizione lagrangiana⁴ del moto è del tutto evidente: possiamo quindi concludere che le geodetiche devono soddisfare le equazioni

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \quad (94)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} \quad (95)$$

⁴E' interessante osservare che l'hamiltoniana associata alla lagrangiana in questione, costante del moto, risulta essere identicamente nulla. Questo è unicamente dovuto al fatto che $\mathcal{L}$ è la radice quadrata di una forma quadratica nelle "velocità" lagrangiane $\dot{q}_i$, i.e. del tipo

$$\mathcal{L} = \sqrt{A_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j} \quad (88)$$

con la matrice $A_{ij}(q)$ simmetrica (l'eventuale parter antisimmetrica sarebbe comunque irrilevante ...).

dove $\mathcal{L} = \sqrt{(1 + \xi^2)\dot{z}^2 + z^2\xi^2\dot{\phi}^2}$.
Dunque

$$\frac{d}{dt} \frac{z^2 \xi^2 \dot{\phi}}{\mathcal{L}} = 0 \quad (96)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{(1 + \xi^2)\dot{z}}{\mathcal{L}} = \frac{z \xi^2 \dot{\phi}^2}{\mathcal{L}} \quad (97)$$

L'equazione (96) mostra che $\frac{z^2 \xi^2 \dot{\phi}}{\mathcal{L}}$ è una costante sulla geodetica.

Se questa costante è nulla, allora significa che $\dot{\phi} = 0$ e dunque stiamo parlando di una generatrice⁵ del cono, che non meraviglia sia una geodetica !

Il punto di partenza è quello solito per cui

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{L}}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i + \frac{\mathcal{L}}{\partial q_i} \dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i + \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \\ \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} (p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}) &= 0 \end{aligned} \quad (89)$$

dove si è posto, al solito, $p_i \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$. Definendo allora, come è d'uso, l'hamiltoniana $H = p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}$, questa risulta essere, evidentemente, una costante del moto (la lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo ...). Nel nostro caso, abbiamo

$$H = p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathcal{L} \quad (90)$$

ma

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{2A_{ij}\dot{q}_j}{2\mathcal{L}} \Rightarrow H = \frac{2A_{ij}\dot{q}_j \dot{q}_i}{2\mathcal{L}} - \mathcal{L} = \frac{A_{ij}\dot{q}_j \dot{q}_i - \mathcal{L}^2}{\mathcal{L}} = 0 \quad (91)$$

Questo risultato nasce direttamente dalla struttura della lagrangiana (88). Infatti, ricordiamo in generale che l'azione S

$$S = S(q_f, t) = \int_{t_0}^t d\tau \mathcal{L}(q, \dot{q}) \quad (92)$$

calcolata fra un estremo $q_0(t_0)$ fisso e l'estremo $q_f = q(t)$ sulla traiettoria che lega i due punti, intesa come funzione delle coordinate finali $q = q_f$ e del tempo t , è tale per cui

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i \quad \frac{\partial S}{\partial t} = -H \quad (93)$$

Ma l'azione S , associata alla lagrangiana data, non può dipendere esplicitamente da t , quando siano fissate le coordinate dei punti iniziali e finali, poiché S risulta essere semplicemente la lunghezza della traiettoria nella metrica definita da $A_{ij}(q)$, visto che

$$\mathcal{L}(q, \dot{q})dt = \sqrt{A_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j}dt = \sqrt{A_{ij}(q)dq_i dq_j} \dots$$

⁵Nel caso in cui $\dot{\phi} \equiv 0$, dalla (97) ricaviamo che

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \frac{(1 + \xi^2)\dot{z}}{\mathcal{L}} = \frac{(1 + \xi^2)\ddot{z}}{\mathcal{L}} - \frac{(1 + \xi^2)\dot{z}}{\mathcal{L}^2} \frac{d\mathcal{L}}{dt} = \\ &= \frac{(1 + \xi^2)\ddot{z}}{\mathcal{L}} - \frac{(1 + \xi^2)\dot{z}}{\mathcal{L}^2} \frac{2(1 + \xi^2)\dot{z}\ddot{z} + 2\xi^2 z \dot{z}\dot{\phi}^2 + 2\xi^2 z^2 \dot{\phi}\ddot{\phi}}{2\mathcal{L}} \\ \Rightarrow \quad 0 &= \frac{(1 + \xi^2)\ddot{z}}{\mathcal{L}} - \frac{(1 + \xi^2)\dot{z}}{\mathcal{L}^2} \frac{2(1 + \xi^2)\dot{z}\ddot{z}}{2\mathcal{L}} = \frac{(1 + \xi^2)\ddot{z}}{\mathcal{L}} \left(1 - \frac{(1 + \xi^2)\dot{z}^2}{\mathcal{L}^2} \right) \end{aligned} \quad (98)$$

Consideriamo dunque il caso in cui $\dot{\phi} \neq 0$.

In questo caso possiamo concludere che $\phi(t)$ è una funzione monotona di t e dunque l'angolo ϕ può essere usato al posto di t per parametrizzare la geodetica. In questo caso la nuova $\mathcal{L}$ ha la forma seguente

$$\mathcal{L} = \sqrt{(1 + \xi^2)\dot{z}^2 + \xi^2 z^2} \quad (99)$$

dove adesso con $\dot{z}$ intendiamo $\frac{dz}{d\phi}$. L'equazione della geodetica che deriva dal principio di minima azione applicato alla (99) è adesso la seguente

$$\frac{d}{d\phi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} \quad (100)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\phi} \frac{(1 + \xi^2)\dot{z}}{\sqrt{(1 + \xi^2)\dot{z}^2 + \xi^2 z^2}} = \frac{\xi^2 z}{\sqrt{(1 + \xi^2)\dot{z}^2 + \xi^2 z^2}} \quad (101)$$

e dunque

$$\frac{\xi^2 z}{\mathcal{L}} = \frac{(1 + \xi^2)\ddot{z}\mathcal{L} - (1 + \xi^2)\dot{z} \frac{(1 + \xi^2)\dot{z}\ddot{z} + \xi^2 z \dot{z}}{\mathcal{L}}}{\mathcal{L}^2} \quad (102)$$

da cui, moltiplicando per $\mathcal{L}^3$, ricaviamo

$$\begin{aligned} \xi^2 z \mathcal{L}^2 &= (1 + \xi^2) \ddot{z} \mathcal{L}^2 - (1 + \xi^2) \dot{z} ((1 + \xi^2) \dot{z} \ddot{z} + \xi^2 z \dot{z}) \Rightarrow \\ \Rightarrow \xi^2 z ((1 + \xi^2) \dot{z}^2 + \xi^2 z^2) &= (1 + \xi^2) \ddot{z} ((1 + \xi^2) \dot{z}^2 + \xi^2 z^2) - (1 + \xi^2) \dot{z}^2 ((1 + \xi^2) \dot{z} + \xi^2 z) \\ \Rightarrow \xi^2 z ((1 + \xi^2) \dot{z}^2 + \xi^2 z^2) &= (1 + \xi^2) \xi^2 z (z \ddot{z} - \dot{z}^2) \\ \Rightarrow 2(1 + \xi^2) \dot{z}^2 &= -\xi^2 z^2 + (1 + \xi^2) z \ddot{z} \end{aligned} \quad (103)$$

Dividendo la (103) per $(1 + \xi^2)$ e definendo la quantità ζ nel modo seguente

$$\zeta \equiv \frac{\xi}{\sqrt{1 + \xi^2}} \quad (104)$$

che, in termini dell'angolo Θ di semiapertura del cono, vista la definizione (84), è semplicemente data da

$$\zeta \equiv \frac{\xi}{\sqrt{1 + \xi^2}} = \frac{tg\Theta}{\sqrt{1 + tg^2\Theta}} = \sin\Theta \quad (105)$$

giungiamo infine all'equazione seguente

$$2 \dot{z}^2 = z \ddot{z} - \zeta^2 z^2 \quad (106)$$

dove abbiamo usato il fatto che $\dot{\phi} \equiv 0$.

La quantità entro parentesi tonda, però, risulta essere identicamente nulla e dunque l'equazione (97) è identicamente soddisfatta, qualunque sia $z = z(t)$.

Questo non deve meravigliare in quanto, qualunque sia la sua parametrizzazione, essendo $\dot{\phi} \equiv 0$, la curva descritta è sempre e comunque una generatrice del cono !

Effettuiamo adesso il cambiamento di variabile

$$w \equiv \frac{1}{z} \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{1}{w} \quad (107)$$

Evidentemente risulta

$$\dot{z} = -\frac{\dot{w}}{w^2} \quad (108)$$

$$\ddot{z} = -\frac{\ddot{w} w^2 - 2 \dot{w}^2 w}{w^4} = \frac{2 \dot{w}^2 - w \ddot{w}}{w^3} \quad (109)$$

per cui, sostituendo nella (106), otteniamo

$$2 \frac{\dot{w}^2}{w^4} = \frac{1}{w} \frac{2 \dot{w}^2 - w \ddot{w}}{w^3} - \frac{\zeta^2}{w^2} \quad (110)$$

da cui, semplificando, si ottiene infine che

$$\ddot{w} + \zeta^2 w = 0 \quad (111)$$

il cui integrale generale, come ben noto, è

$$w = A \cos(\zeta \phi + \phi_0) \quad (112)$$

essendo A e ϕ_0 le due costanti di integrazione.

Ricordando la (107), abbiamo infine che, posto $z_0 \equiv A$, l'equazione della geodetica è

$$z = z(\phi) = \frac{z_0}{\cos(\zeta \phi + \phi_0)} \quad (113)$$

dove il campo di variazione di ϕ per una geodetica che non sia una generatrice del cono ha una ampiezza che vale

$$\Delta\phi = \frac{\pi}{\zeta} = \frac{\phi}{\sin\Theta} \quad (114)$$

e quindi non dipende dalla particolare geodetica. L'angolo ϕ_0 dipende dalle condizioni iniziali: un suo valore nullo corrisponde a dire che la geodetica ha come punto di partenza quello con Z minimo possibile.

Si osservi infine che le geodetiche che non sono generatrici del cono, si ottengono tutte a partire dalla geodetica fondamentale

$$\hat{z}(\phi) = \frac{1}{\cos(\zeta \phi)} \quad (115)$$

attraverso una dilatazione delle coordinate e una rotazione intorno all'asse del cono.

La sezione d'urto differenziale

Vogliamo determinare, adesso, la sezione d'urto differenziale del processo di scattering fra l'elettrone ed il monopolo magnetico, supposto immobile. Se indichiamo, come di consueto, con b il parametro d'impatto associato all'elettrone, si ha

$$db \, b \, d\phi_{in} = \frac{d\sigma}{d\Omega} \sin\theta \, d\theta \, d\phi_{out} \quad (116)$$

dove θ è l'angolo di scattering, definito, in generale, tramite la relazione

$$\cos\theta = \frac{\vec{v}_{out} \cdot \vec{v}_{in}}{|\vec{v}_{out}| |\vec{v}_{in}|} \quad (117)$$

in termini delle velocità asintotiche $\vec{v}_{in}$ e $\vec{v}_{out}$.

Nel caso che stiamo considerando, poiché stiamo trascurando qualsiasi fenomeno di irraggiamento, l'elettrone mantiene costante la sua energia cinetica T durante il moto, e dunque

$$|\vec{v}_{out}| = |\vec{v}_{in}| \equiv v = \sqrt{\frac{2T}{m}} \quad (118)$$

Vediamo ora come esplicitare i vettori $\vec{v}_{in}$ e $\vec{v}_{out}$.

Poiché siamo interessati al loro prodotto scalare, questi vettori, il cui modulo è fissato da T , possono essere considerati in un qualsiasi sistema di riferimento e, in particolare, in quello in cui il momento angolare totale $\vec{J}$ è orientato secondo il verso positivo dell'asse z che, quindi, è l'asse del cono sulla cui superficie si svolge il moto dell'elettrone.

Dalla risoluzione delle equazioni del moto in questo riferimento

- detto $\vec{L}$ il momento angolare orbitale che, come abbiamo visto, pur non essendo costante ha comunque costante il suo modulo

$$L = m v b \quad (119)$$

- avendo scelto il tempo $t = 0$ in modo che la distanza della carica elettrica dal monopolo r_m sia minima

$$r_m = \sqrt{\frac{L^2}{2T m}} = \frac{L}{m v} = b \quad (120)$$

risulta che

$$r(t) = \frac{r_m}{\cos(\lambda \phi(t))} = \frac{b}{\cos(\lambda \phi(t))} \quad (121)$$

$$\lambda \phi(t) = \arctg(\omega t) \quad (122)$$

dove

$$\lambda \equiv \sin\Theta \quad (123)$$

$$\omega = \frac{2T}{L} = \frac{m v^2}{m v b} = \frac{v}{b} \quad (124)$$

essendo Θ l'angolo di semiapertura del cono.

Riguardo alla velocità, nel riferimento in questione, dove l'elettrone si muove sulla superficie del cono e dunque senza che ci sia una componente polare della velocità, abbiamo che

$$\vec{v}(t) = \dot{r}(t) \vec{e}_r(t) + r(t) \dot{\phi}(t) \sin\Theta \vec{e}_\phi(t) \quad (125)$$

dove

$$\vec{e}_r(t) = (\sin\Theta \cos\phi(t), \sin\Theta \sin\phi(t), \cos\Theta) \quad (126)$$

$$\vec{e}_\phi(t) = (-\sin\phi(t), \cos\phi(t), 0) \quad (127)$$

I due limiti asintotici che servono per la determinazione dell'angolo di scattering attraverso la (117)

$$\vec{v}_{out} \equiv \vec{v}_+ = \lim_{t \rightarrow +\infty} \vec{v}(t) \quad (128)$$

$$\vec{v}_{in} \equiv \vec{v}_- = \lim_{t \rightarrow -\infty} \vec{v}(t) \quad (129)$$

possono essere determinati osservando che, poiché dalla (!!!) risulta che

$$r^2(t) \dot{\phi}(t) = \frac{J}{m} \Rightarrow r(t) \dot{\phi}(t) = \frac{J}{m} \frac{1}{r(t)} \quad (130)$$

tende a zero per $t \rightarrow \pm\infty$, siccome $\vec{v}(t)$ ha comunque un modulo indipendente dal tempo e pari a $v = \sqrt{2T/m}$, l'unico termine che può contribuire ai valori asintotici è quello radiale, i.e.

$$\vec{v}_\pm = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \dot{r}(t) \vec{e}_r t \equiv v \vec{e}_\pm \quad (131)$$

dove abbiamo introdotto i vettori asintotici radiali $\vec{e}_\pm$.

Poiché $\dot{r}(t)$ è negativo per $t < 0$, quando l'elettrone si sta avvicinando al monopolio, ed è positivo per $t > 0$, quando l'elettrone si sta allontanando dal monopolio, ecco che, ponendo

$$\phi_\pm \equiv \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \phi(t) \quad (132)$$

$$\Delta\phi \equiv \phi_+ - \phi_- \quad (133)$$

abbiamo che

$$\vec{e}_+ = (\sin\Theta \cos\phi_+, \sin\Theta \sin\phi_+, \cos\Theta) \quad (134)$$

$$\vec{e}_- = -(\sin\Theta \cos\phi_-, \sin\Theta \sin\phi_-, \cos\Theta) \quad (135)$$

e quindi

$$\begin{aligned}
\cos\theta &= \vec{e}_+ \cdot \vec{e}_- = -[\sin^2\Theta(\cos\phi_+ \cos\phi_- + \sin\phi_+ \sin\phi_-) + \cos^2\Theta] = \\
&= -(\sin^2\Theta \cos\Delta\phi + \cos^2\Theta) = -(\sin^2\Theta - \sin^2\Theta + \sin^2\Theta \cos\Delta\phi + \cos^2\Theta) = \\
&= -[1 - \sin^2\Theta(1 - \cos\Delta\phi)] = 2\sin^2\Theta \sin^2\frac{\Delta\phi}{2} - 1
\end{aligned} \tag{136}$$

Ma abbiamo visto che

$$\lambda = \sin\Theta = \frac{L}{J}; \quad \lambda \Delta\phi = \pi \tag{137}$$

e dunque avremo che

$$\cos\theta = 2\lambda^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2\lambda}\right) - 1 = 2\left(\frac{L}{J}\right)^2 \sin^2\frac{\pi J}{2L} - 1 \tag{138}$$

D'altronde

$$L = mvb; \quad J = \sqrt{(mvb)^2 + (e\mu)^2} \tag{139}$$

quindi

$$\cos\theta = 2 \frac{(mvb)^2}{(mvb)^2 + (e\mu)^2} \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{(mvb)^2 + (e\mu)^2}{(mvb)^2}}\right) - 1 \tag{140}$$

Si osservi, prima di procedere oltre, che quando $mvb \gg |e\mu|$, risulta

$$\cos\theta \rightarrow 2\sin^2(\pi/2) - 1 = 1 \tag{141}$$

la quale implica che la carica non sta subendo scattering ... Questo accade sia per ad alti parametri di impatto, come pure se la carica si muove ad alta velocità o, infine, per bassi valori della carica di monopolo.

Per determinare l'espressione della sezione d'urto differenziale del processo, poiché ϕ_{in} non entra nella (140), occorre, in principio, calcolare

$$b db = \frac{d\sigma}{d\Omega} \sin\theta d\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin\theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{d(b^2)}{d(\cos\theta)} \right| \tag{142}$$

Qui, però si pone un problema perché la funzione 141 non è invertibile.

Vediamo questo aspetto. Poniamo

$$\eta \equiv \left(\frac{mvb}{e\mu}\right)^2 = \left(\frac{mv}{e\mu}\right)^2 b^2 \tag{143}$$

Risulta

$$\frac{1 + \cos\theta}{2} = \frac{\eta}{1 + \eta} \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{1 + \eta}{\eta}}\right) \tag{144}$$

$$\Rightarrow \cos^2\theta/2 = \frac{\eta}{1 + \eta} \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{1 + \eta}{\eta}}\right) \tag{145}$$

e dunque, ricordando che $0 \leq \theta \leq \pi$, ovvero che $\theta/2$ sta nel primo quadrante, abbiamo

$$\cos\theta/2 = \sqrt{\frac{\eta}{1+\eta}} \left| \sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{1+\eta}{\eta}}\right) \right| \quad (146)$$

la quale, al variare di η fra 0 e $+\infty$ non è una funzione iniettiva: per esempio, in tutti i casi in cui $\sqrt{\frac{1+\eta}{\eta}}$ è un intero pari, $\cos\theta/2 = 0$.

Può essere interessante, a questo punto, vedere come è fatta la funzione $F(\eta)$ definita direttamente dalla (144), i.e.

$$F(\eta) \equiv \cos\theta = \frac{2\eta}{1+\eta} \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{1+\eta}{\eta}}\right) - 1 \quad (147)$$

Nella Fig.2 possiamo riconoscere tre zone: la zona di cui al grafico *a*), per $0 \leq \eta \leq 0.01$, in cui F ha dipendenza sostanzialmente caotica da η ; la zona di cui al grafico *b*) per la quale η è compresa fra 0.01 e $1/3$, in cui sono presenti ancora varie oscillazioni e quindi F non è iniettiva e infine la zona di cui al grafico *c*), per cui $\eta > 1/3$, che vede F essere monotona crescente e dunque invertibile.

Non essendo la $F(\eta)$ invertibile, non possiamo seguire il modo consueto per determinare la sezione d'urto. E' verosimile che i problemi scompaiano nella trattazione quantistica, perché essi sorgono quando il momento angolare orbitale è minore di $1/3$ di $e\mu$, che, verosimilmente, non dovrebbe essere inferiore a $\hbar/2$. La trattazione quantistica, però, richiederebbe l'hamiltoniana che, nel caso attuale, non è evidente.

Ancora sulle geodetiche

Abbiamo assunto, attraverso la (86), che le geodetiche siano definite dalla condizione

$$\delta \int ds = 0 \quad (148)$$

dove

$$ds^2 \equiv g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu \quad (149)$$

essendo g un tensore che definisce una forma quadratica definita positiva⁶, eventualmente dipendente dalle coordinate che abbiamo individuato genericamente con il simbolo $x \equiv x^\mu$.

Nel caso della superficie conica, per la (85), evidentemente risulta

$$x^\mu \equiv (z, \phi); \quad g = \begin{pmatrix} 1 + \xi^2 & 0 \\ 0 & \xi^2 z^2 \end{pmatrix} \quad (150)$$

⁶Questa ipotesi non è realmente essenziale, basta che g sia simmetria e non degenerare.

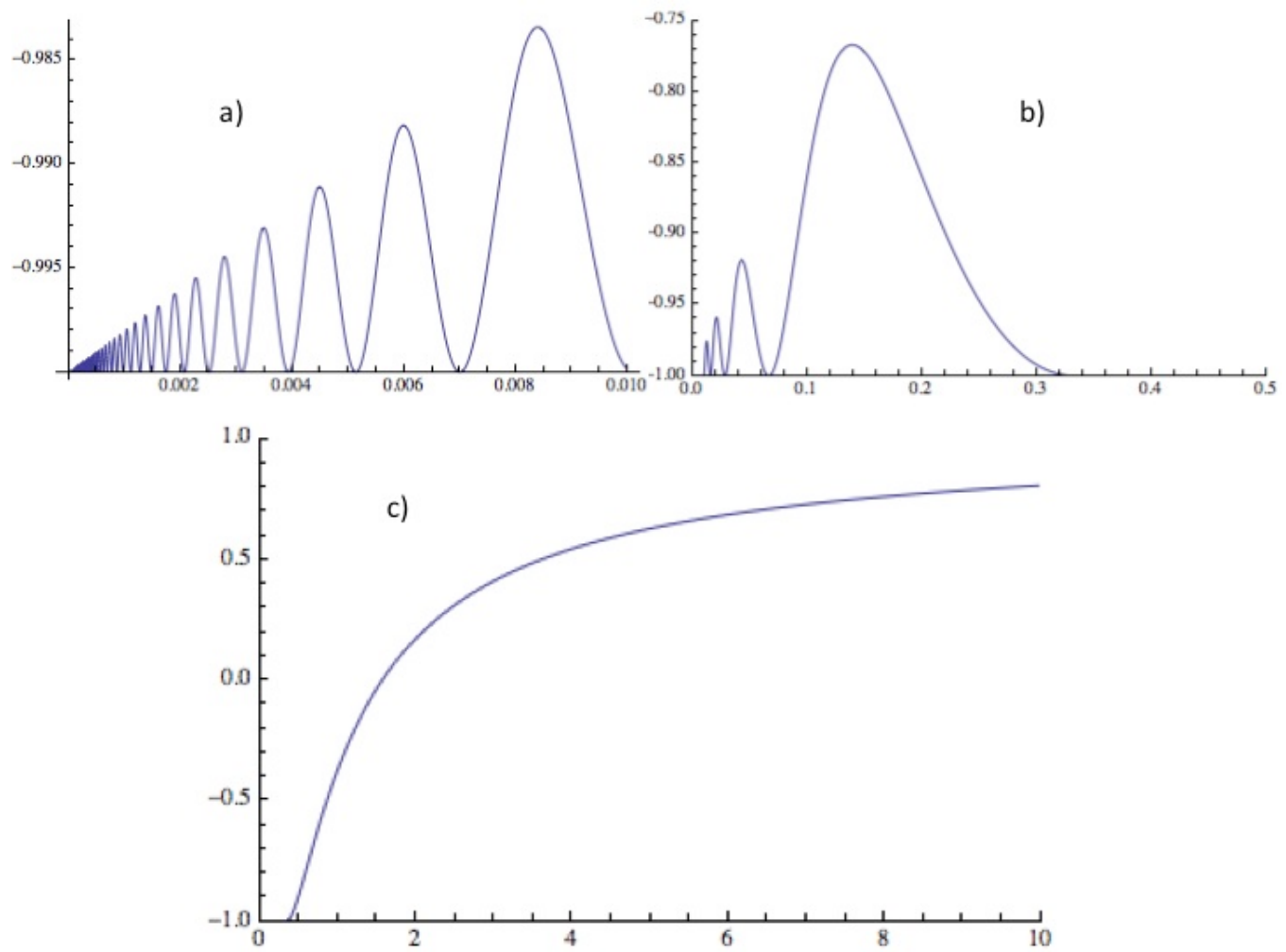


Figura 2: Andamento di $F(\eta) \equiv \cos\theta$ in funzione della variabile η , definita nel testo

essendo ξ la costante definita dall'angolo di apertura del cono mediante la relazione

$$\xi \equiv tg\Theta \quad (151)$$

In realtà, in letteratura, per le geodetiche definite da una (pseudo)metrica g , troviamo la definizione per cui se A e B sono due punti nello spazio delle coordinate e $\gamma(\lambda)$ è una curva che va da A a B quando il parametro λ varia fra 0 e 1, allora la curva in questione è una geodetica se, posto

$$S \equiv \frac{1}{2} \int_0^1 g_{\alpha\beta}(x) \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} d\lambda = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{ds}{d\lambda} \right)^2 d\lambda \quad (152)$$

accade che $\delta S = 0$.

Ricordando come viene espresso il principio di minima azione in meccanica e quali ne sono le conseguenze, questo corrisponde a definire le geodetiche attraverso una *lagrangiana* definita come

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(x) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \quad (153)$$

avendo definito

$$\dot{x}^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\lambda} \quad (154)$$

Le equazioni per le geodetiche sono quindi le equazioni di Lagrange che si ottengono dalla (153), ovvero

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = 0 \quad (155)$$

la cui forma esplicita è la seguente

$$\frac{d}{d\lambda} [g_{\alpha\nu}(x) \dot{x}^\nu] - \frac{1}{2} g_{\mu\nu,\alpha} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \quad (156)$$

dove si è posto, per comodità

$$g_{\mu\nu,\alpha} \equiv \frac{\partial}{\partial x^\alpha} g_{\mu\nu}(x) \quad (157)$$

Con questi simboli, risulta evidentemente che

$$\frac{d}{d\lambda} g_{\alpha\nu}(x) = \frac{\partial g_{\alpha\nu}(x)}{\partial x^\beta} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = g_{\alpha\nu,\beta} \dot{x}^\beta \quad (158)$$

e dunque la (156) diventa

$$g_{\alpha\nu,\beta} \dot{x}^\beta \dot{x}^\nu + g_{\alpha\nu} \ddot{x}^\nu - \frac{1}{2} g_{\mu\nu,\alpha} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0 \quad (159)$$

D'altronde

$$g_{\alpha\nu,\beta} \dot{x}^\beta \dot{x}^\nu = g_{\alpha\nu,\mu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \quad (160)$$

e anche

$$g_{\alpha\nu,\beta} \dot{x}^\beta \dot{x}^\nu = g_{\alpha\gamma,\beta} \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma = g_{\alpha\mu,\nu} \dot{x}^\nu \dot{x}^\mu = g_{\alpha\mu,\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \quad (161)$$

per cui ne concludiamo che l'equazione delle geodetiche che discende dalla definizione data, è espressa dalla relazione

$$\frac{1}{2} (g_{\alpha\mu,\nu} + g_{\alpha\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\alpha}) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + g_{\alpha\nu} \ddot{x}^\nu = 0 \quad (162)$$

Introducendo adesso $g^{\mu\nu}$ come l'inverso del tensore metrico, i.e. la matrice tale che

$$g^{\alpha\nu} g_{\nu\beta} = \delta^\alpha_\beta \quad (163)$$

ne segue che moltiplicando la (162) per $g^{\beta\alpha}$ risulta

$$g^{\beta\alpha} \frac{1}{2} (g_{\alpha\mu,\nu} + g_{\alpha\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\alpha}) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + \ddot{x}^\beta = 0 \quad (164)$$

ovvero, definendo il simbolo di Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^\beta$ nel modo seguente

$$\Gamma_{\mu\nu}^\beta \equiv g^{\beta\alpha} \cdot \frac{1}{2} (g_{\alpha\mu,\nu} + g_{\alpha\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\alpha}) \quad (165)$$

abbiamo infine che le geodetiche sono caratterizzate dal soddisfare l'equazione

$$\ddot{x}^\beta = \Gamma_{\mu\nu}^\beta \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0 \quad (166)$$

Osserviamo adesso che poiché il tensore metrico è simmetrico, ecco che $\Gamma_{\mu\nu}^\beta$ è, a sua volta, simmetrico nei due indici covarianti (in basso).

Il cono

Venendo al caso delle geodetiche sulla superficie del cono, definite dal tensore metrico (150), le componenti indipendenti di Γ sono a priori sei, e cioè

$$\Gamma_{11}^1, \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1, \quad \Gamma_{22}^1; \quad \Gamma_{11}^2, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2, \quad \Gamma_{22}^2 \quad (167)$$

Essendo g diagonale, abbiamo

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2g_{11}} [g_{11,1} + g_{11,1} - g_{11,1}] = 0 \quad (168)$$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2g_{11}} [g_{11,2} + g_{12,1} - g_{12,1}] = 0 \quad (169)$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2g_{11}} [g_{12,2} + g_{12,2} - g_{22,1}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2\xi^2 z}{1 + \xi^2} = -\frac{\xi^2}{1 + \xi^2} z \quad (170)$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2g_{22}} [g_{21,1} + g_{21,1} - g_{11,2}] = 0 \quad (171)$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2g_{22}} [g_{21,2} + g_{22,1} - g_{12,2}] = \frac{2\xi^2 z}{2\xi^2 z^2} = \frac{1}{z} \quad (172)$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2g_{22}} [g_{22,2} + g_{22,2} - g_{22,2}] = 0 \quad (173)$$

e dunque

$$(1) : \ddot{z} + \Gamma_{11}^1 \dot{z}^2 + 2\Gamma_{12}^1 \dot{z}\dot{\phi} + \Gamma_{22}^1 \dot{\phi}^2 = 0 \Rightarrow \ddot{z} - \frac{\xi^2 z}{1 + \xi^2} \dot{\phi}^2 = 0 \quad (174)$$

$$(2) : \ddot{\phi} + \Gamma_{11}^2 \dot{z}^2 + 2\Gamma_{12}^2 \dot{z}\dot{\phi} + \Gamma_{22}^2 \dot{\phi}^2 = 0 \Rightarrow \ddot{\phi} + \frac{2}{z} \dot{z}\dot{\phi} = 0 \quad (175)$$

Ma la prima equazione equivale a

$$\frac{d}{d\lambda} [(1 + \xi^2) \dot{z}] = z \xi^2 \dot{\phi}^2 \quad (176)$$

mentre la seconda equazione equivale a

$$\frac{d}{d\lambda} [z^2 \dot{\phi}] = 0 \quad (177)$$

e siccome L è una costante del moto, e dunque anche $\sqrt{2L} \equiv \mathcal{L}$ lo è, queste due equazioni coincidono rispettivamente con la (97) e la (96) ottenute partendo appunto dalla condizione di minima azione applicata direttamente a ds (cfr. (86)). In conclusione, per definire le geodetiche, utilizzare la condizione

$$0 = \delta \int ds \equiv \delta \int \sqrt{g_{\mu\nu}(x)} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} d\lambda \quad (178)$$

oppure la condizione

$$0 = \delta \int g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} d\lambda \quad (179)$$

conduce alle stesse curve. Questo non significa però che ci sia perfetta equivalenza, perché nel caso in cui il tensore metrico sia quello dello spazio-tempo della RG , allora solo nel caso (179) le soluzioni $x^\mu(\lambda)$ esse risultano essere le curve orarie, quando si identifichi il parametro λ con il tempo proprio.

Il cilindro

Passiamo ora a considerare il caso della superficie del cilindro.

Senza perdita di generalità possiamo immaginare che esso abbia come asse proprio l'asse z , per cui il suo generico punto è descritto dalle coordinate

$$\vec{P} = (R \cos\phi, R \sin\phi, z) \quad (180)$$

e dunque

$$d\vec{P} = (-R \sin\phi d\phi, R \cos\phi d\phi, dz) \Rightarrow ds^2 = R^2 d\phi^2 + dz^2 \quad (181)$$

ovvero, nelle variabili (z, ϕ) , la metrica indotta sulla superficie del cilindro da quella euclidea in R^3 , è espressa dal tensore metrico

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix} \quad (182)$$

Essendo g indipendente dalle coordinate, i simboli di Christoffel sono tutti nulli e dunque le equazioni delle geodetiche risultano essere semplicemente le seguenti

$$(1) : \ddot{z} = 0 \Rightarrow \dot{z} = v_0 \Rightarrow z = z_0 + \lambda v_0 \quad (183)$$

$$(2) : \ddot{\phi} = 0 \Rightarrow \dot{\phi} = \omega_0 \Rightarrow \phi = \phi_0 + \lambda \omega_0 \quad (184)$$

essendo v_0 e ω_0 come z_0 e ϕ_0 opportune costanti di integrazioni.

Ne risulta evidentemente che le geodetiche sul cono sono eliche (o tratti di elica) a passo costante pari a $v_0 \frac{2\pi}{\omega_0}$ e di raggio R .

La sfera

Veniamo adesso al caso della superficie della sfera che assumeremo, senza perdita di generalità, di raggio unitario e con centro nell'origine degli assi. In questo caso, il generico punto sulla superficie della sfera sarà individuato attraverso le coordinate angolari, ovvero

$$\vec{P} = (\sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\theta) \quad (185)$$

e dunque

$$d\vec{P} = d\theta(\cos\theta \cos\phi, \cos\theta \sin\phi, -\sin\theta) + d\phi \sin\theta(-\sin\phi, \cos\phi, 0) \quad (186)$$

da cui

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2 \quad (187)$$

per cui possiamo concludere che, nelle variabili (θ, ϕ) , la metrica indotta sulla superficie della sfera da quella euclidea in R^3 , è espressa dal tensore metrico

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta \end{pmatrix} \quad (188)$$

Analogamente al caso del cono, i soli simboli di Christoffel diversi da zero sono

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2} \frac{1}{g_{11}} (-g_{22,1}) = -\frac{1}{2} 2 \sin\theta \cos\theta = -\sin\theta \cos\theta \quad (189)$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{g_{22}} (g_{22,1}) = -\frac{1}{2} \frac{2 \sin\theta \cos\theta}{\sin^2\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \quad (190)$$

e quindi le equazioni delle geodetiche risultano essere le seguenti

$$(1) : \ddot{\theta} + \Gamma_{22}^1 \dot{\phi}^2 = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} - \sin\theta \cos\theta \dot{\phi}^2 = 0 \quad (191)$$

$$(2) : \ddot{\phi} + 2\Gamma_{12}^2 \dot{\theta} \dot{\phi} = 0 \Rightarrow \ddot{\phi} + 2 \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \dot{\theta} \dot{\phi} = 0 \quad (192)$$

Consideriamo adesso l'equazione

$$\frac{d}{d\lambda}(\dot{\phi} \sin^2\theta) = 0 \Rightarrow 0 = \ddot{\phi} \sin^2\theta + 2 \sin\theta \cos\theta \dot{\theta} \dot{\phi} \quad (193)$$

Essa è equivalente alla (192) in quanto $\sin\theta$ non può essere sempre identicamente nullo sulla geodetica, altrimenti questa, per la (185), si ridurrebbe ad un solo punto.

Ma il fatto che una equazione per la geodetica sia espressa dalla relazione

$$\frac{d}{d\lambda}(\dot{\phi} \sin^2\theta) = 0 \quad (194)$$

significa che la quantità $\dot{\phi} \sin^2\theta$ resta costante sulla geodetica.

Evidentemente la superficie della sfera è invariante per rotazioni intorno al suo centro, quindi non c'è perdita di generalità nell'assumere come condizione iniziale quella per cui $\theta = 0$: questo non contraddice quanto sopra perché non stiamo assumendo che i punti della geodetica abbiano sempre nulla la coordinata θ , ma solo che appartenga alla geodetica il punto che è definito dall'intersezione con la superficie della sfera dell'asse z . Però la costanza sulla geodetica della quantità $\dot{\phi} \sin^2\theta$ implica che, fissata la condizione iniziale sopra detta, debba comunque essere su tutta la geodetica

$$\dot{\phi} \sin^2\theta = 0 \quad (195)$$

Poiché, come si è detto, $\sin\theta$ non può restare identicamente nullo, ne segue che le geodetiche definite dalla condizione iniziale $\theta_0 = 0$ hanno tutte $\dot{\phi} = 0$. Abbiamo quindi

$$\theta_0 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dot{\phi} = 0 \Rightarrow \phi = \phi_0 \\ \ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \dot{\theta} = \omega_0 \Rightarrow \theta = \lambda \omega_0 \end{cases} \quad (196)$$

e dunque tutte le geodetiche che hanno come condizione iniziale $\theta_0 = 0$ sono del tipo

$$(\sin(\lambda \omega_0) \cos\phi_0, \sin(\lambda \omega_0) \sin\phi_0, \cos(\lambda \omega_0)) \quad (197)$$

Si tratta di cerchi massimi (o archi di cerchio massimo) definiti dall'intersezione della superficie della sfera con il piano che contiene l'asse z ed è inclinato di ϕ_0 nel piano xy .

Per la simmetria della sfera, possiamo adesso concludere che *tutte* le geodetiche risultano archi di cerchio massimo.

Una generica superficie di rivoluzione ...

I casi del cono, del cilindro e della sfera riguardano, evidentemente, superfici di rivoluzione intorno a un asse (l'asse z ...).

Vediamo adesso una proprietà comune a tutte le superfici di rivoluzione intorno all'asse z , ovvero quelle per le quali accade, almeno in un opportuno segmento dell'asse z , che

$$\sqrt{x^2 + y^2} = f(z) \quad (198)$$

Evidentemente i punti $\vec{P}$ di questa superficie potranno essere individuati mediante le coordinate (z, ϕ) , con

$$\begin{aligned} \vec{P} &= (f(z) \cos\phi, f(z) \sin\phi, z) \Rightarrow \\ \Rightarrow d\vec{P} &= dz \left(\frac{df}{dz} \cos\phi, \frac{df}{dz} \sin\phi, 1 \right) + d\phi f(z) (-\sin\phi, \cos\phi, 0) \end{aligned} \quad (199)$$

per cui la metrica indotta da quella euclidea è dunque tale per cui

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dz^2 \left[\left(\frac{df}{dz} \right)^2 + 1 \right] + f^2(z) d\phi^2 \quad (200)$$

Ponendo adesso, per comodità di notazione

$$f_{,z} \equiv \frac{df}{dz} \quad (201)$$

risulta, evidentemente, che

$$ds^2 = dz^2 (f_{,z}^2 + 1) + f^2(z) d\phi^2 \quad (202)$$

a cui corrisponde un tensore metrico dato da

$$g = \begin{pmatrix} 1 + f_{,z}^2 & 0 \\ 0 & f^2(z) \end{pmatrix} \quad (203)$$

Riguardo ai simboli di Christoffel, abbiamo dunque che ($f_{,,z} \equiv \frac{d^2 f}{dz^2}$)

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2g_{11}} [g_{11,1} + g_{11,1} - g_{11,1}] = \frac{f_{,z} \cdot f_{,,z}}{1 + f_{,z}^2} \quad (204)$$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2g_{11}} [g_{11,2} + g_{12,1} - g_{12,1}] = 0 \quad (205)$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2g_{11}} [g_{12,2} + g_{12,2} - g_{22,1}] = -\frac{f \cdot f_{,z}}{1 + f_{,z}^2} \quad (206)$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2g_{22}} [g_{21,1} + g_{21,1} - g_{11,2}] = 0 \quad (207)$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2g_{22}} [g_{21,2} + g_{22,1} - g_{12,2}] = \frac{f_{,z}}{f} \quad (208)$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2g_{22}} [g_{22,2} + g_{22,2} - g_{22,2}] = 0 \quad (209)$$

e dunque

$$(1) : \ddot{z} + \Gamma_{11}^1 \dot{z}^2 + 2\Gamma_{12}^1 \dot{z}\dot{\phi} + \Gamma_{22}^1 \dot{\phi}^2 = 0 \Rightarrow \ddot{z} + \frac{f_{,z}}{1 + f_{,z}^2} (f_{,,z} \cdot \dot{z}^2 - f \cdot \dot{\phi}^2) = 0 \quad (210)$$

$$(2) : \ddot{\phi} + \Gamma_{11}^2 \dot{z}^2 + 2\Gamma_{12}^2 \dot{z}\dot{\phi} + \Gamma_{22}^2 \dot{\phi}^2 = 0 \Rightarrow \ddot{\phi} + \frac{2f_{,z}}{f} \dot{z}\dot{\phi} = 0 \quad (211)$$

Osserviamo adesso che, poiché $f \neq 0$, l'equazione (211) è equivalente alla equazione

$$\frac{d}{d\lambda} [f \cdot \dot{\phi}] \quad (212)$$

ovvero stabilisce che, sulla geodetica, deve essere che

$$f(z) \cdot \dot{\phi} = K \quad (213)$$

è una costante.

Questo risultato può essere riformulato dicendo che il vettore tangente alla geodetica in un suo generico punto $\vec{P}$ ed il versore definito in $\vec{P}$ dal *parallelo* passante per quel punto, ovvero dalla circonferenza passante per $\vec{P}$ definita dall'intersezione della superficie di rivoluzione considerata con il piano $z = z(\vec{P})$, hanno un prodotto scalare che è indipendente dal punto considerato sulla geodetica data. Infatti il vettore tangente alla geodetica è dato da

$$\vec{v}(\vec{P}) = \frac{d\vec{P}}{d\lambda} = \dot{z} (f_{,z} \cos\phi, f_{,z} \sin\phi, 1) + \dot{\phi} (-f \sin\phi, f \cos\phi, 0) \quad (214)$$

mentre il versore sopracitato vale, evidentemente

$$\vec{u} = (-\sin\phi, \cos\phi, 0) \quad (215)$$

per cui

$$\vec{v} \cdot \vec{u} \equiv v \cos\psi = f \cdot \dot{\phi} \quad (216)$$

dove abbiamo indicato con ψ l'angolo fra il vettore $\vec{v}$ e il versore $\vec{u}$.