Complementi

di

Fisica Subnucleare

E. Iacopini

Dipartimento di Fisica e Astronomia, Università di Firenze
e
Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, Sezione di Firenze

December 18, 2018

Libri consigliati da consultare:

- D. Griffiths: Introduction to elementary particles
- W.R. Frazer : Elementary particles
- D.H. Perkins: Introduction to high energy physics
- I.J.R. Aitchinson: Gauge theory in particle physics
- J.D. Bjorken, S.D. Drell : Relativistic quantum mechanics
- J.D. Bjorken, S.D. Drell : Relativistic quantum fields
- S. Weinberg : The Quantum Theory of Fields
- H. Muirhead : The Physics of elementary particles

Contents

E io stesso ho osservato anche che ogni fatica
e tutta l'abilità messe in un lavoro
non sono che rivalità dell'uno con l'altro.
Anche questo è vanità e un correr dietro al vento.

Salomone, Ecclesiaste 4:4

La Filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamento ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi ed altre figure geometriche, senza i quali mezi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto.

Il Saggiatore (1623).

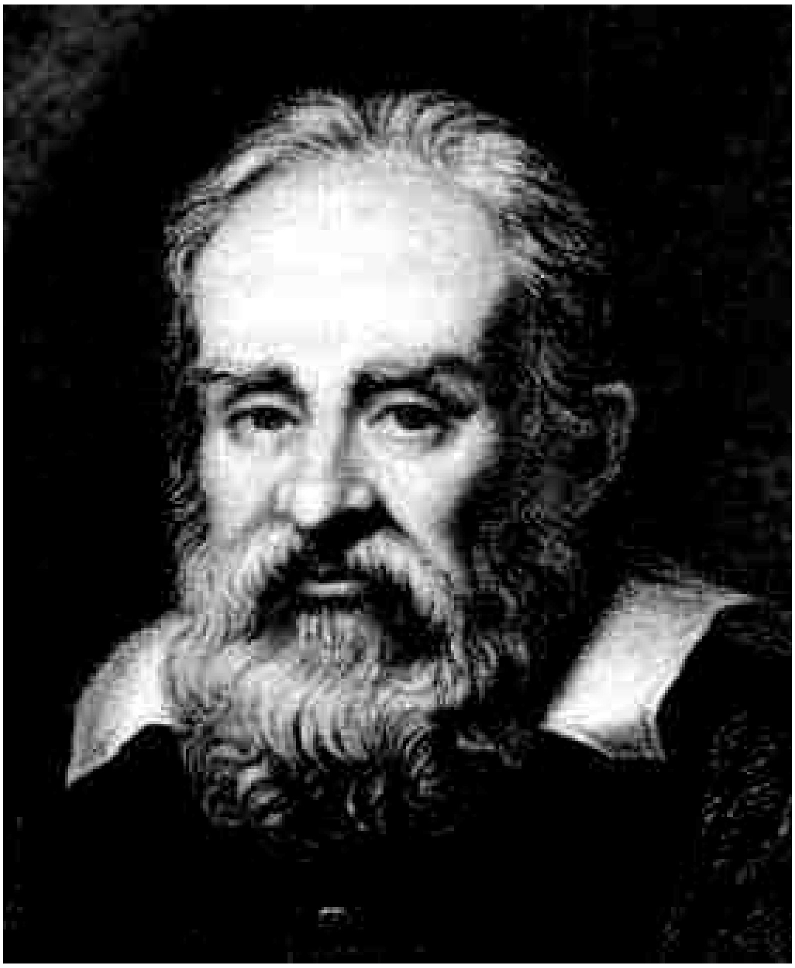


Figure 1: *Galileo Galilei (1564-1642)*

1 Introduzione

La Fisica subnucleare studia le interazioni fondamentali più rilevanti[1] che esistono fra le particelle elementari[2].

[1] L'interazione gravitazionale è del tutto trascurabile, almeno nel dominio di energie a cui siamo interessati. Si noti, a questo proposito, per esempio, che il rapporto fra l'energia di interazione gravitazionale ed elettromagnetica fra due protoni vale circa 0.8×10^{-38} !

[2] Ricordiamo a questo proposito che a una particella elementare dobbiamo richiedere di avere definite almeno due quantità fisiche tipiche, che sono la sua massa m e il suo spin s. Questa esigenza discende, come è noto, dal fatto che, se lo spazio-tempo è omogeneo (invariante per traslazioni) e vale l'invarianza relativistica, allora lo spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ degli stati di una particella deve essere trasformato in sé sotto il gruppo di Poincaré $\mathcal{P}$ (traslazioni in quattro dimensioni e trasformazioni del gruppo di Lorentz ortocrono proprio $\mathcal{L}_+^\uparrow$), i cui elementi agiscono in $\mathcal{H}$ come simmetrie unitarie.

Alla particella elementare viene richiesto di essere tale per cui lo spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ dei vettori di stato non deve avere sottospazi invarianti (non banali) sotto queste trasformazioni, ovvero di essere caratterizzata dal fatto che la rappresentazione unitaria di $\mathcal{P}$ su $\mathcal{H}$ sia irriducibile. Queste rappresentazioni, come è stato dimostrato da Wigner, per esempio, in

E. Wigner: *On Unitary Representations of the Inhomogeneous Lorentz Group*

Ann. Math. 40, 149 (1939)

sono individuate completamente dagli autovalori assunti sullo spazio di Hilbert dei vettori di stato del sistema dai due soli operatori di Casimir (costruiti quindi con i generatori del gruppo) indipendenti (almeno nel caso di particelle con massa), i quali, per definizione, commutano con tutti i generatori del gruppo stesso, i.e. gli invarianti

$$P^\mu P_\mu \to m^2\,; \qquad W^\mu W_\mu \to -\,m^2\, s(s+1)$$

dove P^μ è l'operatore di quadrimpulso, i.e. l'operatore che genera le traslazioni nello spazio-tempo, mentre il quadrivettore di Pauli-Lubanski $W_\mu \equiv \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho}\, M^{\nu\sigma} P^\rho$ è legato anche ai generatori $M^{\sigma\rho}$ del gruppo di Lorentz, per cui risulta

$$W^0 = \vec{P}\cdot\vec{J}; \quad \vec{W} = P_0\,\vec{J} - \vec{P}\times\vec{K}$$

essendo i generatori $M^{\sigma\rho}$ definiti implicitamente dalla consueta parametrizzazione della generica trasformazione di Lorentz (attiva), secondo la quale abbiamo

$$\Lambda \;=\; e^{-\frac{i}{2}\,\alpha_{\mu\nu}\,M^{\mu\nu}}; \qquad (M^{\mu\nu})^{\alpha}_{\cdot\,\beta} = i(\delta^{\mu\alpha}\delta^{\nu}_{\beta} - \delta^{\nu\alpha}\delta^{\mu}_{\beta}) \tag{1.1}$$

$$\Rightarrow\; [M^{\mu\nu},\, M^{\sigma\rho}] = -i\,(\delta^{\mu\sigma}M^{\nu\rho} + \delta^{\nu\rho}M^{\mu\sigma} - \delta^{\mu\rho}M^{\nu\sigma} - \delta^{\nu\sigma}M^{\mu\rho}) \tag{1.2}$$

con $\alpha_{\mu\nu}$ matrice reale antisimmetrica dei parametri.
Usando la consueta definizione dei generatori delle rotazioni $\vec{J}$ ($\Rightarrow\; R(\vec{\phi}) = e^{i\vec{\phi}\cdot\vec{J}}$) e dei generatori dei boosts $\vec{K}$ ($\Rightarrow\; B(\eta\vec{n}) = e^{i\eta\,\vec{n}\cdot\vec{K}}$; $\eta \equiv th^{-1}\beta$), ne segue che (sia le rotazioni che i boost sono trasformazioni attive, cioè agenti sul sistema e non sul riferimento, che resta fisso !)

$$\vec{J} \equiv (M^{23}, M^{31}, M^{12}); \quad \vec{K} \equiv (M^{01}, M^{02}, M^{03}) \tag{1.3}$$

$$[J_m, J_n] = i\epsilon_{mnr}\, J_r; \quad [J_m, K_n] = i\epsilon_{mnr}\, K_r; \quad [K_m, K_n] = -i\epsilon_{mnr}\, J_r \tag{1.4}$$

Circa poi le regole di commutazione di questi generatori con l'impulso, ricordiamo che risulta

$$[M^{\mu\nu}, P^\sigma] = i(P^\mu\delta^{\nu\sigma} - P^\nu\delta^{\mu\sigma}) \tag{1.5}$$

$$i.e.\quad [J_m, P_n] = i\epsilon_{mnr}\, P_r; \;\; [J_m, P_0] = 0; \;\; [K_m, P_n] = i\,P_0\,\delta_{mn}; \;\; [K_m, P_0] = -i\,P_m$$

Nel seguito daremo per noto quanto già illustrato nella parte propedeutica, cioè nel Corso di "Fisica Subnucleare".
In quell'ambito abbiamo visto come il quadro delle particelle elementari[3] e delle loro interazioni costituisca il cosiddetto *Modello Standard.*
Quanto alle particelle elementari, come si è visto, in questo modello esse sono raggruppate in tre generazioni di massa crescente di "*leptoni*", soggetti solo all'interazione elettrodebole

$$\begin{array}{llll} \nu_e(\bar\nu_e) & \nu_\mu(\bar\nu_\mu) & \nu_\tau(\bar\nu_\tau) & carica\ 0 \\ e^-(e^+) & \mu^-(\mu^+) & \tau^-(\tau^+) & carica\ -1(+1) \end{array}$$

e in tre generazioni di massa crescente di "*quarks*", soggetti anche all'interazione forte

$$\begin{array}{llll} u(\bar u) & c(\bar c) & t(\bar t) & q = +2/3\ (-2/3) \\ d(\bar d) & s(\bar s) & b(\bar b) & q = -1/3\ (+1/3) \end{array}$$

Sia i leptoni che i quarks sono particelle di Dirac di spin 1/2, quindi fermioni.
Sempre nel Modello Standard, le interazioni fra le particelle elementari di cui sopra sono descritte da teorie di gauge rinormalizzabili, costruite nell'ambito della Teoria dei Campi Relativistica (QFT).
Ciascuna interazione ha il proprio mediatore, per cui

- il fotone trasmette l'interazione elettromagnetica;
- il $W^\pm$ e lo Z^0 trasmettono l'interazione debole[4] propriamente detta;
- i gluoni trasmettono l'interazione forte.

Tutti i mediatori sono particelle di spin 1, quindi bosoni.

---

da cui segue in particolare che lo scalare di Lorentz $W^\mu W_\mu$ commuta con P^σ.

Venendo infine al caso della massa nulla, le rappresentazione irriducibili di $\mathcal{P}$ sono ancora più semplicemente caratterizzate solo in termini di un numero quantico intero o semidispari λ, che è chiamato *elicità*, la quale descrive la proiezione dello spin intrinseco della particella nella direzione del suo impulso. Questa quantità, se la massa è nulla e quindi la particella viaggia costantemente alla velocità della luce, è invariante per trasformazioni di Lorentz.

[3]Ricordiamo che per particella elementare intendiamo una particella di cui non è nota alcuna struttura interna. Questo aspetto, come già abbiamo avuto modo di mettere in evidenza, non ha nulla a che vedere con l'eventuale instabilità della particella stessa poiché l'instabilità non è legata al fatto che i prodotti del decadimento siano *costituenti* della particella instabile!
Il muone, per esempio, che decade in un elettrone, un neutrino ed un antineutrino, per quanto ne sappiamo fino ad oggi, è una particella elementare e l'elettrone il neutrino e l'antineutrino a cui dà luogo non sono in nessun senso suoi costituenti. Il decadimento avviene solo perché le interazioni deboli accoppiano lo stato di muone con quello fatto dalle tre particelle suddette, per cui è possibile una transizione da uno stato all'altro...

[4]In realtà l'interazione elettromagnetica e debole sono unificate nella Teoria Elettrodebole.

Occorre poi aggiungere a questo quadro un'altra particella, cioè il Bosone di Higgs. Si tratta di una particella scalare, postulata da gran tempo e finalmente osservata nel 2012 all'acceleratore LHC del $CERN$ di Ginevra, di massa $M_H = 126 \pm 1\, GeV$, neutra, antiparticella di se stessa, CP pari. Questa particella è la manifestazione del campo di Higgs, il quale, attraverso il meccanismo della rottura spontanea della simmetria di gauge locale che caratterizza la teoria elettrodebole, consente di dare massa ai bosoni vettori $W^\pm$ e Z, altrimenti di massa nulla, lasciando questa caratteristica solo al fotone[5]. Simmetrie di gauge locale esatte comportano infatti massa nulla per i loro mediatori: la possibilità di mantenere la struttura di simmetria di gauge locale, necessaria per esempio per assicurarne la rinormalizzabilità, insieme ad una massa non nulla dei mediatori è offerta dal meccanismo di Higgs, il quale prevede l'esistenza di un vuoto degenere e un valore di aspettazione sul vuoto non nullo della componente reale del campo di Higgs

$$< \phi_H > \equiv v \neq 0 \tag{1.6}$$

legato alla sua stessa massa dalla relazione

$$M_H = v\,\sqrt{2\lambda} \tag{1.7}$$

dove λ è un parametro della teoria da fissare sperimentalmente.
Attraverso una opportuna estensione del meccanismo di Higgs (accoppiamento alla Yukawa), esso può determinare anche la rottura spontanea della simmetria chirale relativa ai campi leptonici, di massa nulla nel MS, e generare così nella lagrangiana un termine di massa[6] anche per loro, anche se al prezzo di una costante di accoppiamento per ogni leptone carico ...
I dettagli di questo meccanismo esulano dal Corso, nell'ambito del quale non tratteremo neppure la QCD.

[5] Anche i gluoni e il gravitone hanno massa nulla, ma il meccanismo di Higgs non li riguarda.

[6] La simmetria chirale nasce per il sistema dei quarks u e d, doppietto di isospin. Consiste nella possibilità di "ruotare" l'isospin sulla parte left, ottenuta proiettando i campi di Dirac con il proiettore chirale $(1-\gamma_5)/2$, in modo indipendente dalla parte right, ottenuta proiettando con $(1+\gamma_5)/2$. Questa simmetria è esatta per massa dei quarks nulla ed è rotta dal termine di massa, che, nella lagrangiana è proporzionale a $\bar{\psi}_R\psi_L + \bar{\psi}_L\psi_R$.
Limitandoci per semplicità al caso leptonico, nella teoria di Glashow, Weinberg e Salam, il doppietto è fatto dai campi del neutrino e del leptone carico corrispondente, nella loro proiezione left che entra, appunto, nell'interazione debole di corrente carica e la "rotazione" su questo sistema riflette appunto la simmetria sotto il gruppo di isospin debole.
Ricordiamo che la parte right è presente solo per il leptone carico e, nel caso per esempio del doppietto elettrone-neutrino, l'accoppiamento con il campo di Higgs ϕ (doppietto) è del tipo seguente

$$-g\,(\bar{l}_L\phi\, e_R + \bar{e}_R\,\phi^\dagger l_L)$$

avendo indicato con l_L la componente left del doppietto di isospin debole (ν_e, e) ed essendo g la costante di accoppiamento tipica di quel leptone.

1.1 Introduzione alla Teoria dei Campi classica

La Teoria Quantistica dei Campi (QFT) nasce dalla sintesi della teoria classica dei campi (cfr. Appendice), il cui paradigma principale è il campo elettromagnetico classico, con la teoria della Meccanica Quantistica e quella della Relatività Ristretta.

Il campo, che indicheremo per il momento genericamente con $\Phi(x)$, ma senza implicare con questo che esso non possa avere più componenti, viene visto, in ogni punto dello spazio-tempo, come una sorta di coordinata lagrangiana generalizzata e come tale, in MQ, esso è un operatore che agisce nello spazio di Hilbert dei vettori di stato. La sua evoluzione, cioè le equazioni del campo, sono ottenute a partire da una opportuna densità lagrangiana, funzione reale (e dunque *autoaggiunta* nella sua trasposizione quantistica) e scalare di Lorentz (in modo da garantire equazioni di moto covarianti) del campo e delle sue derivate $\mathcal{L}(\Phi(x), \partial\Phi(x), x)$, attraverso il principio di minima azione, che fornisce, come è noto, l'equazione

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi^\alpha)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^\alpha} = 0 \tag{1.8}$$

dove abbiamo riportato esplicitamente l'eventuale indice associato alle possibili componenti del campo Φ.

Sempre attraverso la densità lagrangiana possiamo poi definire l'impulso coniugato al campo (ricordiamo che il campo in ogni punto deve essere visto come una coordinata lagrangiana generalizzata ...)

$$\Pi^\alpha(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}^\alpha(x)} \tag{1.9}$$

e quindi stabilire l'algebra del campo, attraverso le regole di commutazione (o anticommutazione) canoniche.

Un concetto cruciale per la comprensione del quadro attuale delle particelle elementari e delle loro interazioni, su cui vogliamo adesso fare qualche considerazione di carattere generale, è certamente quello della *simmetria*[7,8].

---

[7] A questo proposito, ricordiamo che, come avremo modo di giustificare in seguito, un operatore $\mathcal{O}$ che descriva un isomorfismo unitario o antiunitario dello spazio di Hilbert degli stati in sé, è detto costituire una *simmetria* del sistema considerato.
Essa è *conservata* o *esatta* se lo stato di minima energia (vuoto) è non degenere e $\mathcal{O}$-invariante, mentre la lagrangiana del sistema risulta invariante in forma sotto la trasformazione in questione, ovvero se l'operatore $\mathcal{O}$ commuta con l'hamiltoniana del sistema e dunque ne rispetta la dinamica.
Si parla poi, invece, di *simmetria rotta spontaneamente* se la lagrangiana è invariante in forma ma lo stato di minima energia è degenere e non invariante sotto $\mathcal{O}$. Infine, la simmetria è detta semplicemente *rotta* se la lagrangiana non è invariante in forma sotto $\mathcal{O}$.

[8] La parola *simmetria* significa *"della stessa misura"* ed esprimeva, nel mondo greco, il

Nel seguito tratteremo diffusamente solo il caso delle simmetrie discrete, ma non possiamo non richiamare brevemente uno dei risultati più importanti ottenuti

concetto di commensurabilità, proporzione, rapporto armonico di dimensioni ... e per questo era legato anche al concetto stesso di bellezza. Da allora, il concetto di simmetria si è evoluto e certamente una sua definizione fra le più espressive e chiare è quella operativa di Hermann Weyl, secondo il quale *una entità possiede una simmetria se c'è qualcosa che possiamo fargli in modo che, dopo che l'abbiamo fatta, l'entità in questione continua ad apparire esattamente come prima.* In questa accezione, simmetria e invarianza risultano evidentemente sinonimi: torneremo in seguito su questo aspetto !
Una simmetria che in Natura è molto comune è quella *destra-sinistra*, cioè la simmetria bilaterale o chirale: una specie di prendi 2 e paghi 1 !
L'insieme delle operazioni che lasciano invariante un sistema assegnato costituisce, come oggi sappiamo, un *gruppo*, ed è proprio questo strumento matematico che ha reso, poi, estremamente fertile il concetto di simmetria in Fisica.
Ma come si è arrivati al concetto di gruppo di simmetria ?
Dal tentativo di trovare la formula risolutiva delle equazioni algebriche di grado superiore al quarto ! Vediamo brevemente come è successo.
L'idea dell'equazione di primo grado e quindi l'idea stessa dell'incognita era nota, forse, già in epoca babilonese (1650 a.C., papiro di Ahmes) e si sapeva anche come risolverla

$$ax + b = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -b/a$$

Anche l'equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$ si sa risolvere da tempo immemorabile, certamente da Diofanto (250 d.C.) in poi, anche se venivano cercate solo soluzioni positive (superfici, lunghezze, compensi ...) per cui accadeva talvolta che le soluzioni erano due, talvolta una sola e talvolta addirittura nessuna !
E' solo da Gauss ($1777 - 1855$) in poi, infatti, che sappiamo che, pur di cercare le soluzioni nel posto giusto, cioè nel campo complesso, una equazione di grado n ammette n soluzioni (eventualmente in parte coincidenti). Comunque, ben prima di Gauss, cioè fin dall'inizio del sedicesimo secolo, si sapeva risolvere l'equazione generale di terzo grado (Del Ferro, Tartaglia, Cardano) e anche quella di quarto grado (Ferrari, 1545); però, quanto all'equazione di quinto grado, ogni sforzo continuava miseramente a fallire !
Furono Ruffini (1799) ed Abel (1824) i quali, indipendentemente, dimostrarono che ogni sforzo per trovare una risolvente generale era vano, ma la vera spiegazione del motivo del fallimento fu trovata successivamente da Evariste Galois (1832), il quale affrontò il problema da un lato completamente nuovo, ed è qui che entra, appunto, la simmetria ! Egli provò a caratterizzare le equazioni attraverso le proprietà di permutazione dei polinomi a coefficienti razionali che si annullano sulle soluzioni dell'equazione data.
Sembra un discorso complicato ma non lo è: prendiamo, per esempio, la generica equazione (propria) di secondo grado $x^2 + bx + c = 0$ con b, c razionali. Se x_1 ed x_2 sono le sue radici, allora

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 + bx + c \quad \Rightarrow \quad b = -(x_1 + x_2); \;\; c = x_1 x_2$$

dunque esistono almeno due polinomi razionali indipendenti

$$P_1(\alpha, \beta) = \alpha + \beta + b; \quad P_2(\alpha, \beta) = \alpha\beta - c$$

che si annullano sulle soluzioni dell'equazione data, ed essi sono simmetrici per scambio.
L'idea di Galois fu dunque di considerare *tutti* i polinomi a coefficienti razionali che si annullano sulle radici dell'equazione data. Le permutazioni delle variabili del polinomio che lasciano invariante il suo valore (nullo) quando viene valutato sulle soluzioni dell'equazione costituiscono il *gruppo di Galois* associato all'equazione. Egli dimostrò, in generale, che questo gruppo

nel ventesimo secolo, riguardo al legame fra simmetrie e costanti del moto, cioè il Teorema di Noëther (1918) (per la sua dimostrazione rimandiamo all'Appendice). Questo Teorema vale per simmetrie "continue", descritte cioè da un gruppo di Lie e afferma che a ogni parametro del gruppo, ovvero a ogni suo generatore, è associata una corrente conservata. Più precisamente, esso stabilisce che, data una lagrangiana $\mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x), x)$ la quale sia invariante in forma sotto le trasformazioni descritte da un gruppo di Lie $G(\omega^a)$, allora, se l'azione della generica trasformazione infinitesima del gruppo descritta dal parametro ω^a è tale che

$$x \to x' \;:\; x'^\mu = x^\mu \;+\; \Xi^\mu_a(x)\, d\omega^a \;\equiv\; x^\mu \;+\; \delta x^\mu \tag{1.10}$$

$$\phi^\alpha(x) \to \phi'^\alpha(x') \;:\; \phi'^\alpha(x') \;=\; (\delta^\alpha_\beta \;+\; \Gamma^\alpha_{a\beta}\, d\omega^a)\; \phi^\beta(x) \equiv \phi^\alpha(x) + \delta\phi^\alpha(x) \tag{1.11}$$

ne segue che le quadricorrenti

$$\Theta^\mu_a(x) \;\equiv\; \left[-\Gamma^\alpha_{a\beta}\, \phi^\beta(x) \;+\; \partial_\nu \phi^\alpha(x)\; \Xi^\nu_a(x)\right] \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)} - \mathcal{L}\, \Xi^\mu_a(x) \tag{1.12}$$

sono tutte, separatamente conservate.
Vediamo ora due applicazioni del teorema (per una trattazione più esaustiva, rimandiamo di nuovo all'Appendice).
Se la lagrangiana non dipende esplicitamente dalle coordinate spazio-temporali, ovvero se $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x))$, allora essa è necessariamente invariante in forma sotto il gruppo di Lie a quattro parametri delle traslazioni, la cui azione è definita da

$$x \to x' : \quad x'^\mu = x^\mu + \delta^\mu_a\, d\omega^a \quad \Rightarrow \quad \Xi^\mu_a = \delta^\mu_a \tag{1.13}$$

$$\phi^\alpha(x) \to \phi'^\alpha(x') = \delta^\alpha_\beta\, \phi^\beta(x) \quad \Rightarrow \quad \Gamma^\mu_{a\beta} = 0 \tag{1.14}$$

per cui, secondo la (1.12), le seguenti quattro correnti (ponendo, per maggiore chiarezza di notazioni, $a = \nu$)

$$\Theta_{\mu\nu}(x) \;=\; [\partial_\rho \phi^\alpha(x)\; \delta^\rho_\nu]\, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi^\alpha)} - \mathcal{L}\, \delta_{\mu\nu} = \partial_\nu \phi^\alpha(x)\; \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi^\alpha)} - \mathcal{L}\, \delta_{\mu\nu} \tag{1.15}$$

---

coincide con il gruppo S_n delle permutazioni di n oggetti, dove n è il grado dell'equazione. Galois dimostrò altresì che le radici di un'equazione potevano essere espresse a partire dalle quattro operazioni ed estrazioni di radice su espressioni costruite con i suoi coefficienti se e solo se, ordinando il gruppo in sottogruppi normali (S è un sottogruppo normale se, dato comunque un elemento x del gruppo, allora $xSx^{-1} = S$) massimali, i rapporti fra le loro cardinalità erano numeri primi.
Nel caso di S_2, S_3 ed S_4 questo è vero, mentre da S_5 in poi questo diventa falso ...

E' dunque per questa strada che si giunse al concetto di *gruppo* e in particolare a quello di gruppo di simmetria. Ma una volta definito il gruppo, questa entità matematica astratta può venire slegata dalla sua particolare rappresentazione su un qualunque sistema assegnato, per cui si è finito oggi per separare il concetto di simmetria (operazione) da quello di invarianza (effetto dell'operazione sul sistema dato), anche se, talvolta, si continuano a confondere i due aspetti.

soddisfano separatamente la condizione di conservazione $\partial^\mu \Theta_{\mu\nu}(x) = 0$ e dunque risulta che, definendo

$$P_\nu(t) \equiv \int d^3x \; \Theta_{0\nu}(x) \tag{1.16}$$

questa "carica" è conservata nel tempo, ovvero è una costante del moto.
Nel caso presente, non è difficile riconoscere nella (1.15) la definizione del tensore energia-impulso

$$T_{\mu\nu}(x) \; = \; \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi^\alpha)} \, \partial_\nu \phi^\alpha(x) \; - \mathcal{L} \, \delta_{\mu\nu} \tag{1.17}$$

per cui il teorema di Noëther mostra come la conservazione del quadrimpulso in un sistema isolato sia la conseguenza dell'invarianza (simmetria) per traslazioni della lagrangiana del sistema considerato.

Passiamo adesso al secondo esempio di applicazione del Teorema di Noëther, particolarmente rilevante nell'ambito della Meccanica Quantistica.
Assumiamo che la Lagrangiana $\mathcal{L}$ riguardi i campi $\psi \equiv \psi_1$ e $\psi^* \equiv \psi_2$, indipendenti nel senso della loro parte reale e immaginaria. Assumiamo altresì che $\mathcal{L}$ sia invariante in forma sotto una trasformazione di gauge di prima specie[9], i.e. sotto la trasformazione infinitesima interna ai campi[10]

$$\begin{array}{ccccccc} x'^\mu & \to & x^\mu & & \Xi^\mu(x) = 0 & ; & \\ \psi & \to & \psi + i\alpha\,\psi & \Rightarrow & \Gamma^1_1 = i & ; & \Gamma^1_2 = 0 \; ; \\ \psi^* & \to & \psi^* - i\alpha\,\psi^* & & \Gamma^2_1 = 0 & ; & \Gamma^2_2 = -i \; ; \end{array}$$

In questo caso, la corrente conservata garantita dal Teorema di Noëther, poiché la trasformazione non ha effetto sulle coordinate, è unicamente determinata dal solo effetto sui campi e ha la forma seguente

$$J^\mu(x) = i \left[- \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} \, \psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi^*)} \, \psi^* \right] \tag{1.18}$$

che, nello schema di prima quantizzazione, è proporzionale alla densità di corrente di probabilità.

Consideriamo infatti l'equazione di Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V \, \psi \tag{1.19}$$

[9] In questo caso il gruppo di simmetria è il gruppo di Lie (abeliano) a un parametro $U(1)$ fatto dagli elementi $e^{i\alpha A}$, dove A è il generatore del gruppo stesso che, nella rappresentazione del gruppo che descrive la gauge di prima specie, coincide semplicemente con l'unità.

[10] Quanto agli indici, per uniformità di notazione con quanto precede, assoceremo l'indice 1 al campo ψ e l'indice 2 al campo ψ^*.

Essa si ottiene, via il principio di minima azione, a partire dalla seguente densità lagrangiana

$$\mathcal{L} = i\frac{\hbar}{2}\left(\psi^*\partial_0\psi - \psi\partial_0\psi^*\right) + \frac{\hbar^2}{2m}\left(\partial_j\psi^*\right)\left(\partial^j\psi\right) - \psi^* V\,\psi \tag{1.20}$$

Infatti se prendiamo, per esempio, le equazioni del moto definite attraverso ψ^*

$$\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi^*)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^*} = 0 \tag{1.21}$$

abbiamo che

$$\partial_0\left(-i\frac{\hbar}{2}\psi\right) + \partial_j\left(\frac{\hbar^2}{2m}\partial^j\psi\right) - i\frac{\hbar}{2}\partial_0\psi + V\,\psi = 0 \tag{1.22}$$

ovvero, ricordando che $\partial_j\,\partial^j = -\nabla^2$

$$-i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\,\psi = 0 \tag{1.23}$$

che è appunto l'equazione di Schrödinger.
Evidentemente la densità lagrangiana (1.20) è invariante in forma sotto una trasformazione di gauge di prima specie, data la simmetria con cui in essa compaiono ψ e ψ^*. La corrente conservata che ne discende sulla base del teorema di Noëther, ovvero l'espressione che assume in questo caso la (1.18), è la seguente

$$J^\mu = \hbar\left(\psi\psi^*, \frac{-i\hbar}{2m}(\psi^*\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*)\right) \tag{1.24}$$

che, a meno del fattore moltiplicativo $\hbar$ è appunto l'espressione della corrente di probabilità.

2 Simmetrie discrete

Nel Modello Standard (MS) le particelle elementari e i mediatori delle interazioni sono descritti da un campo $\Phi(x)$, in generale *complesso*, le cui proprietà di trasformazione dipendono dalle caratteristiche specifiche della particella stessa. Se il campo è intrinsecamente complesso, ovvero se, più propriamente, $\Phi^\dagger(x)$ è indipendente[11] da $\Phi(x)$, allora particella e antiparticella risultano distinte (pur avendo esse la stessa massa e lo stesso spin), mentre se questo non accade come, per esempio, nel caso di un campo reale, la particella descritta è una sola e particella ed antiparticella coincidono[12]. Il discrimine fra i due casi è l'eventuale presenza di carica (non necessariamente elettrica ...) associata alla particella: affinché essa possa essere antiparticella di se stessa è necessario che tutte le sue cariche (ovvero i numeri quantici additivi che la caratterizzano, come la carica elettrica, il numero barionico, la stranezza, etc ...) siano nulle.

Dunque, per esempio, nel caso dei fermioni, essendo essi tipicamente carichi, la particella risulta solitamente distinta[13] dall'antiparticella[14].

Nemmeno per i bosoni neutri (come il fotone) però la cosa è così automatica: come sappiamo, il π^0 è antiparticella di se stesso, ma il K^0 no !

Il punto sta unicamente nella legge di trasformazione del campo sotto la coniugazione di carica C, una simmetria discreta che, insieme alla inversione tem-

[11] Questa affermazione va intesa nel senso che i campi $(\Phi + \Phi^\dagger)$ e $(\Phi - \Phi^\dagger)$ sono indipendenti.

[12] Un caso in cui questo accade è, per esempio, quello del fotone: il campo A_μ è intrinsecamente reale e il fotone non è diverso dall'antifotone.

[13] Questo non è in nessun modo una necessità legata al fatto che il campo usato per descrivere i fermioni è spinoriale, infatti il campo di Majorana, pur essendo spinoriale, non distingue la particella dall'antiparticella.

[14] Per i neutrini non è ancora chiaro se questo sia vero, cioè se si tratti di particelle di Dirac ($\Rightarrow$ neutrino $\neq$ antineutrino) o di Majorana ($\Rightarrow$ neutrino $\equiv$ antineutrino).
Ricordiamo, per prima cosa, che noi siamo soliti definire *antineutrino* quella particella che, interagendo, può convertirsi in un leptone carico positivamente, cioè in un *antileptone*, o che, in un processo di decadimento debole, viene emesso simultaneamente a un leptone carico negativamente. In modo analogo definiamo il *neutrino* come quella particella che, interagendo, può convertirsi in un leptone negativo oppure che è emesso, in un processo di decadimento debole, simultaneamente a un leptone positivo.
E' lecito ora chiedersi, però, quale sia la caratteristica intrinseca che rende un neutrino capace di produrre leptoni negativi e che conferisce all'antineutrino le caratteristiche opposte.
Se i neutrini hanno massa diversa da zero, come ormai sembra ben assodato in base ai dati sperimentali di oscillazione di neutrino raccolti, allora sono possibili due risposte distinte.

La prima possibilità è che i neutrini posseggano una *carica*, il numero leptonico, che si conserva rigorosamente e che vale $+1$ per neutrini e leptoni carichi negativamente, e -1 per antineutrini e leptoni carichi positivamente. In questo caso, il neutrino è distinto dalla sua antiparticella dal numero leptonico, in modo simile a quanto avviene per esempio per l'elettrone quanto alla carica elettrica. Si parla allora di "particella di Dirac" in quanto gli stati (liberi) di una tale particella possono essere descritti in termini di soluzioni dell'equazione di Dirac, i.e.

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi(x) = 0$$

porale T ed alla parità P cercheremo adesso di approfondire.

Per chiarire meglio il significato e il modo di agire di queste simmetrie, inizieremo ricordando come operano nell'ambito dello schema di prima quantizzazione, ovvero nell'ambito della Meccanica Quantistica non relativistica elementare.

Anche se può sembrare banale, inizieremo con il puntualizzare, in questo contesto, la distinzione fra proprietà *cinematiche* e *dinamiche* di un sistema fisico, perchè questo è un punto che deve essere ben chiaro, per poter afferrare più compiutamente il concetto stesso di simmetria.

A questo scopo inizieremo richiamando, innanzitutto, alcuni aspetti formali relativi alla formulazione della MQ, che dovrebbero comunque essere già a tutti ben noti, ma che sono essenziali affinché sia chiara la distinzione in questione.

C'è però una seconda possibilità, anch'essa in accordo con i dati sperimentali, secondo la quale la particella che chiamiamo *neutrino* potrebbe essere semplicemente lo stato di una particella neutra di spin 1/2, caratterizzato dal possedere elicità negativa, mentre per la particella che chiamiamo *antineutrino* essa sarebbe positiva.
In questo caso neutrino ed antineutrino sono semplicemente la stessa particella, differenziate solo dallo stato di spin: il numero leptonico non ha nessun significato fisico.
In questo scenario, un neutrino siffatto può essere descritto in termini di soluzioni dell'equazione di Majorana (E. Majorana, *Teoria simmetrica dell'elettrone e del positrone* , Il Nuovo Cimento 14 (1937) 171-184), i.e.

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi(x) - m\Psi_C(x) = 0$$

dove $\Psi_C(x) \equiv i\gamma^2 \Psi^*(x)$ (questo è equivalente alla notazione che useremo in seguito per il campo di Dirac, in cui $\Psi_C = \mathcal{C}^{-1}\bar{\Psi}^t$, con $\mathcal{C} = i\gamma^0\gamma^2 = -\mathcal{C}^{-1}$).
Nel caso particolare in cui $\Psi = \Psi_C$, l'equazione descrive una particella che coincide con la propria antiparticella, i.e. una particella di Majorana.

Se i neutrini fossero privi di massa, le due descrizioni sarebbero indistinguibili. Essendo in questo caso l'elicità un buon numero quantico (cioè invariante di Lorentz), scegliere una descrizione o l'altra risulta solo in una pura operazione di natura nominalistica, in cui si sostituisce, per esempio, l'espressione "elicità negativa" a quella "numero leptonico positivo " e viceversa.
I neutrini di Dirac hanno due componenti sterili che quelli di Majorana non hanno, ma, *nel caso di massa nulla*, non ci sono comunque differenze osservabili fra i due tipi di neutrino legate alle interazioni deboli.

Se però i neutrini hanno una massa non nulla, siccome elicità e chiralità sono ora due cose diverse e l'elicità non è un buon numero quantico (come lo dimostra il fatto che un opportuno boost di Lorentz è in grado di cambiarne il valore ...) ecco che un neutrino di Majorana può comportarsi sia come un neutrino che un antineutrino di Dirac.
Nel caso di neutrini massivi di Majorana diventa possibile, per esempio, il decadimento *doppio beta* senza emissione di neutrini (decadimento proibito nel primo schema in cui il numero leptonico L è conservato),

$$(A, Z) \to (A, Z+2) + 2e^-$$

proprio perchè la particella neutra creata nel decadimento β^- ha, per ipotesi, elicità $+1$ e questa può essere riassorbita dal nucleo $(A, Z+1)$ con conseguente seconda emissione β^-, dato che, nel caso di massa diversa da zero, il proiettore chirale $\chi_- \equiv \frac{1-\gamma_5}{2}$ presente nella lagrangiana debole determina un elemento di matrice non nullo anche riguardo all'annichilazione di una particella di elicità $+1$, purché massiva.

Questi aspetti riguardano

- la struttura matematica entro cui vengono descritti gli stati di un dato sistema fisico e la loro evoluzione temporale (il moto);
- la struttura fissata attraverso le osservabili cinematiche (quantità misurabili, la cui definizione operativa prescinde dalle interazioni, ovvero dalle forze) cioè attraverso le relazioni (non causali) esistenti fra di loro, come le loro regole di commutazione, le quali determinano appunto l'algebra delle osservabili del sistema;
- la struttura generale delle equazioni della dinamica, che forniscono la relazione causale fra le variabili cinematiche.

Iniziamo dal primo punto, cioè dalla struttura matematica.
Dalla teoria elementare della MQ (prima quantizzazione) sappiamo che

1. ogni stato puro è descritto da un raggio $\mathcal{R}$ definito in generale come sottospazio lineare unidimensionale, privato del vettore nullo in uno spazio di Hilbert separabile[15] $\mathcal{H}$, i.e.
$\mathcal{R} = \{|\psi >= a\, e^{i\alpha}|\psi_0 >,\, a > 0,\, \alpha \in R\,, < \psi_0|\psi_0 >= 1\}$;
2. se $|a >$ e $|b >$ sono due vettori dello spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ degli stati, allora, dati α e β numeri complessi qualsiasi, il vettore $|\psi >= a|\alpha > +b|\beta >$ individua un possibile stato[16] del sistema (principio di sovrapposizione lineare);
3. ogni quantità misurabile è rappresentata da un operatore lineare hermitiano da $\mathcal{H}$ in sé;
4. i soli valori ottenibili da una misura di un'osservabile sono gli autovalori dell'operatore hermitiano a essa associato e la misura fa "precipitare" lo stato assegnato in un autostato dell'osservabile misurata corrispondente all'autovalore osservato;
5. dati i vettori $|\phi >$ e $|\psi >$ normalizzati, allora la quantità $< \phi|\psi >$ rappresenta l'ampiezza di transizione da $|\psi >$ a $|\phi >$, ovvero $| < \phi|\psi > |^2$ fornisce la probabilità che una osservabile che abbia $|\phi >$ come autovettore, determini, con una sua misura, la transizione $|\psi > \to |\phi >$;
6. il valore di aspettazione di una data osservabile Q su uno stato puro $|\psi >$ è $< \psi|Q|\psi >$ quando $< \psi|\psi >= 1$.

[15] Uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ è separabile se e solo se ogni suo elemento può essere scritto come sovrapposizione di elementi di una base ortonormale numerabile opportuna e_1, e_2, ..., e_n, ...
[16] Ignoreremo, per il momento, il problema dell'esistenza delle regole di superselezione.

Veniamo ora al secondo punto, relativo alle proprietà cinematiche delle osservabili del sistema: le relazioni cinematiche (non causali) sono definite attraverso l'algebra degli operatori costruiti a partire da quelli che rappresentano le variabili del sistema e sono usualmente formulate come regole di commutazione, le quali determinano appunto la struttura dell'algebra delle osservabili. Esempi ben noti sono

$$[x,p] = i\hbar \tag{2.1}$$
$$[J_i, J_j] = i\,\hbar\,\epsilon_{ijk}\,J_k \tag{2.2}$$

Altre proprietà interne (ulteriori gradi di libertà ...) del sistema come, per esempio, lo spin isotopico, richiedono l'introduzione di altre variabili e delle relative regole di commutazione sia fra di loro che con le altre variabili che servono a caratterizzare il sistema.

Circa, infine, l'ultimo punto relativo alla dinamica, sappiamo che quest'ultima è definita completamente dall'operatore hamiltoniano H, il quale è esso stesso una osservabile, funzione, in generale, di variabili cinematiche ($\vec{p}$, $\vec{x}$, etc...).
Nella Schrödinger Picture (SP), come sappiamo, sono gli stati ad evolvere, i.e.

$$i\,\hbar\,\frac{\partial}{\partial t}|\psi, t>= H\,|\psi, t> \tag{2.3}$$

mentre nella Heisenberg Picture (HP) evolvono le osservabili e risulta equivalentemente che, se H non dipende esplicitamente dal tempo, è

$$i\,\hbar\,\frac{\partial Q(t)}{\partial t} = [Q(t), H] \tag{2.4}$$

Dopo aver puntualizzato questi aspetti generali ben noti, torniamo adesso alla questione generale di che cosa debba essere considerato una Simmetria in MQ.

Partiamo per questo dal fatto che il prodotto scalare fra vettori di stato che siano normalizzati ha un significato fisico ben preciso: la quantità

$$|<\alpha|\,\beta>|^2 \tag{2.5}$$

rappresenta la probabilità di transizione fra gli stati $|\alpha>$ e $|\beta>$, ovvero, per esempio, la probabilità che, effettuando una misura[17] sullo stato $|\,\beta>$, si possa ottenere come risultato lo stato $|\,\alpha>$.
Si capisce quindi la ragione per la quale, a una Simmetria del sistema, che assumeremo genericamente rappresentata dall'operatore $\mathcal{O}$, è richiesto di conservare la (2.5), i.e., di essere tale per cui

$$|<\mathcal{O}\,\alpha|\mathcal{O}\,\beta>|^2 = |<\alpha|\,\beta>|^2 \quad \forall|\,\alpha>, |\,\beta>\in\mathcal{H} \tag{2.6}$$

[17]L'osservabile corrispondente deve avere $|\,\alpha>$ come suo autovettore ...

In altre parole, a una Simmetria viene richiesto di essere un isomorfismo fra gli stati (dunque fra i raggi ...), tale da mantenere invariata la soggiacente struttura probabilistica che, come sappiamo, ha rilevanza fisica in quanto definisce, per esempio, le probabilità di transizione (si ricordi la definizione di simmetria di Weyl: una simmetria deve agire su un sistema in modo che esso risulti indistinguibile da quello di partenza).
Segue allora dalla (2.6) che possono aversi solo due casi[18] : o l'operatore $\mathcal{O}$ è

[18] Una dimostrazione di questa conclusione si trova sia nell'Appendice al Capitolo 20 del libro
E. P. Wigner: *Group Theory and its applications to the quantum mechanics of the atomic spectra*, Academic Press, New York 1959.
come pure nell'Appendice A del secondo Capitolo del libro
S. Weinberg: *The Quantum Theory of Fields*, Cambridge Univ. Press, 1995.
Vediamo in breve come procede il ragionamento.
Ricordiamo per questo che una Simmetria va considerata, in buona sostanza, come un cambiamento di punto di vista.
Se un osservatore vede un sistema fisico in uno stato (puro) rappresentato da un raggio $\mathcal{R}_1$ o $\mathcal{R}_2$ o, genericamente, $\mathcal{R}_n$, allora un altro osservatore, in virtù della trasformazione di simmetria, vedrà il sistema, rispettivamente, negli stati descritti dai raggi $\mathcal{R}'_1$, $\mathcal{R}'_2$, ..., $\mathcal{R}'_n$: i due osservatori, però, osservando lo stesso sistema da punti di vista differenti, dovranno comunque concordare sul valore delle probabilità di transizione fra stati corrispondenti, i.e.

$$P(\mathcal{R}_i \to \mathcal{R}_j) \equiv P(\mathcal{R}'_i \to \mathcal{R}'_j) \tag{2.7}$$

e questa è l'unica condizione che viene imposta affinché si possa parlare di simmetria !

Si osservi dunque che, in base a quanto stiamo dicendo, a priori dobbiamo intendere la simmetria come definita solo sui raggi, da cui ne segue la possibilità di definirla su almeno un vettore normalizzato per raggio.
Ricordiamo a questo proposito che un vettore di stato normalizzato $|e>$ è definito e definisce un *raggio* $\mathcal{R} \equiv \{\, a\, e^{i\alpha}\, |e>, \quad a > 0, \;\; \alpha \in R\}$ nello spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ degli stati (il raggio è, tecnicamente, un sottospazio vettoriale unidimensionale di $\mathcal{H}$, privato dell'origine...).
Questo significa che se $\mathcal{R}_a$ ed $\mathcal{R}_b$ sono due raggi qualsiasi, individuati rispettivamente, modulo una fase, dai vettori normalizzati $|\phi>$ e $|\psi>$, allora S è una Simmetria se e solo se, essendo $S\mathcal{R}_a$ ed $S\mathcal{R}_b$ i raggi corrispondenti attraverso S rispettivamente a $\mathcal{R}_a$ e $\mathcal{R}_b$ e $|S\,\phi>$ e $|S\,\psi>$ i vettori normalizzati che, sempre modulo una fase, individuano i raggi trasformati, risulta

$$|<S\phi|S\psi>|^2 = |<\phi|\psi>|^2 \tag{2.8}$$

Possiamo dimostrare adesso, seguendo la strada tracciata da Wigner già nel 1931, che, in questa ipotesi, S individua in modo univoco (a meno di una fase globale) un operatore unitario oppure antiunitario che opera dallo spazio di Hilbert in sé.

Iniziamo dimostrando che S deve essere invertibile sui raggi e per questo procediamo per assurdo. Se assumiamo che S non sia invertibile, allora esisteranno due raggi differenti $\mathcal{R}_a$ e $\mathcal{R}_b$, individuati da due opportuni vettori normalizzati $|\phi>$ e $\psi>$ linearmente indipendenti, i quali sono mandati da S nello stesso raggio $S\mathcal{R}$, e quindi

$$|S\phi>=|S\psi> \tag{2.9}$$

Ma allora, da un lato avremmo che $|<S\phi|S\psi>|^2 = |<S\phi|S\phi>|^2 = 1$ mentre, essendo, per ipotesi, i due vettori $|\phi>$ e $\psi>$ indipendenti e normalizzati, non può che essere
$|<S\phi|S\psi>|^2 = |<\phi|\psi>|^2 < 1$, da cui l'assurdo.

Consideriamo adesso una base ortonormale numerabile in $\mathcal{H}$ (lo spazio di Hilbert, per ipotesi, è separabile e dunque ammette almeno una base ortonormale numerabile), fatta dai vettori $\{|e_k>, \ k = 1, ..., n, ...\}$, ciascuno dei quali indivividua, quindi, il raggio $\mathcal{R}_k \equiv \{\, a\, e^{i\alpha}\, |e_k>\}$. Per ipotesi, dunque

$$< e_i|e_j >= \delta_{ij} \tag{2.10}$$

Consideriamo adesso i raggi trasformati dalla simmetria S, i.e.

$$\mathcal{R}_k \ \ \rightarrow \ \ S\mathcal{R}_k \equiv \mathcal{R}_k^{'} = \{\, b\, e^{i\beta}\, |Se_k >\} \tag{2.11}$$

dove i vettori normalizzati $|Se_k>$, sulla base del fatto che è loro richiesto solo di definire i raggi $S\mathcal{R}_k$, sono evidentemente definiti a meno di una fase arbitraria.

Vogliamo dimostrare che anche $\{|Se_k>, \, k = 1, ..., n, ...\}$ è una base ortonormale dello spazio di Hilbert dato. Infatti, dalla (2.8) segue che

$$| < e_i|e_j > |^2 = \delta_{ij} = | < S\, e_i|S\, e_j > |^2 \tag{2.12}$$

e dunque i vettori $S\, e_j$ costituiscono un set di vettori ortonormali. Affinché essi costituiscano una base, occorre anche che non esista alcun vettore non nullo che sia ortogonale a tutti loro. Di nuovo procediamo per assurdo e sia $|\Omega>$ questo vettore che, senza perdita di generalità, potremo assumere normalizzato. Per ipotesi

$$\forall j: \, < \Omega|S\, e_j >= 0 \tag{2.13}$$

Il vettore $|\Omega>$ individua comunque un raggio che, essendo S invertibile sui raggi, è controimmagine di un altro opportuno raggio descritto (modulo una fase) dal vettore normalizzato che indicheremo con $\hat{\Omega}$, per cui risulta

$$|\Omega >= |S\, \hat{\Omega} > \tag{2.14}$$

Sostituendo nella (2.13) e usando la (2.8), abbiamo

$$\forall j: \ \ 0 = | < \Omega|S\, e_j > |^2 = | < S\, \hat{\Omega}|S\, e_j > |^2 = | < \hat{\Omega}|e_j > |^2 \tag{2.15}$$

e questo è impossibile perché $\hat{\Omega}$ è normalizzato e quindi non nullo e $\{|e_i>\}$ è, per ipotesi, una base: resta così dimostrato che $\{|S\, e_j>\}$ è anch'essa una base ortonormale.

Ciascuno dei vettori $|Se_j>$ è definito a meno di una fase arbitraria: per poter estendere la definizione di S ai vettori dello spazio di Hilbert dobbiamo adesso fissare una opportuna convenzione di fase al riguardo. Per fare questo, consideriamo i vettori

$$|\phi_k >= \frac{1}{\sqrt{2}}(|e_1 > + |e_k >), \quad k > 1 \tag{2.16}$$

Ciascuno di essi individua univocamente il raggio $\mathcal{R}_k$ che, attraverso la simmetria S, sarà trasformato nel raggio $\mathcal{R}_k^{'} \equiv S\, \mathcal{R}_k$, a sua volta individuato da un opportuno versore $|S\, \phi_k>$, definito, per ogni k, a meno di una fase arbitraria. Per la (2.8), abbiamo

$$| < S\phi_k|Se_1 > |^2 = | < \phi_k|e_1 > |^2 = \frac{1}{2} = | < S\phi_k|Se_k > |^2 \tag{2.17}$$

mentre, per la stessa ragione, tutti gli altri coefficienti dello sviluppo di $|S\,\phi_k>$ nella base $|S\,e_j>$ sono identicamente nulli. Dunque

$$|S\,\phi_k>= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{i\alpha}\,|S\,e_1> + e^{i\beta}\,|S\,e_k>\right) \tag{2.18}$$

Ma $|S\,\phi_k>$ è definito a meno di una fase e così pure i vettori normalizzati $|S\,e_j>$: possiamo dunque fissare la convenzione di fase in modo che risulti

$$\forall k > 1: \quad |S\,\phi_k>= \frac{1}{\sqrt{2}}\,(|S\,e_1> + |S\,e_k>) \tag{2.19}$$

e resta comunque ancora indeterminata una fase "globale" del tutto irrilevante ...
Ma che cosa accade a un generico vettore normalizzato, relativo a un generico raggio $\mathcal{R}$?
Partiamo dunque dal vettore

$$|\psi>= \sum_j \lambda_j\,|e_j> \tag{2.20}$$

che assumeremo, senza perdita alcuna di generalità, essere tale che $\lambda_1 \neq 0$ (altrimenti basterà rinominare i vettori della base ...). Sia adesso $|S\psi>$ il vettore (definito a meno di una fase) che individua il raggio trasformato $S\,\mathcal{R}$. Chiaramente, dalla definizione stessa di base, segue che

$$|S\,\psi>= \sum_j \lambda_j^{'}\,|S\,e_j> \tag{2.21}$$

Ma usando la (2.8), ricaviamo subito che

$$\forall j: \quad |<e_j|\psi>|^2 = |<S\,e_j|S\,\psi>|^2 \;\; \Rightarrow |\lambda_j|^2 = |\lambda_j^{'}|^2 \tag{2.22}$$

e analogamente

$$\forall k > 1: |<\phi_k|\psi>|^2 = |<S\,\phi_k|S\,\psi>|^2 \;\; \Rightarrow |\lambda_1 + \lambda_k|^2 = |\lambda_1^{'} + \lambda_k^{'}|^2 \tag{2.23}$$

da cui, usando il fatto che abbiamo assunto, per ipotesi, $\lambda_1 \neq 0$, si ha

$$\left|\frac{\lambda_1 + \lambda_k}{\lambda_1}\right|^2 = \left|\frac{\lambda_1^{'} + \lambda_k^{'}}{\lambda_1^{'}}\right|^2 \;\; \Rightarrow \left|1 + \frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right|^2 = \left|1 + \frac{\lambda_k^{'}}{\lambda_1^{'}}\right|^2 \tag{2.24}$$

la quale, visto che deve altresì risultare $|\lambda_k/\lambda_1| = |\lambda_k^{'}/\lambda_1^{'}|$, implica che

$$(a) \quad : \quad \frac{\lambda_k}{\lambda_1} = \frac{\lambda_k^{'}}{\lambda_1^{'}} \tag{2.25}$$

$$(b) \quad : \quad \frac{\lambda_k}{\lambda_1} = \left(\frac{\lambda_k^{'}}{\lambda_1^{'}}\right)^* \tag{2.26}$$

A priori potrebbe accadere, comunque, che, al variare di k potesse valere l'una o l'altra delle due condizioni di cui sopra ...
Non è così !
Per dimostrarlo, procediamo per assurdo e supponiamo che per un indice $k \neq 1$ valga la condizione (a) mentre per un indice $j \neq 1$ valga la condizione (b) (assumeremo che i rapporti siano intrinsecamente complessi e quindi deve essere necessariamente anche che $j \neq k$ ...).
Definiamo allora il vettore normalizzato

$$|\phi_{kj}>= \frac{1}{\sqrt{3}}(|e_1> + |e_k> + |e_j>) \tag{2.27}$$

lineare e allora la Simmetria che esso descrive è rappresentata da un operatore $\mathcal{O} = U$ unitario, infatti

$$< U\, a | U\, b > \equiv < a | U^\dagger\, U\, b > = < a | \, b > \quad \Leftrightarrow \quad U^\dagger\, U = I \tag{2.37}$$

oppure l'operatore $\mathcal{O}$ è antilineare[19], e allora la Simmetria è rappresentata da un

---

Poiché i rapporti fra i coefficienti che esprimono il vettore dato nella base dei vettori $|e_i >$ sono tutti reali, in ogni caso resteranno reali anche nel caso del vettore $|S\phi >$ espresso nella base $|S\, e_i >$, e quindi

$$|S\, \phi_{kj} > = \frac{e^{i\alpha}}{\sqrt{3}} (|Se_1 > + |Se_k > + |Se_j >) \tag{2.28}$$

ma allora, ritornando al generico vettore di stato $|\psi >$, abbiamo che deve essere altresì

$$| < \phi_{kj} | \psi > |^2 = | < S\phi_{kj} | S\psi > |^2 \quad \Rightarrow \quad |\lambda_1 + \lambda_k + \lambda_j|^2 = |\lambda_1^{'} + \lambda_k^{'} + \lambda_j^{'}|^2 = \tag{2.29}$$

unitamente al fatto che $|\lambda_1| = |\lambda_1^{'}|$. Risulta allora

$$|\lambda_1 + \lambda_k + \lambda_j|^2 = |\lambda_1^{'} + \lambda_k^{'} + \lambda_j^{'}|^2 \quad \Rightarrow \quad \left| 1 + \frac{\lambda_k}{\lambda_1} + \frac{\lambda_j}{\lambda_1} \right|^2 = \left| 1 + \frac{\lambda_k^{'}}{\lambda_1^{'}} + \frac{\lambda_j^{'}}{\lambda_1^{'}} \right|^2 \tag{2.30}$$

e quindi, per l'ipotesi fatta sopra,

$$\left| 1 + \frac{\lambda_k}{\lambda_1} + \frac{\lambda_j}{\lambda_1} \right|^2 = \left| 1 + \frac{\lambda_k}{\lambda_1} + \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1} \right)^* \right|^2 \tag{2.31}$$

Ma in generale, dati due numeri complessi z e z',

$$|1 + z + z'|^2 = \left| 1 + z + z^{'*} \right|^2 \quad \Leftrightarrow \quad (\Im(z + z'))^2 = (\Im(z - z'))^2 \Rightarrow \Im(z) \cdot \Im(z') = 0 \tag{2.32}$$

che, nel caso particolare della (2.31), in generale è falso.
Resta dunque provato che, data una simmetria S che soddisfa la (2.8), può accadere che

$$\forall k : \frac{\lambda_k}{\lambda_1} = \frac{\lambda_k^{'}}{\lambda_1^{'}} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_k^{'} = \lambda_k\, \frac{\lambda_1^{'}}{\lambda_1} \quad \Leftrightarrow \lambda_k^{'} = e^{i\epsilon}\, \lambda_k \tag{2.33}$$

oppure può essere che

$$\forall k : \frac{\lambda_k}{\lambda_1} = \left(\frac{\lambda_k^{'}}{\lambda_1^{'}} \right)^* \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_k^{'} = \lambda_k^*\, \frac{\lambda_1^{'}}{\lambda_1^*} \quad \Leftrightarrow \lambda_k^{'} = e^{i\epsilon}\, \lambda_k^* \tag{2.34}$$

Ridefinendo la trasformazione a meno della fase globale $e^{i\epsilon}$ inessenziale, arriviamo alle sole due possibilità:

$$(a) \quad : \quad \lambda_k^{'} = \lambda_k \tag{2.35}$$
$$(a) \quad : \quad \lambda_k^{'} = \lambda_k^* \tag{2.36}$$

estendibili in modo ovvio a tutto lo spazio di Hilbert in modo che, nel caso (a) l'operatore che descrive la simmetria sia lineare e unitario, mentre nel caso (b) sia antilineare e antiunitario.

[19]Ricordiamo che, nella ben nota terminologia di Dirac, a ogni *ket* $|\psi >$ dello spazio di Hilbert

$\mathcal{H}$ degli stati, è associato un *bra* $<\psi|$ nel duale di $\mathcal{H}$ (coincidente con esso, data la sua struttura hilbertiana) tale che

$$|\psi>= \alpha\,|\,a> +\beta\,|\,b> \quad \Leftrightarrow \quad <\psi| = \alpha^* <a\,| + \beta^* <b\,| \tag{2.38}$$

Un operatore $\mathcal{O}$ dello spazio di Hilbert in sé è lineare se accade che

$$\mathcal{O}\;(\alpha\,|\,a> +\beta\,|\,b>) = \alpha\,\mathcal{O}\,|\,a> +\beta\,\mathcal{O}\,|\,b> \tag{2.39}$$

mentre è antilineare se

$$\mathcal{O}\;(\alpha\,|\,a> +\beta\,|\,b>) = \alpha^*\,\mathcal{O}\,|\,a> +\beta^*\,\mathcal{O}\,|\,b> \tag{2.40}$$

Vediamo le conseguenze che discendono da queste definizioni.
Se $|\,e_1>,...,|\,e_n>,...$ è una base ortonormale dello spazio di Hilbert, allora ogni suo vettore è univocamente rappresentato da un'unica combinazione lineare dei vettori della base.
Posto dunque che sia

$$|\,\psi>= \lambda_i\,|\,e_i> \tag{2.41}$$

ne segue che per l'operatore lineare V risulta

$$V\,|\,\psi>= \lambda_i\,V\,|\,e_i> \equiv \lambda_i\,V_{ji}\,|\,e_j> \tag{2.42}$$

dove la matrice complessa V_{ji} descrive appunto l'azione dell'operatore V sugli elementi della base, i.e.

$$V\,|\,e_i> \equiv V_{ji}\,|\,e_j> \quad \Leftrightarrow \quad V_{ji} \equiv <e_j\,|V\,e_i> \equiv <e_j|V|\,e_i> \tag{2.43}$$

Per l'operatore antilineare A, invece, risulta

$$A\,|\psi>= \lambda_i^*\,A\,|\,e_i> \equiv \lambda_i^*\,A_{ji}\,|\,e_j> \tag{2.44}$$

dove la matrice complessa A_{ji} descrive, anche in questo caso, l'azione dell'operatore A sugli elementi della base assegnata, in modo formalmente identico al caso precedente, i.e.

$$A\,|\,e_i>= A_{ji}\,|\,e_j> \quad \Leftrightarrow \quad A_{ji} \equiv <e_j\,|A\,e_i> \equiv <e_j|A|\,e_i> \tag{2.45}$$

Come si vede, sugli elementi della base, gli operatori lineari e antilineari agiscono sostanzialmente nello stesso modo, essendo la loro azione descritta in entrambi i casi da una opportuna matrice complessa. Ciò che li differenzia è il comportamento sulle combinazioni lineari a coefficienti complessi degli elementi della base. Inoltre, dati due vettori generici

$$|\,\psi>= \lambda_i\,|\,e_i>, \qquad |\,\phi>= \mu_j\,|\,e_j> \tag{2.46}$$

per un operatore lineare si ha

$$<\phi|\,V\,|\,\psi> \equiv <\phi|\,V\,\psi>= \mu_j^*\,<e_j\,|\lambda_i\,V_{ki}\,e_k>= \mu_j^*\,V_{ji}\,\lambda_i \tag{2.47}$$

Anche per un operatore antilineare si ha ancora

$$<\phi\,|\,A\,\psi> \equiv \mu_j^*\,<e_j\,|\,A\,\psi> \tag{2.48}$$

ma adesso è

$$|\, A\,\psi >= A\ (\lambda_i\,|\, e_i\ >) = \lambda_i^*\, A\,|\, e_i\ >= \lambda_i^*\, A_{ki}\,|\, e_k\ > \tag{2.49}$$

per cui ne segue che, in questo caso, risulta

$$<\phi\,|\, A\,\psi >= \mu_j^* \lambda_i^*\, A_{ji} \tag{2.50}$$

Come si vede, la differenza rispetto al caso dell'operatore lineare è che i coefficienti dello sviluppo del ket a cui l'operatore antilineare è applicato, entrano nel prodotto scalare non direttamente ma attraverso i loro complessi coniugati.

A ogni operatore lineare V viene poi associato il suo aggiunto $V^\dagger$, ponendo

$$< V\,\phi|\psi >\equiv<\phi|V^\dagger\,\psi > \quad \Leftrightarrow \quad < V\,\phi| =<\phi|V^\dagger \tag{2.51}$$

Dalla definizione segue che per un operatore lineare è

$$<\ e_i\,|\, V^\dagger \equiv<\ V\, e_i| = V_{ji}^* <\ e_j\,| \tag{2.52}$$

e dunque, definita la matrice V^+ come l'hermitiana coniugata della matrice V, si ha

$$<\ e_i\,|\, V^\dagger\, e_j >\equiv<\ e_i\,|V^\dagger|\, e_j >= (V^+)_{ij} \tag{2.53}$$

ovvero, su due generici vettori $|\,\psi >$ e $|\,\phi >$, è appunto

$$\begin{aligned} < V\,\phi|\,\psi > \ &= \ < V\,(\mu_i e_i)|\,\lambda_k e_k >= \mu_i^*\, V_{ki}^*\,\lambda_k = \mu_i^* \lambda_k\,(V^+)_{ik} \\ &\equiv \ <\phi|\, V^\dagger\,\psi >= \mu_i^* \lambda_k\,(V^+)_{ik} \\ &\Leftrightarrow \ (V^\dagger) = V^+ \end{aligned} \tag{2.54}$$

Dunque, nel caso di un operatore lineare V, la matrice che descrive, in una base assegnata, l'operatore $V^\dagger$ è la matrice V^+, hermitiana coniugata della matrice che, nella stessa base, descrive l'operatore V stesso.

Anche per un operatore antilineare A si può definire l'aggiunto $A^\dagger$, però occorre qualche cautela, dato che la definizione usata per l'operatore lineare (2.51) non è più direttamente applicabile, come lo dimostra il fatto che, se λ è un numero complesso qualsiasi, allora

$$< A(\lambda\,\phi)|\psi >=<\lambda^*\, A\,\psi|\psi >= \lambda < A\,\phi|\psi > \tag{2.55}$$

mentre

$$<\lambda\,\phi|A^\dagger\,\psi >= \lambda^* <\ \phi|\, A^\dagger\,\psi > \tag{2.56}$$

L'unica definizione di operatore aggiunto che sia coerente con il carattere antilineare di A è infatti quella secondo cui anche $A^\dagger$ è antilineare e risulta

$$< A\,\phi|\,\psi >\equiv<\phi|\, A^\dagger\,\psi >^* \tag{2.57}$$

Abbiamo allora

$$\begin{aligned} < A\phi|\psi > \ &= \ < A(\mu_i\, e_i)|\lambda_j\, e_j >=<\mu_i^*\, A_{ki}\, e_k|\lambda_j\, e_j >= \mu_i\, A_{ki}^*\,\lambda_k = \mu_i\,\lambda_k (A^+)_{ik} \\ &\equiv \ <\phi|A^\dagger\,\psi >^*=<\mu_i\, e_i|\lambda_j^*\,(A^\dagger)_{kj}\, e_k >^*= [\mu_i^* \lambda_j^*\,(A^\dagger)_{ij}]^* = \mu_i \lambda_j (A^\dagger)_{ij}^* \\ &\Rightarrow \ (A^\dagger) = A^t \end{aligned} \tag{2.58}$$

operatore $\mathcal{O} = A$ antiunitario, per il quale risulta

$$< A\,a|A\,b > \equiv < a|A^\dagger\,A\,b >^* = < a|\,b >^* \tag{2.61}$$

Sempre a proposito degli operatori antiunitari, osserviamo che, fissata una base ortonormale qualsiasi $|\,e_1 >, ..., |\,e_n >, ...$ possiamo definire su questa base l'operatore antiunitario K *di coniugazione complessa* nel modo seguente[20]

$$K\,|\,e_i > \;\; \equiv \;\; |\,e_i > \quad \Rightarrow \quad K\sum_i \lambda_i\,|\,e_i >= \sum_i \lambda_i^*\,|\,e_i > \tag{2.62}$$

Esso è antiunitario, infatti, se

$$|\psi >= \lambda_i\,|\,e_i >, \qquad |\phi >= \mu_j\,|\,e_j > \tag{2.63}$$

allora risulta

$$\begin{aligned} K\,|\psi > &= \lambda_i^*\,|\,e_i >; \\ K\,|\phi > &= \mu_j^*\,|\,e_j > \;\Rightarrow\; < K\,\phi| = \mu_j \; < e_j| \end{aligned} \tag{2.64}$$

e dunque

$$< K\,\phi|\,K\,\psi >= \mu_i\,\lambda_i^* \equiv < \psi|\phi > \tag{2.65}$$

Evidentemente, poi, dalla (2.62) risulta altresì che

$$K^2 = I \quad \Leftrightarrow \quad K = K^{-1} \tag{2.66}$$

Dunque, per l'operatore antilineare A, la matrice che descrive il suo aggiunto $A^\dagger$ in una base assegnata è la matrice (A^t), trasposta della matrice che, nella stessa base, descrive appunto l'operatore A.

Si parla infine di un operatore lineare V come di un operatore unitario se accade che

$$< V\,\phi|\,V\,\psi > \equiv < \phi\,|\,V^\dagger V\,\psi > = < \phi|\psi > \quad \Leftrightarrow \quad V^\dagger V = I \tag{2.59}$$

Questa definizione resta formalmente la stessa anche nel caso di un operatore antilineare; infatti A è antiunitario se accade che

$$< A\,\phi|\,A\,\psi > \equiv < \phi\,|\,A^\dagger A\,\psi >^* = < \phi|\psi >^* \quad \Leftrightarrow \quad A^\dagger A = I \tag{2.60}$$

[20] Si osservi che, date due basi diverse $|e_i >$ ed $|f_j >$, i due operatori di coniugazione complessa K_e e K_f definiti in ciascuna base attraverso la (2.62) *non* coincidono, bensì differiscono per una trasformazione unitaria. Abbiamo infatti che, poiché $|e_i >$ ed $|f_j >$ sono entrambe basi ortonormali, potremo certamente scrivere $|f_j >= U_{ij}|e_i >$ per cui

$$K_e K_f|\,f_j >= K_e|\,f_j >= U_{ij}^*|\,e_i >= U_{ij}^*(U^{-1})_{ki}|\,f_k > \equiv V_{kj}|f_k >$$

dove $V \equiv U^{-1}(U)^*$ è, evidentemente, unitaria ma, in generale, diversa dall'identità, e risulta $K_e K_f = V \;\; \Rightarrow \;\; K_e = V\,K_f$.

e siccome K è antiunitario, dunque tale per cui $K^\dagger K = I$, evidentemente si ha

$$K = K^\dagger \tag{2.67}$$

In termini di questo operatore K, dimostreremo adesso che ogni operatore antiunitario A si può scrivere come

$$A = U\, K \tag{2.68}$$

dove U è un opportuno operatore unitario.
Consideriamo infatti l'operatore $A\, K$ e dimostriamo che esso è unitario.
Poiché, per ipotesi, A è antiunitario, si ha infatti

$$< (A\,K)\phi|\,(A\,K)\psi > \;\; = \;\; < K\,\phi|\,K\,\psi >^* \equiv < K\,\psi|\,K\,\phi > = < \phi|\psi > \tag{2.69}$$

la quale dimostra come l'operatore $AK = U$ sia appunto unitario[21] e quindi, moltiplicando a destra per K e tenendo conto che $K^2 = I$, che valga appunto la (2.68). Come già detto, K viene chiamato *operatore di coniugazione complessa.*

Vale la pena vederlo in azione in un caso molto semplice.
Consideriamo una particella senza gradi di libertà interni. Sappiamo allora che possiamo scegliere come base dello spazio di Hilbert quella fatta dagli autovettori $|x >$ della posizione, per cui, dalla definizione, in questa base è

$$K\,|x> = |x> \tag{2.70}$$

Consideriamo lo stato $|\psi >$, descritto dalla funzione d'onda $\psi(x)$,

$$|\,\psi> = \int dx\;\psi(x)\,|x> \tag{2.71}$$

Evidentemente questo stato viene trasformato dall'operatore K in quello descritto dalla funzione d'onda $\psi^*(x)$, infatti

$$K\,|\,\psi> = K\int dx\;\psi(x)\,|x> = \int dx\;\psi^*(x)\,K\,|x> = \int dx\;\psi^*(x)\,|x> \tag{2.72}$$

Un altro modo equivalente per determinare la funzione d'onda associata allo stato $K\,|\psi>$ è il seguente.
Evidentemente, così come la funzione d'onda associata, in rappresentazione delle coordinate, allo stato $|\psi >$ è

$$\psi(x) = < x|\psi > \tag{2.73}$$

[21] In generale, risulta infatti che il prodotto di un operatore unitario per un operatore antiunitario è antiunitario, mentre il prodotto di due operatori antiunitari risulta unitario.

analogamente la funzione d'onda associata, nella stessa rappresentazione, allo stato $K\,|\psi>$, sarà

$$< x|\,K\,\psi > \tag{2.74}$$

D'altronde K è antiunitario, $K^2 = I$ e, per definizione, $K|x >= |x >$, per cui risulta

$$< x|\,K\,\psi >=< K\,K\,x|\,K\,\psi >=< K\,x|\,K\,\psi >=< x|\psi >^* \equiv \psi^*(x) \tag{2.75}$$

E' interessante, a questo punto, osservare, data la definizione (2.70), che cosa succede a un autostato dell'impulso. Si ha

$$|\,\vec{p} >= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3x\ e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}\,|\,\vec{x} > \tag{2.76}$$

per cui, evidentemente, risulta

$$K|\,\vec{p} >= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3x\ e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}\,|\,\vec{x} >= |\,-\vec{p} > \tag{2.77}$$

ovvero, avendo definito K in modo che lasci invariati gli autostati della posizione, ecco che questo operatore manda $|\,\vec{p} >$ in $|\,-\vec{p} >$.
Naturalmente, se altrettanto lecitamente avessimo definito K partendo dalla base degli autostati dell'impulso $|p >$, sarebbero stati gli autostati della posizione a cambiare di segno sotto il suo effetto ...

Ma riprendiamo adesso la questione delle Simmetrie in MQ.
Abbiamo concluso con Wigner che una simmetria deve essere rappresentata da un operatore unitario o da un operatore antiunitario $\mathcal{O}$, il quale manda lo spazio di Hilbert degli stati $\mathcal{H}$ in sé

$$\mathcal{O}:\quad \mathcal{H} \to \mathcal{H} \tag{2.78}$$

e dunque ne costituisce un isomorfismo che, nel linguaggio della teoria degli spazi di Hilbert, è un modo per dire che esso descrive una trasformazione di base ortonormale[22]

$$|\,e_i\ > \to \mathcal{O}|\,e_i\ > \equiv |\,e_i\ >': \quad \delta_{ij} =< e_i\,|\,e_j\ >=< \mathcal{O}\,e_i\,|\,\mathcal{O}\,e_j\ > \tag{2.80}$$

[22]E' facile convincersi che questo vale sia nel caso (ovvio !) dell'operatore unitario che in quello dell'operatore antiunitario, visto che, in ogni caso risulta

$$|< \mathcal{O}e_i\,|\,\mathcal{O}e_j\ >| = |< e_i\,|e_j\ >| = \delta_{ij} \tag{2.79}$$

In Meccanica Quantistica, però, sappiamo che gli effetti prodotti da una trasformazione lineare $\mathcal{O}$ sui vettori di stato, possono essere resi equivalentemente[23] con la seguente trasformazione sulle osservabili Q del sistema

$$Q \rightarrow Q' = \mathcal{O}^\dagger \, Q \, \mathcal{O} \tag{2.81}$$

per cui, almeno nel caso di simmetrie unitarie, possiamo equivalentemente adottare i due punti di vista per cui

$$a) \qquad |e_i> \rightarrow |e'_i> = \mathcal{O}|e_i>; \qquad Q \rightarrow Q \tag{2.82}$$
$$b) \qquad Q \rightarrow Q' = \mathcal{O}^{-1} \, Q \, \mathcal{O}; \qquad |e_i> \rightarrow |e_i> \tag{2.83}$$

Chiaramente, se indichiamo adesso con $\mathcal{A}$ l'algebra delle osservabili del sistema dato, la simmetria $\mathcal{O}$ definisce un isomorfismo dell'algebra in sé

$$\mathcal{I}: \quad \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \;\; per \;\, cui \;\; Q' = \mathcal{I}(Q) \equiv \mathcal{O}^{-1} \, Q \, \mathcal{O} \tag{2.84}$$

il quale, in quanto isomorfismo, conserva certamente le regole di commutazione (anticommutazione) fra gli operatori[24] dell'algebra.

In molti casi, però, *non* si conosce esplicitamente l'operatore $\mathcal{O}$, ovvero il suo modo di agire sui vettori di stato del sistema, bensì, magari, si hanno informazioni

---

[23]Se $\mathcal{O}$ è un operatore lineare, la conclusione è immediata per il fatto che risulta

$$< \mathcal{O}\psi|Q|\mathcal{O}\phi > = < \mathcal{O}\psi|Q\mathcal{O}\phi > = < \psi|\mathcal{O}^\dagger Q\mathcal{O}\phi > = < \psi|\mathcal{O}^\dagger Q\mathcal{O}|\phi >$$

e dunque, ponendo $Q' = \mathcal{O}^\dagger Q\mathcal{O}$ si ha equivalentemente

$$< \mathcal{O}\psi|Q|\mathcal{O}\phi > = < \psi|Q'|\phi >$$

Si osservi che, nel caso antilineare, risulta invece

$$< \mathcal{O}\psi|Q|\mathcal{O}\phi > = < \mathcal{O}\psi|Q\mathcal{O}\phi > = < \psi|\mathcal{O}^\dagger Q\mathcal{O}\phi >^* = < \psi|\mathcal{O}^\dagger Q\mathcal{O}|\phi >^*$$

e l'associazione che occorre fare è ancora quella di porre $Q' = \mathcal{O}^\dagger Q\mathcal{O}$ ma va unita alla trasformazione antilineare che manda lo spazio di Hilbert nel suo duale, ovvero $|\psi> \rightarrow <\psi|$.

[24]Per capirci meglio, se R è una rotazione e $\mathcal{O}_R$ l'operatore (unitario) che la rappresenta, allora, per esempio, per quanto riguarda il momento angolare, che è un operatore vettoriale, si avrà

$$\mathcal{O}_R^{-1} \, J_i \, \mathcal{O}_R \equiv J'_i = R_{ij} J_j \tag{2.85}$$

e deve aversi (come in realtà si ha)

$$[J'_i, J'_j] = i \, \epsilon_{ijk} \, J'_k \tag{2.86}$$

così come è

$$[J_i, J_j] = i \, \epsilon_{ijk} \, J_k \tag{2.87}$$

a priori sulla forma che l'isomorfismo indotto da $\mathcal{O}$ dovrebbe produrre su un set opportuno di osservabili o operatori dell'algebra $\mathcal{A}$.
In questo caso, per definire $\mathcal{O}$, si può procedere partendo proprio da queste leggi di trasformazione sulle osservabili, badando bene a verificare, comunque, che resti rispettata la loro compatibilità cinematica, ovvero che non si producano incompatibilità con le loro regole di commutazione o di anticommutazione.

Parleremo poi, come già detto, di *simmetria conservata* se essa è anche compatibile con la dinamica e di *simmetria rotta*, se invece questo non accade.

Per una simmetria conservata, se $|\psi, t>$ è il risultato al tempo t dell'evoluzione temporale dello stato $|\psi, 0>$ al tempo $t = 0$, allora deve accadere che $\mathcal{O}|\psi, t>$ descriva il risultato al tempo t dell'evoluzione temporale dello stato $\mathcal{O}|\psi, 0>$ al tempo $t = 0$, ottenuto attraverso la stessa dinamica !

E' facile convincersi che se l'operatore $\mathcal{O}$ che descrive la simmetria è unitario, la simmetria è conservata se e solo se risulta $[\mathcal{O}, H] = 0$, ovvero se l'operatore che descrive la simmetria commuta con l'hamiltoniana.
Partiamo infatti dall'equazione di evoluzione temporale per gli stati

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi, t >= H |\psi, t > \tag{2.88}$$

Evidentemente risulta

$$\mathcal{O} \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi, t > \right) = \mathcal{O}\, H\, |\psi, t > \tag{2.89}$$

ma, poiché $\mathcal{O}$ è lineare, risulterà

$$\mathcal{O} \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi, t > \right) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{O}\, |\psi, t > \tag{2.90}$$

dunque

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{O}\, |\psi, t >= \mathcal{O}\, H\, |\psi, t >= \mathcal{O}\, H\, \mathcal{O}^{-1} \mathcal{O}\, |\psi, t > \tag{2.91}$$

la quale mostra che l'hamiltoniana con cui evolve il vettore $\mathcal{O}\, |\psi, t >$ è $\mathcal{O}\, H\, \mathcal{O}^{-1}$.
Dunque, se vogliamo che la dinamica che governa l'evoluzione dei due stati sia la stessa, deve evidentemente essere

$$\mathcal{O}\, H\, \mathcal{O}^{-1} = H \Rightarrow \mathcal{O}\, H = H\, \mathcal{O} \Rightarrow [\mathcal{O}, H] = 0 \tag{2.92}$$

In modo analogo, per una generica simmetria antiunitaria $\mathcal{O}$, si arriva invece alla conclusione che, per essere conservata, essa deve anticommutare[25] con H, i.e.

$$\{\mathcal{O}, H\} = 0 \tag{2.94}$$

Questa proprietà di anticommutazione dell'hamiltoniana con un operatore antiunitario, però ha come conseguenza che se $|E>$ è autovettore di H per l'autovalore E, allora il vettore $\mathcal{O}|E>$ (necessariamente non nullo ...) è autovettore di H per l'autovalore $-E$ e dunque lo spettro dell'hamiltoniana deve essere simmetrico rispetto all'origine. Questo, però, non è possibile perché lo spettro dell'hamiltoniana H risulta limitato verso il basso (esiste uno stato di minima energia del sistema), mentre non lo è per valori positivi, data la presenza della parte cinetica ...
Questa è la ragione per la quale Wigner, all'inizio, escluse la possibilità che potessero esistere simmetrie conservate antiunitarie: come vedremo, questa conclusione ha una eccezione che è proprio la time-reversal T (in cui, comunque H e T commutano !).

In alcune formulazioni, poi, nel concetto di simmetria conservata, si include pure la richiesta che anche la dinamica libera sia compatibile con la trasformazione, ovvero che

$$[\mathcal{O}, H_0] = 0 \tag{2.95}$$

dove

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} \tag{2.96}$$

Nel seguito del Corso, come già anticipato, ci limiteremo a trattare solo il caso delle simmetrie discrete[26] di parità P, di coniugazione di carica C e inversione temporale (time-reversal) T.

[25] Se $|\psi, t>$ è soluzione dell'equazione di evoluzione temporale e $\mathcal{O}$ è antiunitario, allora

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi, t> &= H\,|\psi, t> \Rightarrow \mathcal{O}\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t}|\psi, t>\right) = \mathcal{O}\,H\,|\psi, t> \\ &\Rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\,\mathcal{O}\,|\psi, t> = \mathcal{O}\,H\,|\psi, t> = \mathcal{O}\,H\,\mathcal{O}^{-1}\mathcal{O}\,|\psi, t> \end{aligned} \tag{2.93}$$

per cui $|\psi, t>$ e $\mathcal{O}\,|\psi, t>$ evolvono con la stessa hamiltoniana se e solo se $\{\mathcal{O}, H\} = 0$.

[26] Come già detto, non tratteremo il caso delle simmetrie continue, o meglio il caso in cui le simmetrie del sistema costituiscono una rappresentazione di un opportuno gruppo di Lie.
Ricordiamo soltanto che, in questo caso, ogni simmetria sarà rappresentata da un operatore unitario che commuta con l'hamiltoniana e affinché questo accada, occorre e basta che

2.1 La Parità

Consideriamo adesso, nello schema della prima quantizzazione (equazione di Schrödinger), la simmetria di parità P.
Questa deve operare sulle osservabili rispettando il loro modo classico di trasformarsi e inoltre, come ogni simmetria, deve essere cinematicamente ammissibile.
Iniziamo richiedendo dunque che, sulla base dell'analogia classica, sia

$$\vec{X} \to \vec{X}' \equiv P^{-1}\,\vec{X}\,P = -\vec{X} \tag{2.97}$$

da cui segue evidentemente[27] che $P\,|\,\vec{x}>$ deve essere autovettore della posizione $\vec{X}$ per l'autovalore $-\vec{x}$ (ma non necessariamente coincidente con $|-\vec{x}>$!).
Una conseguenza[28] è allora che $P^2\,|\,\vec{x}>$ deve concidere, di nuovo, con il vettore di stato iniziale, a meno di un possibile fattore di fase, i.e.

$$P^2\,|\,\vec{x}\;>= e^{i\eta}\,|\,\vec{x}\;> \tag{2.99}$$

Se vogliamo che P^2 rispetti il principio di sovrapposizione, la fase η non può che essere unica per tutti i vettori dello spazio di Hilbert degli stati e quindi, assumendo che P sia unitario, essa può essere riassorbita[29] nella definizione stessa dell'operatore P in modo tale che risulti

$$P^2 = I \tag{2.100}$$

---

l'hamiltoniana commuti con i generatori del gruppo (o, piuttosto, con la loro rappresentazione nell'algebra degli operatori che agiscono sullo spazio di Hilbert ...) i quali, essendo quindi hermitiani, rappresentano osservabili che risultano dunque conservate durante l'evoluzione temporale del sistema.
Di questo genere è la simmetria imposta dal principio di Relatività e dalla richiesta di omogeneità dello spazio-tempo, secondo cui lo spazio di Hilbert degli stati di un qualunque sistema fisico che sia isolato *deve* essere isomorfo a se stesso quando si osservi il sistema dato da un diverso sistema di riferimento inerziale.
Questo significa, come sappiamo, che deve essere definita sullo spazio di Hilbert degli stati del sistema una rappresentazione unitaria del gruppo di Poincaré $U(a,\Lambda)$, dove (a,Λ) è il generico elemento del gruppo, con a generica traslazione nello spazio-tempo e Λ generica trasformazione del gruppo di Lorentz ortocrono proprio.

[27]Infatti se $|\vec{x}>$ è autovettore dell'osservabile $\vec{X}$ per l'autovalore $\vec{x}$, allora, dalla (2.97) segue evidentemente che

$$\vec{X}'|\vec{x}>= -\vec{x}|\vec{x}>= P^{-1}\,\vec{X}\,P|\vec{x}> \;\Rightarrow\; -\vec{x}P|\vec{x}>= \vec{X}\,P|\vec{x}> \tag{2.98}$$

[28]Stiamo qui assumendo che il sistema sia semplice e senza spin, altrimenti occorre tenere conto anche delle proprietà di trasformazione delle altre variabili che, insieme alle coordinate, costituiscono un set completo di osservabili per il sistema.

[29]Con questo intendiamo dire che se $P^2|\,\vec{x}>$ deve rappresentare lo stesso stato rappresentato dal vettore $|\,\vec{x}>$, allora $P^2(|\,\vec{x}>+|\,\vec{y}>)$ deve anch'esso coincidere con $|\,\vec{x}>+|\,\vec{y}>$ a meno di un fattore di fase, e questo può accadere solo se η è indipendente da $\vec{x}$. Ridefinendo allora $\hat{P}\equiv e^{-i\eta/2}\,P$ ecco che, nell'ipotesi che P sia unitario, $\hat{P}^2 = I$ ...

Per quanto riguarda P, a priori siamo autorizzati solo a dire che

$$P\,|\,\vec{x}\;>= e^{i\alpha(\vec{x})}\,|\,-\vec{x}\;> \tag{2.101}$$

e il vincolo su P^2 impone solo che $\alpha(\vec{x})+\alpha(-\vec{x})=2k\,\pi$, avendo qui già assunto che la simmetria sia unitaria[30]. Riguardo alla fase α, se vogliamo di nuovo che le fasi relative fra gli stati *non* siano alterate dalla simmetria, è necessario che essa non dipenda da $\vec{x}$ e dunque, dovendo essere $P^2=I$, potrà risultare solo

$$P\,|\,\vec{x}\;>= \pm\,|\,-\vec{x}\;> \tag{2.102}$$

Chiameremo "scalari" i sistemi per cui $P\,|\,\vec{x}\;>=\,|\,-\vec{x}\;>$ e "pseudoscalari" quelli per cui, invece $P\,|\,\vec{x}\;>=-|\,-\vec{x}\;>$.

Osserviamo adesso che, avendo in questo modo definito l'operatore di parità P su una base[31], esso risulta completamente determinato.
Vediamo dunque come agisce, per esempio, sull'operatore di impulso $\vec{P}$.
Ricordiamo che $\vec{P}$ è il generatore delle traslazioni spaziali, per cui una traslazione infinitesima $\delta\vec{a}$ è rappresentata dall'operatore

$$\mathcal{T}(\vec{a})=e^{\frac{i}{\hbar}\vec{a}\cdot\vec{P}} \quad\Rightarrow\quad \mathcal{T}(\delta\vec{a})\approx I+\frac{i}{\hbar}\,\vec{P}\cdot\delta\vec{a} \tag{2.103}$$

Siccome una traslazione di $\vec{a}$ seguita da una parità è evidentemente equivalente a una parità seguita da una traslazione di $-\vec{a}$, risulta

$$P\,\mathcal{T}(\delta\vec{a})=\mathcal{T}(-\delta\vec{a})\,P \tag{2.104}$$

ovvero che

$$P\left(I+\frac{i}{\hbar}\,\vec{P}\cdot\delta\vec{a}\right)=\left(I-\frac{i}{\hbar}\,\vec{P}\cdot\delta\vec{a}\right)\,P= \tag{2.105}$$

e dunque che

$$P\,(i\vec{P})=-i\,\vec{P}\,P \tag{2.106}$$

Questa relazione, essendo per ipotesi l'operatore P unitario, implica che, come ci aspettiamo in base all'analogia classica, la parità anticommuti anche con l'impulso, i.e. risulti

$$P^{-1}\,\vec{P}\,P=-\vec{P} \tag{2.107}$$

[30]Non dimentichiamoci, infatti, che quanto stiamo facendo è di cercare di arrivare ad una definizione di P, per cui abbiamo ampia libertà sul suo modo di operare, limitata solo dall'analogia classica, dalla coerenza interna e dal fatto che vogliamo arrivare alla definizione di una simmetria che, almeno nei casi in cui classicamente questo già accade, sia *conservata*.

[31]Di nuovo, stiamo qui assumendo di trattare il caso della particella singola senza spin.

Quanto poi all'azione indotta dalla simmetria di parità P sull'algebra delle osservabili, visto il modo come siamo arrivati alla sua definizione e cioè attraverso la sua azione su una base (quella degli autostati delle coordinate ...), questa non può che essere compatibile[32] con le regole di commutazione che, in ultima analisi, si riducono a quelle canoniche fra posizione e impulso

$$[X_i, P_j] = i\hbar\, \delta_{ij} \tag{2.108}$$

dato che, come sappiamo, tutta l'algebra delle osservabili[33] della particella materiale senza struttura interna poggia unicamente su queste regole di commutazione.

Affinché questa simmetria sia conservata, come abbiamo già detto, occorre e basta che

$$[P, H] = 0 \tag{2.111}$$

ovvero, essendo

$$H = \frac{|\vec{P}|^2}{2m} + V(\vec{x}) \tag{2.112}$$

occorre e basta[34] che $P^{-1}\, V\, P = V \Leftrightarrow V(-\vec{x}) = V(\vec{x})$, cioè, come c'era ovviamente da aspettarci, che il potenziale sia una funzione *pari* della posizione.

[32]Si osservi che se avessimo assunto P come antiunitario, allora per la (2.106) esso dovrebbe commutare con l'impulso e questo sarebbe ancora compatibile con le regole di commutazione canoniche!
Solamente, secondo questa definizione, si andrebbe contro l'aspettativa classica, in base alla quale ci attendiamo che, sotto parità, tutte le grandezze vettoriali cambino di segno ...

[33]Un'altra variabile cinematica importante per il sistema di una particella singola senza spin è certamente il momento angolare $\vec{J}$. Esso, essendo definito come

$$\vec{J} = \vec{X} \times \vec{P} \tag{2.109}$$

ha proprietà di trasformazione sotto parità immediatamente deducibili da quelle della posizione (2.97) e dell'impulso (2.107), risultando, ovviamente,

$$[\vec{J}, P] = 0 \tag{2.110}$$

in accordo con quanto ci aspetteremmo in base all'analogia classica, visto che $\vec{J}$ è un vettore assiale (pseudovettore).

[34]Si osservi che l'operatore di parità P così definito commuta certamente con l'hamiltoniana libera $H_0 = \frac{1}{2m}\,|\vec{p}|^2$.

2.1.1 La violazione di parità dal punto di vista sperimentale

I primi esperimenti che provarono la correttezza dell'ipotesi di Lee e Yang riguardo alla violazione della parità nelle interazioni deboli furono quello di M.me Wu e quello di Garwin e Lederman.
E' interessante notare come entrambi siano stati ricevuti dall'editore il 15/1/1957: una coincidenza che mostra un evidente accordo fra i due gruppi sperimentali, entrambi della Columbia University.

Veniamo alla loro descrizione e iniziamo da quello di M.me Wu[35].

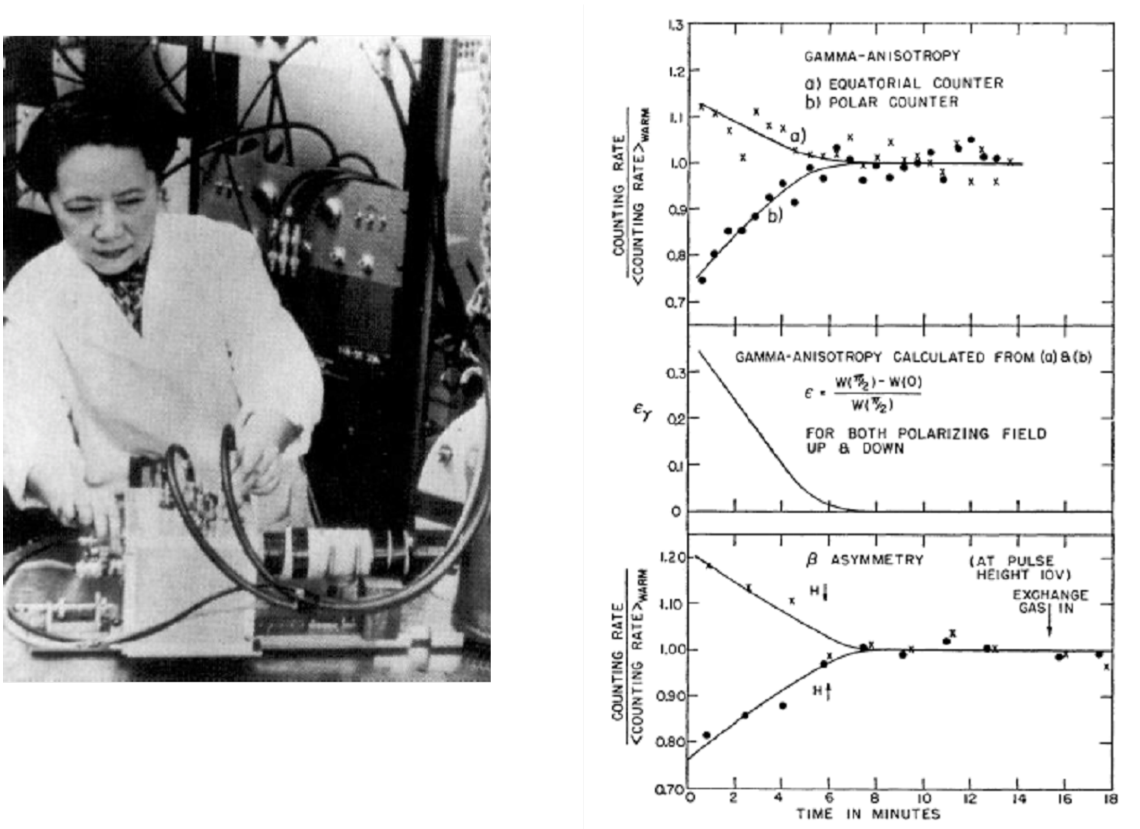


Figure 2: *M.me Wu ed i risultati del suo esperimento con il* ^{60}Co

L'esperimento fu fatto allo scopo di mettere in evidenza e quindi misurare possibili asimmetrie nella distribuzione degli elettroni emessi nel processo di decadimento β relativamente al piano normale allo spin del ^{60}Co polarizzato. L'orientamento dei nuclei di Cobalto era ottenuto attraverso un campo magnetico relativamente poco intenso ($B \approx 500\, gauss$) agente su questi atomi, raffreddati

[35] C.S. Wu et al.: *Experimental test of parity conservation in beta decay* Phys. Rev. 105, 1413 (1957)

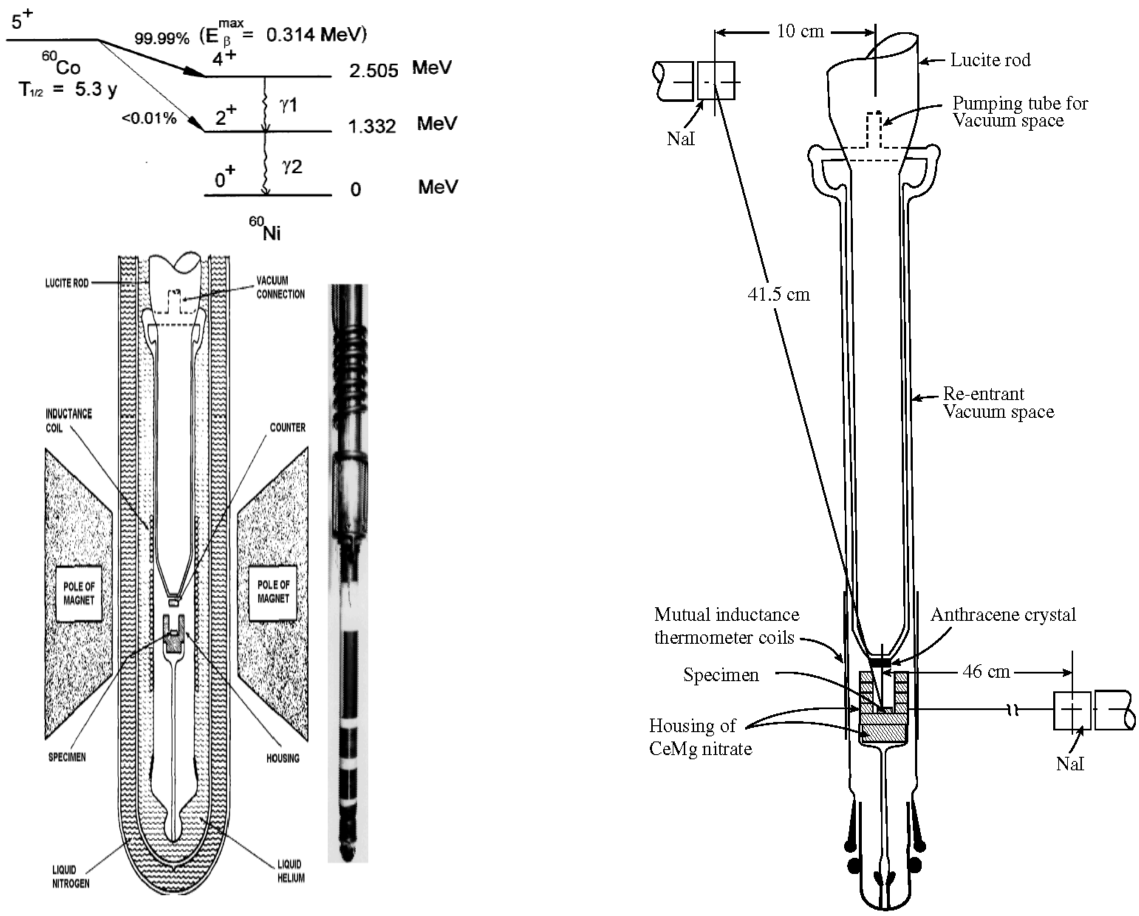


Figure 3: *Esperimento di M.me Wu*

fino a $\approx 0.003^0 K$ mediante la tecnica del raffreddamento tramite demagnetizzazione adiabatica, di Rose e Gorter[36].

[36]M.E. Rose: "*On the production of nuclear polarization* ", Phys. Rev. 75, 213 (1949)
C.J. Gorter: "*A new suggestion for aligning certain atomic nuclei*", Physica 14, 504 (1949)

Iniziamo osservando che una temperatura molto bassa risulterà senz'altro necessaria in quanto il magnetone nucleare $\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p}$ vale $\mu_N = 3.152 \times 10^{-8}\, eV \cdot T^{-1}$ e dunque, anche immaginando di disporre di campi magnetici molto intensi per esempio di $10\,T$, tenendo conto che il nucleo di Cobalto ha un momento magnetico pari a circa tre magnetoni nucleari, risulta $\mu_{Co}\, B \approx 10^{-6}\, eV$, da confrontare con un $kT = 86.2 \cdot 10^{-6}\, eV$ @ $1\,^0K$.
Il problema di riuscire a produrre una temperatura così bassa fu risolto attraverso, appunto, il metodo messo a punto da Rose e Gorter, citati sopra. Nel caso specifico, esso fu realizzato ponendo in un bagno termico di He liquido a pressione di vapore inferiore alla pressione atmosferica ($T_{H_e} \approx 1\,^0K$) un cristallo di Nitrato di Cerio e Magnesio ($2Ce(NO_3)_3 {\cdot} 3Mg(NO_3)_2 {\cdot} 24H_2O$), realizzato in modo che, al suo interno, potesse essere poi depositato un layer molto sottile ($\approx 50\mu m$) di $^{60}_{27}Co$. Questo sale è una sostanza fortemente paramagnetica e anisotropa, che presenta due assi di magnetizzazione con costante di polarizzabilità molto differente: l'asse di maggiore polarizzabilità era disposto nel piano orizzontale mentre quello di minore polarizzabilità era allineato con la direzione verticale.
Come illustrato nella parte sinistra (figura in basso) della Fig.3, veniva prodotto un forte campo magnetico orizzontale. Questo allineava gli spin elettronici (ricordiamo che μ_e è circa 2000 volte maggiore di μ_N) del sale paramagnetico: i livelli che prima dell'imposizione del campo magnetico erano equipopolati, si popolavano favorendo, secondo la statistica di Boltzmann, i livelli di energia più bassa. Questo processo libera energia che viene però assorbita dal bagno di Elio

Il processo di decadimento del ^{60}Co inizia con un decadimento β con $\Delta J = 1$ (transizione di Gamow-Teller permessa, tempo di dimezzamento $5.3\,a$) $^{60}_{27}Co \rightarrow ^{60}_{28}Ni + e^- + \bar{\nu}$ da un livello 5^+ ad un livello 4^+ ($E^{max}_\beta = 314\,KeV$), seguito da una cascata elettromagnetica $4^+ \rightarrow 2^+ \rightarrow 0^+$ con emissione di due fotoni via transizioni $E2$ da $1.173\,MeV$ e $1.332\,MeV$, rispettivamente. I due fotoni sono emessi preferibilmente in una direzione ortogonale alla polarizzazione nucleare del ^{60}Co e dunque, la loro asimmetria poteva essere usata come controllo dell'allineamento nucleare.
Un sottile cristallo di antracene nel criostato rivelava gli elettroni: la luce emessa dal cristallo raggiungeva un fotomoltiplicatore posto in cima al criostato, attraverso una guida di luce. Due contatori a scintillazione di ioduro di sodio esterni al criostato, posti in una configurazione che permetteva il controllo dell'asimmetria di emissione dei gamma, verificavano lo stato di polarizzazione del ^{60}Co in funzione del tempo.
Per invertire lo spin nucleare bastava procedere di nuovo a un raffreddamento dell'intero sistema e quindi invertire il senso di circolazione della corrente nel solenoide.
L'esperimento mostrò una notevole asimmetria[37] nell'emissione β, la quale seguiva strettamente l'evoluzione nel tempo della polarizzazione nucleare $\mathcal{P}(t)$, come mis-

e dunque la temperatura resta costante. Una volta raggiunto l'equilibrio spin-reticolo, veniva tolto il bagno di Elio, isolando così termicamente il cristallo di nitrato di Cerio e Magnesio e quindi la sorgente radioattiva di $^{60}_{27}Co$. Diminuendo il campo magnetico in modo adiabatico (ovvero su tempi più brevi di quelli di rilassamento spin-reticolo, dell'ordine della decina di minuti), poiché la popolazione dei vari livelli non varia (transizione adiabatica), ecco che il sistema, restando con la stessa distribuzione di popolazione, calava la temperatura del cristallo e della sorgente su di esso, restando, almeno in prima approssimazione, $\mu B/kT = cost$. Partendo allora da campi $B \approx 2\,T$, si potevano raggiungere, in questo modo, temperature di pochi milliKelvin, partendo da quella dell'Elio liquido. Una volta effettuato il raffreddamento, il magnete veniva tolto e veniva invece inserito un solenoide che serviva per polarizzare il Cobalto.
Esso generava un campo dell'ordine di $500\,gauss$. Questo non riscaldava apprezzabilmente il sistema sia perché era molto meno intenso del campo usato in precedenza, sia perché era applicato secondo l'asse di minor magnetizzazione del sale. Questo campo B, comunque, era in grado di polarizzare molto efficacemente gli spin *elettronici* del Cobalto che finiva per trovarsi alla temperatura di $\approx 10\,m^0K$

$$\frac{\mu_e B}{kT} \approx \frac{5.788 \cdot 10^{-5} \times 5 \cdot 10^{-2}}{8.617 \cdot 10^{-5} \times 10^{-2}} \approx 3.3$$

La polarizzazione nucleare era determinata dal campo magnetico che i momenti magnetici associati agli elettroni, allineati dal campo esterno, generavano sul nucleo, campi che sono dell'ordine della decina di Tesla.
Al passare del tempo, in circa sei minuti, la temperatura risaliva, distruggendo cosí la polarizzazione nucleare.

[37]La presenza del campo solenoidale durante la misura si limita a canalizzare il moto degli elettroni lungo le linee di forza dello stesso, intorno a cui, data la relativamente bassa energia degli stessi, descrivono spirali piuttosto strette.

urata dall'anisotropia di emissione dei fotoni, i.e.

$$Y(\theta) = 1 - \mathcal{P}(t) < \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E} >= 1 - \mathcal{P}(t)\,\frac{< v >}{c}\,cos\theta \tag{2.113}$$

dove θ è l'angolo fra la direzione di volo dell'elettrone e la direzione della polarizzazione nucleare e, per il decadimento considerato, risulta $< v/c >\approx 0.6$.

Veniamo adesso all'esperimento[38] di Garwin e Lederman, condotto presso il ciclotrone di Nevis.
Essi misero in evidenza la violazione di parità nel decadimento debole del pione, studiando le caratteristiche del decadimento del μ^+ generato dalla disintegrazione del π^+, ovvero studiando la catena

$$\pi^+ \to \mu^+(+\nu_\mu); \quad \mu^+ \to e^+(+\nu_e + \bar{\nu}_\mu) \tag{2.114}$$

Come era stato osservato da Lee e Yang, il muone doveva nascere polarizzato longitudinalmente e questo stato di polarizzazione doveva a sua volta essere correlato con la direzione di emissione del positrone. Il fascio, che conteneva circa il 10% di μ^+ dal decadimento di π^+ in volo, veniva filtrato dai pioni stessi fermandone e assorbendone quanti più possibile in 8" di grafite ($\lambda_I = 5$").
In questo modo veniva massimizzato il numero di *mu*-stop nel bersaglio, posto davanti al telescopio che osservava i positroni di decadimento, realizzato con due scintillatori ed un moderatore fra loro in modo da dare un segnale di coincidenza solo quando l'energia dei positroni era superiore a $25\,MeV$ ($35\,MeV$ in una seconda fase dell'esperimento).
Un campo magnetico $B(I) = 80\,gauss/A$ nella regione del bersaglio induceva una precessione[39] nota (ma variabile in funzione di I) dello spin del muone.

[38] R.L. Garwin, L.M. Lederman, M.Weinrich: *Observation of the failure of Conservation of parity and Charge Conjugation in meson decays: the magnetic moment of the free muon* Phys. Rev. 105, 1415 (1957)

[39] Ricordiamo che in campo magnetico uniforme e costante B, uno spin s che non sia allineato con il campo stesso, precede con una frequenza angolare pari a (SI)

$$2\pi\,\nu \equiv \omega = \frac{\mu\,B}{s\hbar} \qquad dove \qquad \mu = \frac{e\hbar}{2m} \tag{2.115}$$

e dunque, nel caso del muone ($s = 1/2$), assumendo nessun momento anomalo, abbiamo

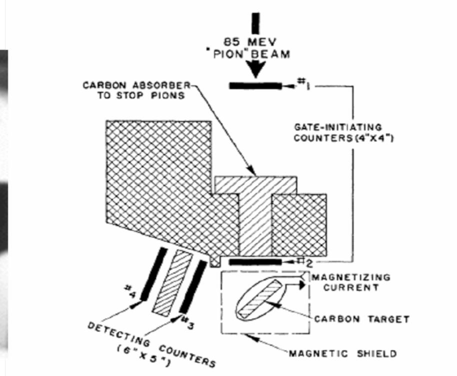
$$\omega = \frac{e\,B}{2s\,m} \quad \Rightarrow \frac{\omega}{B} = \frac{e}{m} = \frac{e\,c^2}{m\,c^2} \tag{2.116}$$

D'altronde

$$m\,c^2 = 105.66\cdot 10^6 eV = 1.06\cdot 10^8 \times 1.6\cdot 10^{-19}\,J \tag{2.117}$$

e dunque

$$\frac{\omega}{B} = \frac{1.6\cdot 10^{-19}(3\cdot 10^8)^2}{1.06\cdot 10^8 \times 1.6\cdot 10^{-19}} = \frac{9\cdot 10^{16}}{1.06\cdot 10^8} \approx 8.5\cdot 10^8\,s^{-1}T^{-1} \tag{2.118}$$



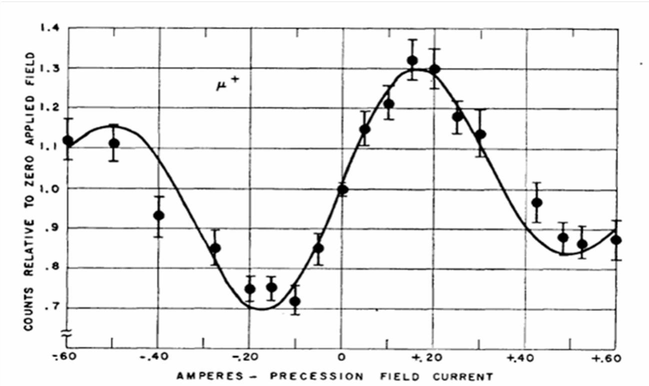


Figure 4: *L'apparato sperimentale usato da Garwin e Lederman per osservare la violazione di parità nel decadimento del muone ed i risultati ottenuti.*

Sperimentalmente si osservava una modulazione del numero dei positroni emessi fra $0.75\,\mu s$ e $2.0\,\mu s$ dopo il trigger di μ-stop in funzione della corrente di induzione magnetica I, compatibile con una correlazione di tipo $\vec{\sigma}\cdot\vec{p}$ fra lo spin del muone al momento del decadimento e la direzione di volo del positrone, indice di violazione di parità sia nel decadimento del pione (se il muone non fosse stato polarizzato, anche se nel suo decadimento si fosse poi violata la parità, non avremmo potuto osservare alcuna modulazione poichè lo stato di spin del muone sarebbe stato distribuito isotropicamente) che nel decadimento del muone.

---

da cui, per un campo di $50\,gauss = 50\cdot 10^{-4}\,T$ (massimo valore raggiunto sul bersaglio ...) ne risulta una frequenza di precessione pari a

$$\omega = 8.5\cdot 10^{8}\times 50\cdot 10^{-4} = 4.25\cdot 10^{6}\,s^{-1} \quad\Rightarrow\quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 1,48\cdot 10^{-6}\,s \tag{2.119}$$

2.2 La Coniugazione di Carica

Un'altra simmetria discreta molto interessante è certamente quella della coniugazione di carica C. Essa è facilmente comprensibile solo nell'ambito della Teoria Quantistica dei Campi. Per poterne parlare in modo non banale nello schema della prima quantizzazione, occorre considerare un sistema fatto da una carica in interazione con il campo elettromagnetico, per cui l'hamiltoniana completa del sistema è

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2m}\left(\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 + e\,V = \\ &= \frac{|\vec{P}|^2}{2m} - \frac{e}{2mc}\left(\vec{A}\cdot\vec{P} + \vec{P}\cdot\vec{A}\right) + \frac{e^2}{2mc^2}|\vec{A}|^2 + e\,V \end{aligned} \tag{2.120}$$

dove e è la carica elettrica, $\vec{A}$ è il potenziale vettore e V il potenziale scalare.

E' immediato verificare che l'hamiltoniana di cui sopra è invariante sotto la seguente trasformazione[40] di simmetria C del campo elettromagnetico e della carica elettrica

$$e \;\to\; -e \tag{2.121}$$

$$\vec{A} \;\to\; -\vec{A} \tag{2.122}$$

$$V \;\to\; -V \tag{2.123}$$

con $\vec{P}$ e $\vec{X}$ invariati.
Visto che gli operatori di impulso e di posizione non cambiano sotto C, affinché essa conservi le regole di commutazione è necessario che risulti

$$C^{-1} i\, C = i \tag{2.124}$$

ovvero che C sia lineare e non antilineare, e dunque sia una simmetria unitaria.

Avremo modo di capirne meglio il significato ed il suo modo di agire quando la riprenderemo nell'ambito della Teoria Quantistica dei Campi.

[40]Questa trasformazione, in questo contesto, deve agire necessariamente anche sulla carica elettrica la quale, però, in prima quantizzazione non è un operatore. Quanto ad $\vec{A}$ e V, essi sono operatori ma solo in quanto funzioni delle coordinate le quali, però, commutano con C !
Di nuovo, affinché C possa agire sui potenziali deve essere coinvolta la carica elettrica ...
Per questi motivi, la coniugazione di carica C è correttamente inseribile nel quadro delle simmetrie discrete solo nello schema della seconda quantizzazione, ovvero nello schema della teoria dei campi.

2.3 *Il sistema dei Kappa neutri e la violazione di CP*

Come è noto, le interazioni deboli violano sia C che P ma, almeno in un primo tempo si ritenne che il prodotto CP fosse conservato. Fu quindi un'altra sorpresa quella di scoprire che nel sistema dei mesoni K neutri questo non era vero !
Vediamo come ci si arrivò.
Ricordiamo che i mesoni K neutri sono particelle pseudoscalari, i.e. essi hanno parità intrinseca $P = -1$ e hanno spin nullo. Essi furono individuati da Rochester e Butler nel 1947 in interazioni di raggi cosmici in camera a nebbia come particelle V^0, e infatti un loro modo frequente di decadimento è quello in due pioni

$$K^0 \to \pi^+ \pi^-$$

Poiché questi mesoni hanno stranezza, essi *non* possono coincidere con la propria antiparticella[41], quindi dovranno esistere sia il K^0 che il $\bar{K^0}$.
Gell-Mann e Pais furono i primi che si posero il problema[42] delle conseguenze osservabili che derivano dall'esistenza di due mesoni neutri coniugati di carica. Essi partirono dall'assunto che C fosse una simmetria rispettata[43] anche dalle interazioni deboli: oggi sappiamo che questo non è vero, anzi che essa è violata in modo massimale, ma vale la pena ripercorrere il loro ragionamento sostituendo semplicemente alla loro l'ipotesi quella che sia invece CP la simmetria conservata anche dalle interazioni deboli. Siccome CP è violata solo marginalmente, questa resta comunque una ipotesi di lavoro molto utile e tutt'altro che peregrina !
Assumiamo dunque che esistano i due stati ortogonali $|K^0>$ e $|\bar{K^0}>$ e definiamo la simmetria di coniugazione di carica assumendo che risulti

$$CP\,|K^0>=|\bar{K^0}>; \qquad\qquad CP\,|\bar{K^0}>=|K^0> \tag{2.125}$$

Iniziamo trattando il problema dell'evoluzione del sistema delle due particelle nell'ipotesi di *assenza* di interazione debole.
Chiaramente, in questa ipotesi, esse non possono decadere e ponendo

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} \quad dove \quad |\Psi(t)>= a(t)\,|K^0> + b(t)\,|\bar{K^0}> \tag{2.126}$$

---

[41]In termine di quarks, oggi sappiamo infatti che

$$|K^0>=|d\bar{s}>; \qquad\qquad |\bar{K^0}>=|\bar{d}s>$$

e la stranezza del K^0 è $S = +1$, mentre quella del $\bar{K^0}$ è $S = -1$.

[42]M. Gell-Mann, A. Pais: *Behavior of neutral particles under charge conjugation*, Phys. Rev. 97, 1387 (1955)

[43]Si ricordi che la violazione della parità nelle interazioni deboli fu appurata solo nel 1957, cioè due anni dopo l'analisi di Gell-Mann e Pais.

ne segue che la funzione d'onda $\Psi(t)$ evolve in modo libero per cui, nel sistema del CM, sarà

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t) = H\,\Psi(t), \qquad H = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \tag{2.127}$$

dove si è assunta valida la simmetria CPT e dunque che

$$m(K^0) = m(\bar{K^0}) \equiv M \tag{2.128}$$

In questa ipotesi, il sistema è dunque costituito da due stati degeneri.
Immaginiamo adesso di "accendere" l'interazione debole.
A causa, per esempio, del fatto che sia il $|K^0>$ che il $|\bar{K^0}>$ possono decadere in una coppia di pioni, si apre la possibilità che essi si trasformino, al secondo ordine nelle interazioni deboli, l'uno nell'altro, i.e. che

$$\Big(|K^0>\to\pi\,\pi;\ \ |\bar{K^0}>\to\pi\,\pi\Big) \quad\Rightarrow\quad |K^0>\to\pi\,\pi\to|\bar{K^0}> \tag{2.129}$$

Dunque la dinamica debole deve consentire (al secondo ordine) oscillazioni del tipo

$$|K^0> \ \leftrightarrow\ \ |\bar{K^0}> \tag{2.130}$$

per cui l'hamiltoniana del sistema $\Big\{|K^0>,\ \ |\bar{K^0}>\Big\}$, deve piuttosto essere della forma[44]

$$H = \begin{pmatrix} M & \Delta_1 \\ \Delta_2 & M \end{pmatrix} \tag{2.131}$$

Se però CP è conservata dall'hamiltoniana, allora

$$\Delta_1 =< K^0|\,H\,|\bar{K^0}>=< K^0|\,(CP)\,H\,(CP)\,|\bar{K^0}>=<\bar{K^0}|\,H\,|K^0>=\Delta_2 \tag{2.132}$$

e dunque l'hamiltoniana H sarà in realtà del tipo

$$H = \begin{pmatrix} M & \Delta \\ \Delta & M \end{pmatrix} \tag{2.133}$$

Questa hamiltoniana, indipendentemente dal valore effettivo di Δ (che, pur essendo certamente piccolissimo in confronto ad M, visto che descrive un processo al secondo ordine nell'interazione debole, esso non è quindi certamente nullo ...), ha comunque i due autovettori della forma

$$|K_1^0> \ = \ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|K^0> + |\bar{K^0}>\Big) \tag{2.134}$$

$$|K_2^0> \ = \ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|K^0> - |\bar{K^0}>\Big) \tag{2.135}$$

[44]L'invarianza sotto $\Theta \equiv CPT$ implica in generale che, per il suo carattere antiunitario, risulti $<\Phi|H|\Psi>=<\Theta\,\Psi|H|\Theta\,\Phi>$ e dunque che $< K^0|H|K^0>=<\bar{K^0}|H|\bar{K^0}>$.

corrispondenti, rispettivamente, agli autovalori $M \pm \Delta$ e quindi il sistema non è più degenere.
Siccome per ipotesi $[H, CP] = 0$ questi autovettori dell'hamiltoniana devono essere anche autovettori simultanei di CP ed è immediato che lo sono per gli autovalori ± 1, rispettivamente.

L'interazione debole, però, come si è detto, accoppia gli stati di $|K^0>$ e $|\bar{K^0}>$ ad altri stati, sia di multi-pione che semileptonici, etc ..., i quali non stanno nello spazio di Hilbert bidimensionale fin'ora considerato. Questo a priori significa che non è possibile descrivere compiutamente l'evoluzione del sistema $|K^0>$, $|\bar{K^0}>$ senza allargare lo spazio generato da questi stessi stati. Se però non siamo interessati a conoscere il dettaglio gli stati finali ma solo a sapere che cosa accade agli stati di $|K^0>$ e di $|\bar{K^0}>$, allora si può restare nello spazio bidimensionale da essi definito ma occorre ammettere che l'hamiltoniana non sia più hermitiana bensì contenga i termini opportuni che descrivono il decadimento esponenziale degli stati altrimenti stazionari. Dunque, sempre nell'ipotesi che CP sia una simmetria rispettata dall'interazione debole, i due stati ortogonali $|K_1^0>$ e $|K_2^0>$ evolveranno verso stati con lo stesso autovalore di CP, senza mescolamenti, ciascuno con una propria larghezza di decadimento Γ_1 e Γ_2, per cui, in questa stessa base, avremo

$$H = \begin{pmatrix} M + \Delta - \frac{i}{2}\Gamma_1 & 0 \\ 0 & M - \Delta - \frac{i}{2}\Gamma_2 \end{pmatrix} \tag{2.136}$$

e dunque, quanto all'evoluzione temporale, sarà ($\hbar = c = 1$)

$$|K_1^0, t> \;=\; e^{-i(M+\Delta-\frac{i}{2}\Gamma_1)t}\,|K_1^0>= e^{-i(M+\Delta)t}e^{-\frac{1}{2}\Gamma_1 t}\,|K_1^0> \tag{2.137}$$
$$|K_2^0, t> \;=\; e^{-i(M-\Delta-\frac{i}{2}\Gamma_2)t}\,|K_2^0>= e^{-i(M-\Delta)t}e^{-\frac{1}{2}\Gamma_2 t}\,|K_2^0> \tag{2.138}$$

Ciò che Gell-Mann e Pais misero in evidenza era che mentre il $|K_1^0>$ poteva decadere in due pioni perché questo è uno stato CP-pari[45], se CP era conservata, il $|K_2^0>$ non poteva farlo, bensì doveva decadere in almeno tre pioni.
Però, in questo caso, per esempio lo spazio delle fasi era molto più ridotto e quindi c'era da aspettarsi che il $|K_2^0>$ avesse una vita media sensibilmente più lunga.
Osserviamo adesso che, nel processo forte di produzione dei mesoni strani, non vengono prodotti né il $|K_1^0>$ né il $|K_2^0>$, bensì viene prodotto tipicamente un

[45] Nel caso, per esempio, del sistema $\pi^+\pi^-$, coniugazione di carica e parità equivalgono entrambe alla simmetria di scambio e dunque moltiplicano ciascuna la funzione d'onda dello stato per $(-1)^L$, per cui l'applicazione di entrambe lascia la funzione d'onda inalterata.
Nel caso di due pioni neutri, la coniugazione di carica non altera lo stato, ma la parità continua ad equivalere allo scambio e, trattandosi di bosoni identici ...
Il contrario accade, per esempio, nel decadimento in tre π^0 che sappiamo avvenire in onda S. I tre pioni devono avere la funzione d'onda globalmente simmetrica, da cui ne segue che, essendo autostati di C per l'autovalore $+1$ e avendo la parità intrinseca negativa, lo stato avrà l'autovalore di CP necessariamente uguale a -1.

K^0, magari insieme alla Λ o ad una Σ ... E' quindi dell'evoluzione dello stato di K^0 così prodotto che occorre, piuttosto, occuparci[46] !
Per sapere come esso evolve, basta in realtà applicare semplicemente i principi primi della Meccanica Quantistica. Essa ci dice che

$$|K^0>= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|K_1^0> +|K_2^0>\right) \tag{2.139}$$

dunque

$$|K^0,t>= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-iM\,t}\left(e^{-it\,\Delta}\,e^{-t\Gamma_1/2}|K_1^0> +\,e^{it\,\Delta}\,e^{-t\Gamma_2/2}|K_2^0>\right) \tag{2.140}$$

Questo implica che, al tempo $t \geq 0$, le probabilità che si abbia a che fare con un $|K_1^0>$ oppure con un $|K_2^0>$ valgono, rispettivamente

$$|<K_1^0|K^0,t>|^2 = \frac{1}{2}e^{-t\Gamma_1} \tag{2.141}$$

$$|<K_2^0|K^0,t>|^2 = \frac{1}{2}e^{-t\Gamma_2} \tag{2.142}$$

per cui, su tempi brevi, osserveremo molto frequentemente il decadimento del $|K_1^0>$, il quale procede con la vita media più breve Γ_1, mentre su tempi lunghi, lo stato tenderà a divenire uno stato puro di $|K_2^0>$ perchè la componente $|K_1^0>$ sarà nel frattempo tutta decaduta, e quindi, per tempi lunghi, dovremo aspettarci, per esempio, solo decadimenti a tre pioni (e verso altri canali magari divenuti competitivi con questo ...), ma certamente non più a due pioni !
Effettivamente in natura si osserva sia uno stato di K neutro, chiamato $|K_S>$, il quale decade tipicamente in due pioni (carichi o neutri) con una vita media relativamente breve ($\tau_S = 0.895 \times 10^{-10}\,s$) come pure uno stato chiamato $|K_L>$ il quale decade in tre pioni (oltre ad alcuni canali semileptonici) con una vita media relativamente lunga ($\tau_L = 5.12 \times 10^{-8}\,s$).
Tutto bene, dunque ! Non esattamente ...
La novità venne con l'esperimento[47] di Cronin, Christenson, Fitch e Turlay che mostrò come il $|K_L>$ poteva decadere, in circa lo 0.2% dei casi in due pioni. Come poteva succedere ?
Le spiegazioni possibili richiedevano di rimettere in discussione la simmetria CP ed erano sostanzialmente due:

- i due autostati dell'hamiltoniana $|K_S>$ e $|K_L>$ *non* coincidevano esattamente con $|K_1^0>$ e $|K_2^0>$ e quindi non erano autostati di CP; però il decadimento debole rispettava questa simmetria.
  E' questo il cosiddetto meccanismo della *violazione indiretta.*

[46] Anche nel caso che venga prodotto il $|\bar{K}^0>$, la conclusione che segue è la stessa ...
[47] J.H. Christenson, J.W. Cronin, V.L. Fitch, R. Turlay: *Evidence for 2π decay of the $|K_2^0>$ meson*, Phys. rev. Lett. 13, 138 (1964)

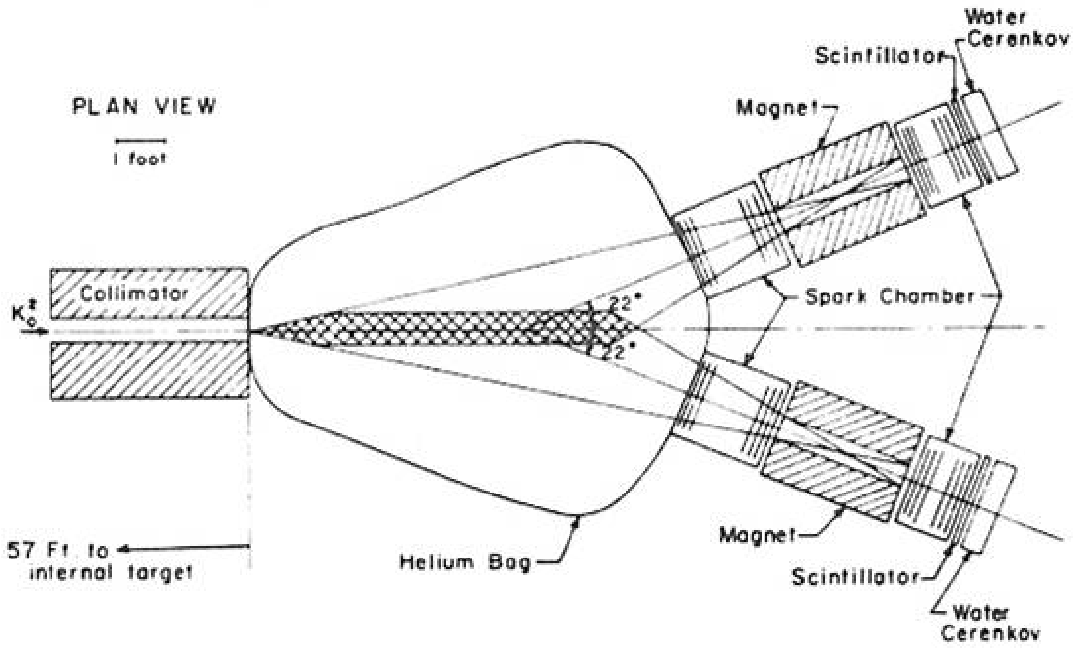


Figure 5: *Apparato sperimentale di Cronin et al.*

- CP non era rispettata nel decadimento debole: è il meccanismo della *violazione diretta*.

Oggi sappiamo che sono presenti entrambi i meccanismi, però quanto osservato da Cronin e collaboratori era un effetto dovuto alla violazione indiretta. Cerchiamo di capire che cosa questo significa e come avviene.

Ripartiamo per questo dall'hamiltoniana H che descrive l'evoluzione del sistema $|K^0>$, $|\bar{K}^0>$ in questa stessa base. Nel caso più generale possibile, essa sarà una matrice complessa 2×2, i.e. della forma

$$H = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{2.143}$$

I suoi autovalori sono

$$\lambda_\pm = \frac{1}{2}\left[a + d \pm \sqrt{(d-a)^2 + 4bc}\right] \tag{2.144}$$

e i corrispondenti autovettori $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}_\pm$ sono tali per cui il rapporto fra le loro due componenti è dato da

$$\left(\frac{q}{p}\right)_\pm = \frac{\lambda_\pm - a}{b} = \frac{d - a \pm \sqrt{(d-a)^2 + 4bc}}{2b} \tag{2.145}$$

Ricordiamo però che l'hamiltoniana deve rispettare[48] almeno CPT, per cui

$$a \;=\; d \equiv M - \frac{i}{2}\,\Gamma \tag{2.146}$$

Questo significa che, per la (2.144), risulta

$$\lambda_\pm = M - \frac{i}{2}\,\Gamma \pm \sqrt{bc} \tag{2.147}$$

ovvero, definendo[49]

$$\sqrt{bc} \equiv -\frac{1}{2}\left(\Delta M + \frac{i}{2}\Delta\Gamma\right) \tag{2.148}$$

quanto agli autovalori dell'hamiltoniana si ha

$$\lambda_\pm = M - \frac{i}{2}\,\Gamma \mp \frac{1}{2}\left(\Delta M + \frac{i}{2}\Delta\Gamma\right) \tag{2.149}$$

Veniamo ora agli autovettori dell'hamiltoniana H. Dalla (2.145) risulta adesso che

$$\left(\frac{q}{p}\right)_\pm = \pm\sqrt{\frac{c}{b}} \tag{2.150}$$

Nell'ipotesi in cui CP commuti con H, come abbiamo visto la quantità sotto radice vale proprio 1, mentre in generale sarà

$$\sqrt{\frac{c}{b}} \equiv z = \rho\, e^{i\beta} \tag{2.151}$$

dove z è un opportuno numero complesso di modulo ρ e fase β. Definiamo allora il seguente parametro complesso ϵ, il quale descrive appunto l'entità della violazione (indiretta) di CP e risulta nullo se CP è rispettata.

$$\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon} = z \Leftrightarrow \epsilon \equiv \frac{1-\rho e^{i\beta}}{1+\rho e^{i\beta}} \tag{2.152}$$

Da quanto precede otteniamo che gli autovettori corripondenti agli autovalori $\lambda_\pm$ sono tali che

$$\begin{aligned} |\pm> \;&\propto\; \Big[(1+\epsilon)|K^0>) \pm (1-\epsilon)\,|\bar{K^0}>)\Big] \\ &=\; \Big[(|K^0> \pm|\bar{K^0}>) + \epsilon\,(|K^0> \mp|\bar{K^0}>)\Big] \end{aligned} \tag{2.153}$$

[48]Poiché l'hamiltoniana ristretta al sottospazio bidimensionale dei K neutri non è hermitiana per le ragioni che abbiamo detto, l'invarianza sotto T (e quindi anche sotto CPT), per il carattere antiunitario di T stesso, richiede che $T\,H\,T^{-1} = H^\dagger$.

[49]La scelta dei segni è fatta in modo che all'autovettore corrispondente a λ_+ corrisponda una larghezza maggiore, ovvero una vita media minore.

ovvero, normalizzandoli, abbiamo finalmente

$$\begin{aligned}
|K_S> &= \frac{1}{\sqrt{2(1+|\epsilon|^2)}}\left[(1+\epsilon)|K^0> +(1-\epsilon)|\bar{K^0}>\right] = \frac{1}{\sqrt{1+|\epsilon|^2}}\left[|K_1^0> +\epsilon\,|K_2^0>\right]\\
|K_L> &= \frac{1}{\sqrt{2(1+|\epsilon|^2)}}\left[(1+\epsilon)|K^0> -(1-\epsilon)|\bar{K^0}>\right] = \frac{1}{\sqrt{1+|\epsilon|^2}}\left[|K_2^0> +\epsilon\,|K_1^0>\right]
\end{aligned}$$

la quale mostra come una hamiltoniana CPT-invariante che descrive l'evoluzione del sistema $|K^0>$, $|\bar{K^0}>$ in cui, però, sono presenti termini che violano CP, può generare un mescolamento degli stati con CP opposta e quindi, anche nell'ipotesi che i decadimenti in due o tre pioni del $|K_1^0>$ e $|K_2^0>$ rispettino CP, può rendere conto, attraverso semplicemente il meccanismo della violazione indiretta, dell'osservazione fatta da Cronin e collaboratori.

La ragionevolezza di questa spiegazione è suffragata anche dalla asimmetria di carica che viene osservata nei decadimenti semileptonici del K_L.
Vediamo di che si tratta.
Il mesone $|K^0>$ è un sistema $(d\bar{s})$ e, via corrente carica, il quark $\bar{s}$ può trasformarsi in $\bar{u}$ emettendo un W^+ che può materializzarsi in una coppia leptonica, per esempio $e^+\,\nu_e$. Ne discende quindi il decadimento

$$|K^0>\equiv|d\bar{s}>\rightarrow|d\bar{u}>+e^+ +\nu_e\equiv\pi^-\,e^+\,\nu_e \tag{2.154}$$

Per lo stesso motivo accade però che

$$|\bar{K^0}>\equiv|s\bar{d}>\rightarrow|u\bar{d}>+e^- +\bar{\nu}_e\equiv\pi^+\,e^-\,\bar{\nu}_e \tag{2.155}$$

Se adesso abbiamo un fascio di K_L (basta mettersi abbastanza lontani dalla loro sorgente e questo accade in modo naturale ...) siccome il $|K^0>$ vi compare pesato con $(1+\epsilon)$ mentre il $|\bar{K^0}>$ vi compare pesato con $(1-\epsilon)$, ecco che se N_+ indica il numero degli eventi di decadimento con positrone e N_- quello degli eventi con elettrone, allora questi numeri differiranno fra loro in relazione proprio al valore di ϵ, infatti avremo

$$\delta\equiv\frac{N_+-N_-}{N_++N_-}=\frac{|1+\epsilon|^2-|1-\epsilon|^2}{|1+\epsilon|^2+|1-\epsilon|^2}=\frac{2\Re e(\epsilon)}{1+|\epsilon|^2}\approx 2\Re e(\epsilon) \tag{2.156}$$

Sperimentalmente il valore misurato è

$$\delta=(3.32\pm 0.06)\times 10^{-3} \tag{2.157}$$

Non è affatto un caso che la quantità osservabile[50] δ non misuri il parametro di mixing ϵ ma la combinazione $\frac{2\Re e(\epsilon)}{1+|\epsilon|^2}$.

[50]Si osservi che, proprio per il meccanismo che la genera, l'asimmetria di carica deve risultare la stessa anche quando la coppia leptonica sia fatta da $\mu^+\,\nu_\mu$!

Il punto sta nel fatto che la simmetria di coniugazione di carica C contiene, nella sua definizione, una arbitrarietà di fase che occorre fissare. Definendo la base (2.125) noi lo abbiamo fatto in modo implicito: è la convenzione di fase di Wu-Yang. Però, al posto della base $\left\{|K^0>, |\bar{K^0}>\right\}$ così definita, avremmo potuto equivalentemente usare la base $\left\{|K^0_\alpha>, |\bar{K}^0_\alpha>\right\}$ seguente

$$\begin{array}{lcl} |K^0_\alpha> & \equiv & e^{-i\alpha/2}\,|K^0> \\ |\bar{K}^0_\alpha> & \equiv & e^{i\alpha/2}\,|\bar{K^0}> \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{lcl} CP\,|K^0_\alpha> & \equiv & e^{-i\alpha}\,|\bar{K}^0_\alpha> \\ CP\,|\bar{K}^0_\alpha> & \equiv & e^{i\alpha}\,|K^0_\alpha> \end{array} \tag{2.158}$$

In questa base l'hamiltoniana (2.143) assume la forma[51] seguente:

$$H \;\rightarrow\; H' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b\,e^{-i\alpha} \\ c\,e^{i\alpha} & d \end{pmatrix} \tag{2.159}$$

Le due descrizioni del sistema dei due mesoni K neutri devono però essere equivalenti e dunque nessuna osservabile fisica deve poter essere affetta da questa trasformazione. Però dalla definizione (2.152) risulta evidente che

$$\sqrt{\frac{c}{b}} = \rho\, e^{i\beta} \;\rightarrow\; \sqrt{\frac{c'}{b'}} = \rho e^{i(\alpha+\beta)} \equiv \frac{1-\epsilon'}{1+\epsilon'} \tag{2.160}$$

Evidentemente, per l'arbitrarietà di α, solo il parametro ρ può avere un significato indipendente dalla convenzione di fase e dunque solo ρ può essere legato a quantità osservabili. In particolare accade che la violazione di CP è presente nel sistema se e solo se $\rho \neq 1$, indipendentemente dal valore della fase β.
A conferma di questa affermazione, abbiamo per esempio che il parametro δ definito dalla (2.156), il quale misura appunto l'asimmetria di carica nel decadimento dei K_L, direttamente legato alla violazione indiretta, dipende da ϵ solo

[51]Non meravigli che adesso i termini fuori diagonale siano proporzionali a fattori di fase inversi uno dell'altro: abbiamo cambiato la definizione di C e quindi di CP per cui, per esempio, non è più vero che i due termini debbano essere uguali se CP è conservata ...

attraverso ρ, essendo infatti[52]

$$\frac{2\Re e(\epsilon)}{1+|\epsilon|^2} = \frac{1-\rho^2}{1+\rho^2} \tag{2.164}$$

Un altro fenomeno molto interessante che vale la pena di ricordare riguarda la cosiddetta *oscillazione di stranezza.*
Supponiamo che al tempo $t = 0$ sia stato formato uno stato di $|K_0>$ (di $|\bar{K^0}>$): ci domandiamo quale sia la probabilità che al tempo t esso sia trovato (per esempio attraverso un decadimento semileptonico) in uno stato di $|\bar{K^0}>$ ($|K_0>$).

Trattiamo senz'altro il problema nella convenzione di fase di Wu-Yang.
Come si è già visto in precedenza, risulta

$$\begin{aligned} |K_S> &= \frac{1}{\sqrt{1+|\epsilon|^2}}\left[|K_1^0> + \epsilon\ |K_2^0>\right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{1+|\epsilon|^2}}\left[\left(|K_0> + |\bar{K^0}>\right) + \epsilon\left(|K_0> - |\bar{K^0}>\right)\right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{1+|\epsilon|^2}}\left[(1+\epsilon)|K_0> + (1-\epsilon)|\bar{K^0}>\right] \end{aligned} \tag{2.165}$$

e analogamente

$$\begin{aligned} |K_L> &= \frac{1}{\sqrt{1+|\epsilon|^2}}\left[|K_2^0> + \epsilon\ |K_1^0>\right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{1+|\epsilon|^2}}\left[\left(|K_0> - |\bar{K^0}>\right) + \epsilon\left(|K_0> + |\bar{K^0}>\right)\right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{1+|\epsilon|^2}}\left[(1+\epsilon)|K_0> - (1-\epsilon)|\bar{K^0}>\right] \end{aligned} \tag{2.166}$$

---

[52]Poniamo per semplicità

$$\sqrt{\frac{c}{b}} = \rho\, e^{i\beta} \equiv z \quad \Rightarrow \quad \epsilon = \frac{1-z}{1+z} = \frac{1-z}{1+z}\frac{1+z^*}{1+z^*} = \frac{1-|z|^2-2i\Im m(z)}{1+|z|^2+2\Re e(z)} \Rightarrow \tag{2.161}$$

$$\Rightarrow \quad \Re e(\epsilon) = \frac{1-\rho^2}{1+\rho^2+2\Re e(z)} \tag{2.162}$$

D'altronde

$$\begin{aligned} 1+|\epsilon|^2 &= 1+\frac{1-z}{1+z}\frac{1-z^*}{1+z^*} = 1+\frac{1+|z|^2-2\Re e(z)}{1+|z|^2+2\Re e(z)} = 1+\frac{1+\rho^2-2\Re e(z)}{1+\rho^2+2\Re e(z)} = \\ &= 2\frac{1+\rho^2}{1+\rho^2+2\Re e(z)} \end{aligned} \tag{2.163}$$

e mettendo insieme questa relazione con la precedente (2.162), otteniamo immediatamente la (2.164).

per cui abbiamo che

$$|K_0> \;=\; \frac{\sqrt{1+|\epsilon|^2}}{\sqrt{2}(1+\epsilon)}\,(|K_S>+|K_L>) \tag{2.167}$$

$$|\bar{K^0}> \;=\; \frac{\sqrt{1+|\epsilon|^2}}{\sqrt{2}(1-\epsilon)}\,(|K_S>-|K_L>) \tag{2.168}$$

Evidentemente, allora

$$|K_0,t> \;=\; \frac{\sqrt{1+|\epsilon|^2}}{\sqrt{2}(1+\epsilon)}\,(|K_S,t>+|K_L,t>) \tag{2.169}$$

Ma gli stati $|K_S>$ e $|K_L>$ sono, per definizione, autostati dell'hamiltoniana per gli autovalori $\lambda_\pm$ di cui alla (2.149), quindi

$$|K_S,t>= e^{-i[M-\frac{i}{2}\,\Gamma-\frac{1}{2}(\Delta M+\frac{i}{2}\Delta\Gamma)]t}|K_S>= e^{-i[M-\frac{1}{2}\Delta M)]t}e^{-[\Gamma+\frac{1}{2}\Delta\Gamma)]t/2}|K_S> \tag{2.170}$$

$$|K_L,t>= e^{-i[M-\frac{i}{2}\,\Gamma+\frac{1}{2}(\Delta M+\frac{i}{2}\Delta\Gamma)]t}|K_L>= e^{-i[M+\frac{1}{2}\Delta M)]t}e^{-[\Gamma-\frac{1}{2}\Delta\Gamma)]t/2}|K_L> \tag{2.171}$$

mentre abbiamo

$$<\bar{K}^0|K_S>=\frac{1-\epsilon}{\sqrt{2}\sqrt{1+|\epsilon|^2}};\qquad <\bar{K}^0|K_L>=-\frac{1-\epsilon}{\sqrt{2}\sqrt{1+|\epsilon|^2}} \tag{2.172}$$

per cui, se poniamo per comodità

$$a(t) \;=\; e^{-i[M-\frac{i}{2}\,\Gamma-\frac{1}{2}(\Delta M+\frac{i}{2}\Delta\Gamma)]t} \tag{2.173}$$

$$b(t) \;=\; e^{-i[M-\frac{i}{2}\,\Gamma+\frac{1}{2}(\Delta M+\frac{i}{2}\Delta\Gamma)]t} \tag{2.174}$$

allora la probabilità cercata vale

$$\begin{aligned}|<\bar{K}^0|K_0,t>|^2 \;&=\; \frac{1+|\epsilon|^2}{2|1+\epsilon|^2}\left|a(t)\;<\bar{K}^0|K_S>+\,b(t)\;<\bar{K}^0|K_L>\right|^2 =\\ &=\; \frac{1+|\epsilon|^2}{2|1+\epsilon|^2}\Big\{|a(t)|^2\;\;|<\bar{K}^0|K_S>|^2+|b(t)|^2\;\;|<\bar{K}^0|K_L>|^2+\\ &+\;\; 2\Re e\Big(a(t)b(t)^*<\bar{K}^0|K_S><\bar{K}^0|K_L>^*\Big)\Big\}\end{aligned} \tag{2.175}$$

ovvero, usando il fatto che risulta

$$\begin{aligned}|<\bar{K}^0|K_S>|^2 \;&=\; |<\bar{K}^0|K_L>|^2 = -<\bar{K}^0|K_S><\bar{K}^0|K_L>^*=\\ &=\; \left|\frac{1-\epsilon}{2(1+|\epsilon|^2)}\right|^2\end{aligned} \tag{2.176}$$

e che

$$|a(t)|^2 = e^{-t\,\Gamma_S}; \;\; |b(t)|^2 = e^{-t\,\Gamma_L}; \;\; a(t)b(t)^* = e^{-t\,(\Gamma_S+\Gamma_L)/2}\,e^{i\Delta M t} \qquad (2.177)$$

abbiamo infine che

$$\begin{aligned} |<\bar{K}^0|K_0,t>|^2 &= \left|\frac{1-\epsilon}{2(1+\epsilon)}\right|^2 \left[e^{-t\,\Gamma_S} + e^{-t\,\Gamma_L} - 2\,e^{-t\,(\Gamma_S+\Gamma_L)/2}\,cos(\Delta M\,t)\right] = \\ &= \frac{\rho^2}{4}\left[e^{-t\,\Gamma_S} + e^{-t\,\Gamma_L} - 2\,e^{-t\,(\Gamma_S+\Gamma_L)/2}\,cos(\Delta M\,t)\right] \qquad (2.178) \end{aligned}$$

Se adesso ripetiamo il conto per il caso opposto, otteniamo invece

$$|<K^0|\bar{K}^0,t>|^2 = \frac{1}{4\rho^2}\left[e^{-t\,\Gamma_S} + e^{-t\,\Gamma_L} - 2\,e^{-t\,(\Gamma_S+\Gamma_L)/2}\,cos(\Delta M\,t)\right] \qquad (2.179)$$

la quale mostra che le due probabilità di oscillazione non coincidono se $\rho \neq 1$, ovvero se CP è violata.

Per concludere l'argomento, nel 2002 è stato infine dimostrato[53] sperimentalmente che, oltre al meccanismo indiretto descritto sopra, nel decadimento dei K neutri in due pioni, è presente anche un piccolo contributo di violazione diretta (pari a circa lo 0.14% del contributo indiretto), come previsto dal MS attraverso la fase complessa nella matrice di mixing dei quarks.

[53]NA48 Collaboration: *A precision measurement of direct CP violation in the decay of neutral kaons into two pions*, Phys. Lett. 544B, 97, (2002)

2.4 La simmetria di inversione temporale

Si tratta della simmetria discreta meno intuitiva di tutte.
Intanto va notato che essa, nonostante il nome, non ha tanto a che vedere con l'inversione del tempo, quanto piuttosto con la reversibilità dei processi fisici.
Per meglio capire di che si tratta, vale la pena iniziare addirittura dalla Meccanica Classica, considerando appunto un sistema meccanico, per esempio un punto materiale di massa m, il quale sia semplicemente soggetto alla forza di gravità.

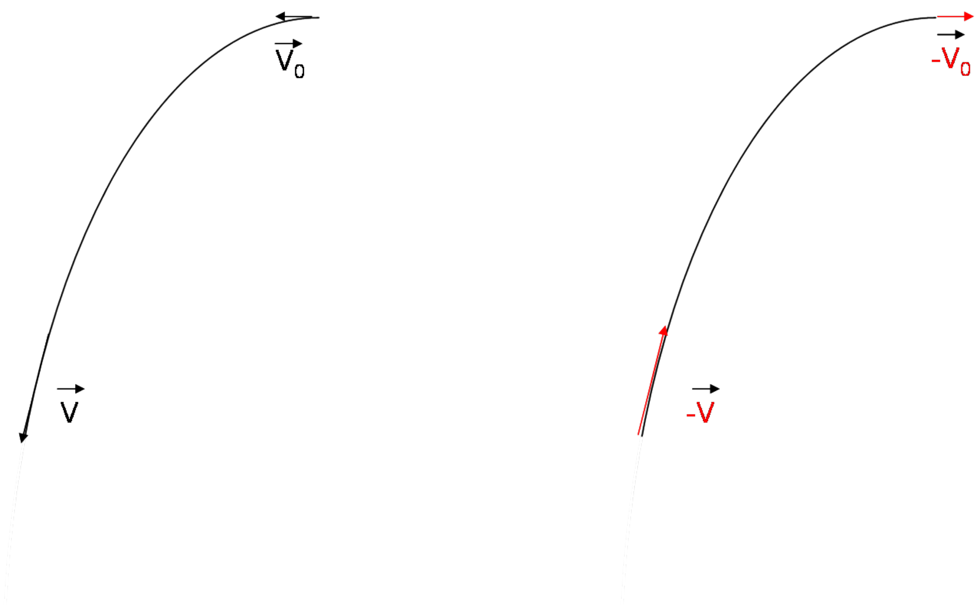


Figure 6: *Reversibilità della traiettorie di un punto materiale nel campo della gravità*

Al tempo $t + \Delta t$, fissate le condizioni iniziali al tempo t, i.e. $\left(\vec{X}(t) \equiv \vec{X}_0,\, \vec{v}(t) \equiv \vec{v}_0 \right)$, il punto materiale si troverà nella posizione $\vec{X}(t + \Delta t)$ e la sua velocità sarà data da

$$\vec{v}(t + \Delta t) = \vec{v}_0 + \vec{g}\,\Delta t \equiv \vec{v}^{\,'} \tag{2.180}$$

Chiedersi se c'è invarianza per inversione temporale (Time-reversal) della legge del moto significa

- prendere come stato iniziale quello di arrivo, i.e. $\left(\vec{X}(t + \Delta t) \equiv \vec{X}^{\,'}, \vec{v}(t + \Delta t) \equiv \vec{v}^{\,'}\right)$;
- applicare la trasformazione di Time-reversal allo stato e dunque cambiare il segno della velocità $\vec{v}^{\,'} \to T(\vec{v}^{\,'}) \equiv -\vec{v}^{\,'}$, lasciando inalterata la posizione;
- lasciare evolvere lo stato così ottenuto ancora per il solito intervallo di tempo Δt, secondo la stessa dinamica;

- verificare se lo stato finale così raggiunto coincide o meno con il $T-$trasformato di quello da cui si era originariamente partiti.

Nel caso considerato della sola forza di gravità in assenza di attrito, questo è ciò che effettivamente accade, infatti, dopo il tempo Δt, la stessa legge di moto avrà fatto sì che la nuova velocità acquisita dal punto materiale sia

$$\vec{v}^{"} \;=\; T(\vec{v}^{'}) + \vec{g}\,\Delta t = -\,(\vec{v}_0 + \vec{g}\,\Delta t) + \vec{g}\,\Delta t = -\vec{v}_0$$

e avrà fatto ripercorrere a ritroso la stessa traiettoria descritta originariamente dal grave, per cui possiamo concludere che il moto di un punto materiale nel campo della gravità è effettivamente $T-$invariante.
E' opportuno, comunque, puntualizzare che, nel trarre questa conclusione, abbiamo implicitamente assunto che la massa m del corpo e il campo della gravitazione non siano alterati dalla trasformazione di Time-reversal, ovvero che siano $T-$invarianti. Per capire meglio cosa intendiamo dire, osserviamo che, nella trattazione precedente, nulla cambierebbe se, al posto di un punto materiale nel campo della gravità ci fosse una carica elettrica in un campo elettrico $\vec{E}(\vec{x})$ dato. Avremmo ancora reversibilità del moto, pur di assumere che la carica e il campo elettrico siano invarianti per Time-reversal.
Che cosa succederebbe, però, se fosse presente, per esempio, (anche) un campo magnetico ?
E' evidente dall'espressione della forza di Lorentz che, visto che per Time-reversal la velocità cambia segno, affinchè T possa essere una simmetria conservata in elettrodinamica, occorre assumere che $\vec{B}$, a differenza di $\vec{E}$, cambi segno[54] sotto T.

Tutto questo per rimarcare una cosa altrimenti ovvia e cioè che, nel momento in cui dovremo trattare un problema in cui è presente un'interazione con campi esterni, prima di trarre conclusioni, sarà necessario tenere conto anche delle proprietà di trasformazione di questi ultimi sotto la simmetria considerata ...

Un altro modo equivalente a quello esposto sopra per verificare se in un certo sistema meccanico sia rispettata o meno l'invarianza per Time-reversal è quello di partire dalla legge oraria

$$\vec{x} = \vec{x}(t) \tag{2.181}$$

e verificare se, sotto la trasformazione

$$T: \qquad t \;\rightarrow\; \bar{t} = -t \tag{2.182}$$
$$\vec{x}(t) \;\rightarrow\; \vec{x}_T(\bar{t}) = \vec{x}(t) \tag{2.183}$$

la nuova legge oraria

$$\vec{x}_T(\bar{t}) = \vec{x}(-\bar{t}) \tag{2.184}$$

[54] Questo non ha nulla di misterioso né di contraddittorio con quanto accade per il campo elettrico, visto che il campo magnetico è prodotto da cariche in moto e che, sotto T, il moto cambia verso ...

implica comunque la stessa dinamica[55] relativamente alla variabile temporale $\bar{t}$.

Veniamo adesso al problema della simmetria di Time-reversal in Meccanica Quantistica e poniamoci, per comodità, nella Schrödinger Picture.
Alla luce di quanto detto sopra, se $|\psi, t>$ è l'evoluto al tempo t dello stato $|\psi, 0>$ al tempo $t = 0$, vogliamo che, se T è rispettata, allora lo stato $T|\psi, t>$, lasciato evolvere ancora per un tempo t, conduca di nuovo a $T|\psi, 0>$.
Ma come agisce l'operatore T sui vettori dello spazio di Hilbert ?
Iniziamo per questo cercando di vedere come, sulla base dell'analogia classica, noi ci aspettiamo che T agisca sulle osservabili $\vec{X}$ e $\vec{P}$.
Evidentemente, partendo dal significato classico che attribuiamo a questa simmetria, siamo indotti a richiedere che risulti

$$T^{-1}\,\vec{X}\,T \;=\; \vec{X} \tag{2.189}$$
$$T^{-1}\,\vec{P}\,T \;=\; -\vec{P} \tag{2.190}$$

Queste due semplici richieste, però, sono già sufficienti per dirci che se vogliamo che T possa essere una simmetria, e dunque che rispetti, per esempio, le regole di commutazione canoniche $[x_i, p_j] = i\,\hbar\,\delta_{ij}$, allora è necessario che

$$T^{-1}\,i\,T = -i \tag{2.191}$$

[55]Evidentemente, nel caso di un punto materiale di massa m soggetto ad una forza esterna $\vec{F} = \vec{F}(\vec{x})$, questa simmetria è sempre rispettata, poiché la seconda legge della dinamica

$$m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \vec{F}(\vec{x}) \tag{2.185}$$

è T-invariante, essendo

$$\vec{x}(t) \;\rightarrow\; \vec{x}_T(\bar{t}) = \vec{x}(-\bar{t}) = \vec{x}(t) \Rightarrow \vec{x}_T(t) = \vec{x}(-t) \tag{2.186}$$
$$\Rightarrow\; \dot{\vec{x}}_T(t) = -\dot{\vec{x}}(-t) \Rightarrow \ddot{\vec{x}}_T(t) = \ddot{\vec{x}}(t) \tag{2.187}$$

Più in generale, in Meccanica Classica c'è invarianza per Time reversal quando la dinamica del sistema è determinata da un potenziale funzione solo delle coordinate e quindi il sistema è descritto da una lagrangiana del tipo

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\,A_{ij}\,\dot{q}_i\,\dot{q}_j - V(q_i) \tag{2.188}$$

che, chiaramente, è invariante in forma sotto la trasformazione (2.182), i.e. sotto la trasformazione $q_i \rightarrow q_i$, $\dot{q}_i \rightarrow -\dot{q}_i$.

ovvero che T sia rappresentato da un operatore antiunitario[56].
Vediamo allora che cosa deve essere richiesto[57] all'hamiltoniana affinchè la simmetria di Time-reversal antiunitaria così introdotta sia conservata.
Ripartiamo per questo dalla legge di evoluzione temporale degli stati che ben conosciamo

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}|\psi, t>= H\,|\psi, t> \tag{2.194}$$

$$\Rightarrow \quad T\,H\,|\psi, t>= T\,i\hbar\,\frac{\partial}{\partial t}\,|\psi, t> \tag{2.195}$$

e poniamo per definizione

$$T\,|\psi, t>\equiv |\psi_T, \bar{t}> \tag{2.196}$$

Per quanto detto, T sarà una simmetria conservata se $|\,\psi_T,\,\bar{t}\,>$ evolve nella variabile temporale $\bar{t}$ con la stessa dinamica (i.e., con la stessa hamiltoniana) secondo la quale lo stato $|\,\psi,\,t>$ evolve nella variabile temporale t.
Quali ne sono le implicazioni?

---

[56]Nel suo lavoro originario del 1932
E.P. Wigner; *Über die Operation der Zeitumhehr in der Quantenmechanick*
Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Physik Kl. 32, 546 (1932)
Wigner richiede che l'hamiltoniana libera H_0 sia $T-$invariante e usa l'equazione di evoluzione temporale nella Schrödinger Picture per dimostrare che T deve essere antiunitario.
Questo viene dedotto dal fatto che l'equazione contiene il fattore $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ al primo ordine.
Ciò però non è corretto, infatti, nel caso, per esempio, della generalizzazione relativistica dell'equazione del moto libero di una particella (scalare), l'equazione di Klein-Gordon è del secondo ordine ...
In realtà l'antiunitarietà dell'operatore T è imposta piuttosto dal rispetto delle regole di commutazione fra posizione ed impulso !
Si osservi che saremmo giunti alla stessa conclusione (e non è un caso ...) circa il carattere antiunitario di T anche se fossimo partiti dal fatto che, per l'analogia classica, deve valere la legge di trasformazione

$$T^{-1}\,\vec{J}\,T \;\;=\;\; -\vec{J} \tag{2.192}$$

la quale può, appunto, essere compatibile con le regole di commutazione fra le sue componenti

$$[J_i, J_j] = i\,\hbar\,\epsilon_{ijk}\,J_k \tag{2.193}$$

se e solo se T è antiunitario.
[57]Si ricorderà che, per una generica simmetria antiunitaria, avevamo dimostrato che, per essere conservata, essa doveva anticommutare con H, da cui, poi, il problema dello spettro di H non limitato verso il basso ...

Essendo, per ipotesi, T antiunitario, risulta

$$T\, i\hbar\, \frac{\partial}{\partial t} = -i\hbar\, \frac{\partial}{\partial t} T = i\hbar\, \frac{\partial}{\partial \bar{t}} T \tag{2.197}$$

e quindi si ha

$$T\, H|\psi, t> = T\, i\hbar\, \frac{\partial}{\partial t}|\psi, t> = i\hbar\, \frac{\partial}{\partial \bar{t}}\, T\, |\psi, t> \tag{2.198}$$

ovvero

$$T\, H\, T^{-1}\, T|\psi, t> \equiv T\, H\, T^{-1}|\psi_T, \bar{t}> = i\hbar\, \frac{\partial}{\partial \bar{t}}\, |\psi_T, \bar{t}> \tag{2.199}$$

ed è evidente allora che $|\psi_T, \bar{t}>$ e $|\psi, t>$ evolveranno secondo la stessa hamiltoniana se e solo se

$$[H, T] = 0 \tag{2.200}$$

Dunque, per quanto riguarda l'operatore di inversione temporale T, possiamo concludere che esso deve essere antiunitario e, affinché possa rappresentare una simmetria conservata del sistema, così come nel caso delle simmetrie unitarie, deve commutare con l'hamiltoniana.

Vediamo adesso di esplicitare, finalmente, l'azione dell'operatore T sui vettori di stato nel caso più semplice della particella senza spin.
Come sappiamo, lo stato fisico $|\,\psi,\, t>$ di una generica particella di massa m senza spin è univocamente determinato dalla sua funzione d'onda

$$\psi(x, t) = <x|\psi, t> \tag{2.201}$$

tale quindi per cui

$$|\psi, t> = \int dx\, \psi(x, t)\, |x> \tag{2.202}$$

Per il fatto che T ed X commutano, poniamo

$$T\, |x> = |x> \tag{2.203}$$

ovvero definiamo T sulla base degli autostati della posizione in modo che sia coincidente con l'operatore di coniugazione complessa K, che abbiamo precedentemente già incontrato, definito sulla stessa base. Ne segue dunque che[58]

$$T\,|\psi, t >= \int dx\, \psi(x,t)^*\, |x> \tag{2.206}$$

e dunque che la funzione d'onda associata allo stato $T\,|\psi, t> \equiv |\psi_T, \bar{t}>$ è semplicemente la funzione $\psi^*(x,t) \equiv \psi^*(x,-\bar{t})$.
Verifichiamo ora che, come occorre aspettarsi in base all'analogia classica, T sarà una simmetria conservata se e solo se la particella interagisce con un potenziale funzione solo delle coordinate ma non del tempo. Iniziamo osservando che se $\psi(x,t)$ è soluzione dell'equazione di evoluzione temporale (equazione di Schrödinger)

$$i\,\hbar\,\frac{\partial \psi}{\partial t} = H\,\psi \tag{2.207}$$

con $H = \frac{-\hbar^2}{2m}\,\nabla^2 + V(x)$, allora, dovendo essere la funzione V reale affinchè l'operatore H possa essere hermitiano, evidentemente risulta, prendendo il complesso coniugato dell'equazione data, che vale anche la relazione

$$-i\,\hbar\,\frac{\partial \psi^*}{\partial t} = H\,\psi^* \tag{2.208}$$

e dunque, essendo $\bar{t} = -t$, se H e dunque V sono indipendenti da t, ecco che si ha

$$i\,\hbar\,\frac{\partial \psi^*}{\partial \bar{t}} = H\,\psi^* \tag{2.209}$$

la quale dimostra quanto enunciato sopra, ovvero che $\psi(x,t)$ e $\psi^*(x,-t)$ evolvono secondo la stessa dinamica.

Una volta ancora, per fissare bene le idee su come agisce la trasformazione di Time-Reversal prima definita, vale la pena, adesso, di vedere che cosa succede nel caso della particella libera (senza spin) di impulso definito $\vec{p}$.

---

[58]Ricordiamo che, partendo dalla definizione dell'operatore di coniugazione complessa definito sulla base delle coordinate, abbiamo già visto, per la (2.77), che risulta

$$K\,|\vec{p}>= |-\vec{p}> \tag{2.204}$$

ovvero, dato che abbiamo identificato T con K, ne risulta che l'operatore di inversione temporale applicato all'autostato dell'impulso per l'autovalore $\vec{p}$ lo trasforma nell'autostato dello stesso operatore per l'autovalore $-\vec{p}$, i.e.

$$T\,|\vec{p}>= |-\vec{p}> \tag{2.205}$$

in perfetto accordo con quanto ci aspetteremmo in base all'analogia classica.

Chiaramente lo stato $|\vec{p},\, t>$, posto $E \equiv p^2/2m$, ha come funzione d'onda la funzione

$$\psi(\vec{x},t) \equiv <\vec{x}|\,\vec{p},\, t>= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\, e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}/\hbar}\, e^{-iE\,t/\hbar} \tag{2.210}$$

Per quanto abbiamo detto, la funzione d'onda associata allo stato $T\,|\,\vec{p},\, t>$ risulta coincidere con la funzione che si ottiene dalla (2.210) prendendone la complessa coniugata, ma *scritta come funzione di* $\bar{t} = -t$, i.e.

$$<\vec{x}|\,T\,|\,\vec{p},\, t>= \psi^*(\vec{x},t) = \psi_T(\vec{x},\bar{t}) \tag{2.211}$$

e dunque

$$\psi_T(\vec{x},\bar{t}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\, e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}/\hbar}\, e^{-iE\,\bar{t}/\hbar} \tag{2.212}$$

da cui, evidentemente, ne concludiamo che lo stato descritto dal vettore $T\,|\,\vec{p},\, t>$ risulta avere impulso opposto a quello dello stato iniziale (come avevamo già osservato) ma *continua ad avere la stessa energia* dello stato di partenza, e non energia opposta (che non significherebbe nulla di sensato ...), come potremmo erroneamente ritenere, basandoci solo sull'effetto della coniugazione complessa.
Questo fatto[59] discende formalmente dall'azione congiunta della coniugazione complessa e dal fatto che, dopo la trasformazione T, la nuova variabile temporale rispetto a cui occorre riferire l'evoluzione dello stato è $\bar{t}$ e non t medesima!

Vediamo adesso che cosa succede quando c'è anche lo spin.
In questo caso la sola coniugazione complessa K in generale non basta più per rappresentare T nello spazio di Hilbert delle funzioni d'onda poichè questo operatore non è sufficiente per garantire l'invarianza delle regole di commutazione per quanto concerne gli operatori di spin. Ricordiamo infatti che $\vec{S}$ dovrà, come il momento orbitale $\vec{L}$, anticommutare con T, ovvero questo operatore dovrà essere tale che

$$T\,S_k = -S_k\,T \tag{2.213}$$

Poniamoci, per semplicità, nel caso di spin 1/2: gli operatori di spin sono proporzionali alle matrici di Pauli σ_1, σ_2 ed σ_3.

[59]La conclusione a cui siamo giunti era del tutto prevedibile sulla base dell'analogia classica. Nell'ambito della MQ, comunque, le cose non cambiano; infatti se T è conservata allora, come sappiamo, essa deve commutare con l'hamiltoniana H del sistema e quindi risulta

$$H\,|E>= E\,|E> \quad \Rightarrow \quad T\,H\,|E>= H\,T\,|E>= E\,T\,|E>$$

la quale mostra appunto che se $|E>$ è autostato di H per l'autovalore E, allora anche $T\,|E>$ lo è, per lo stesso autovalore.

$$S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \sigma_1 \tag{2.214}$$

$$S_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \sigma_2 \tag{2.215}$$

$$S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \sigma_3 \tag{2.216}$$

E' subito evidente, allora, che in effetti la sola coniugazione complessa non può essere più sufficiente, infatti essa, mentre potrebbe bastare per S_y, che è rappresentata da una matrice fatta da immaginari puri, certamente non può bastare per S_x ed S_z, rappresentate entrambe da matrici reali.
Ci dobbiamo dunque attendere adesso che risulti

$$T = U\, K \tag{2.217}$$

dove U sarà una matrice unitaria che agisce nello spazio dello spin in modo da garantire, complessivamente, che T soddisfi la (2.213).
Quali sono allora le condizioni sulla matrice U ?
Evidentemente, per quanto detto, occorre che U, commutando con S_y, inverta il segno di S_x e S_z.
Chiaramente si deve trattare quindi di una rotazione di π intorno all'asse y, i.e. dell'operatore unitario[60]

$$U = e^{i\frac{\pi}{2}\sigma_2} \tag{2.220}$$

$$= I\, cos(\pi/2) + i\sigma_2\, sin(\pi/2) = i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \equiv R \tag{2.221}$$

Dunque, nel caso dello spin 1/2, proprio per ragioni cinematiche, i.e. affinché le regole di commutazione (dello spin) siano preservate, sarà

$$T = R\, K \tag{2.222}$$

dove R è la matrice di rotazione (unitaria) data dalla (2.221).

[60]Ricordiamo infatti che, per definizione

$$e^{i\alpha\sigma_2} \equiv I + i\alpha\sigma_2 + \frac{1}{2!}(i\alpha\sigma_2)^2 + \frac{1}{3!}(i\alpha\sigma_2)^3 + ... \tag{2.218}$$

ma siccome $(\sigma_2)^2 = I$, ne segue che

$$e^{i\alpha\sigma_2} = I\left[1 + \frac{1}{2!}(i\alpha)^2 + ...\right] + \sigma_2\left[i\alpha + \frac{1}{3!}(i\alpha)^3 + ...\right] = I\, cos\alpha + i\,\sigma_2\, sin\alpha \tag{2.219}$$

2.4.1 L'operatore T^2

Consideriamo adesso l'operatore T^2: esso è unitario e, applicato a un vettore di stato qualsiasi, questo potrà cambiarlo solo per un fattore di fase che, essendo T antiunitario, non può essere riassorbito attraverso una sua ridefinizione.
Decidiamo dunque una base ortonormale qualsiasi $|\,e_1>, ..., |\,e_n>, ...$ dello spazio di Hilbert. In questa base avremo

$$T^2\,|\,e_i>= e^{i\eta_i}\,|\,e_i> \tag{2.223}$$

e la coerenza con il principio di sovrapposizione impone, per le considerazioni già svolte per P^2, che il fattore di fase sia lo stesso su tutti i vettori di stato, i.e.

$$e^{i\eta_i} = e^{i\eta} \tag{2.224}$$

D'altronde T è antiunitario, quindi, in generale, in termini dell'operatore di coniugazione complessa K già introdotto, esso può essere scritto nella base data mediante l'ausilio di un opportuno operatore unitario U, nella forma $T = U\,K$. Abbiamo allora

$$T = U\,K \quad \Rightarrow \quad T^2 = U\,K\;U\,K \tag{2.225}$$

ovvero, posto che

$$U\,|\,e_i>= U_{ji}\,|\,e_j> \tag{2.226}$$

risulta

$$\begin{aligned} T^2\,|\,e_i> &= U\,K\,U\,K\,|\,e_i>= U\,K\,U\,|\,e_i>= U\,K\,U_{ji}\,|\,e_j>) = U\,U^*_{ji}\,|\,e_j>= \\ &= U^*_{ji}\,U_{kj}\,|\,e_k>= (U\,U^*)_{ki}\,|\,e_k>= \left[U\,(U^t)^{-1}\right]_{ki}\,|\,e_k> \end{aligned} \tag{2.227}$$

e dunque la matrice unitaria che rappresenta l'operatore T^2 nella base $|e_i>$ sarà data, in generale, da

$$T^2 = U(U^t)^{-1} \tag{2.228}$$

D'altronde, per quanto detto sopra, essa deve essere multipla dell'identità , i.e.

$$T^2 = e^{i\eta}\,I \tag{2.229}$$

e dunque

$$U\,(U^t)^{-1} = e^{i\eta}\,I \quad \Rightarrow \quad U = e^{i\eta}\;U^t \tag{2.230}$$

per cui, prendendo la trasposta di entrambi i membri, otteniamo

$$U^t = e^{i\eta}\,U \tag{2.231}$$

Sostituendo allora nella (2.230), ricaviamo che

$$U = e^{2i\eta}\, U \Rightarrow e^{i\eta} = \pm 1 \qquad (2.232)$$

In conclusione, T^2 deve essere multipla dell'identità e i suoi valori possibili nello spazio di Hilbert degli stati di un sistema fisico assegnato, sono[61] soltanto ± 1.

Per capire meglio il significato fisico di questo risultato, vediamone adesso il legame con lo spin.
Iniziamo considerando un sistema con spin intero S e siano $|S, m>$ gli autostati di S_z per l'autovalore m. Siccome $T\, S_z = -S_z\, T$, ne segue che deve essere[62]

$$T\,|S, m >= e^{i\phi(m)}\,|S, -m > \qquad (2.233)$$

D'altronde esiste lo stato con $m = 0$, per il quale deve essere, evidentemente

$$T\,|S, 0 >= e^{i\phi}\,|S, 0 > \qquad (2.234)$$

Ma siccome T è antiunitario, allora, applicandolo ancora una volta, avremo

$$T\,(T\,|S, 0 >) = e^{-i\phi}\,T\,|S, 0 >= e^{-i\phi}\,e^{i\phi}\,|S, 0 >= |S, 0 > \qquad (2.235)$$

ovvero

$$T^2\,|S, 0 >= |S, 0 > \qquad (2.236)$$

Dunque, per quanto già detto, su <u>tutti</u> gli stati del sistema sovrapponibili con quello considerato <u>deve</u> essere $T^2 = 1$, i.e. i sistemi con spin intero sono tutti caratterizzati dal fatto che, su di essi

$$T^2 = I \qquad (2.237)$$

Veniamo ora ai sistemi con spin semidispari.
Ovviamente, l'argomento usato prima non si può più usare perché non esiste l'autostato con $m = 0$.

[61] Questa conclusione non è valida per operatori unitari come P e C, per i quali, a priori, nulla vieta che $P^2 = e^{i\alpha}$ e $C^2 = e^{i\beta}$. Resta comunque vero che, dato il principio di sovrapposizione lineare, per tutti questi operatori P, C, T il fattore di fase deve essere unico per tutti i vettori dello spazio di Hilbert (a meno di regole di superselezione). Come abbiamo già avuto modo di dire, questo fatto consente, nel caso degli operatori unitari P e C, di riassorbire l'eventuale fattore di fase presente nel loro quadrato, in modo che risulti comunque $P^2 = C^2 = I$.
Per il suo carattere antiunitario, questo non è possibile per T, infatti, anche ponendo $T' = e^{i\phi}\,T$, risulta comunque che che $(T')^2 = T^2$!

[62] Questa conclusione discende anche dal fatto che T commuta con S^2, per cui i sottospazi con S fissato sono T-invarianti.

Iniziamo dunque dal caso già studiato di spin 1/2.
Si è visto che, definita la matrice R attraverso la (2.221), essendo R reale, è

$$T = R\,K \quad \Rightarrow \quad T^2 = R^2 \tag{2.238}$$

ovvero

$$T^2 = R^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \equiv -I \tag{2.239}$$

Questo risultato, come mostreremo adesso, è del tutto generale. Infatti, nel caso di spin semidispari, risulta necessariamente che $T^2 = -I$, per cui, vista la conclusione opposta a cui siamo giunti per gli spin interi, evidentemente l'operatore T^2 discrimina i fermioni dai bosoni !
Veniamo alla dimostrazione generale.
Consideriamo un sistema con momento angolare S qualsiasi (intero o semidispari) e siano $|S, m>$ gli autostati simultanei di S^2 e di S_z.
La (usuale) convenzione[63] di fase fatta è tale per cui ($\hbar = 1$)

$$\begin{aligned} S_z\,|S, m> &= m\,|S, m> && (2.240) \\ S_+\,|S, m> &= \sqrt{(S-m)(S+m+1)}\,|S, m+1> && (2.241) \\ S_-\,|S, m> &= \sqrt{(S+m)(S-m+1)}\,|S, m-1> && (2.242) \end{aligned}$$

dove

$$S_\pm = S_x \pm i\,S_y \quad \Rightarrow \quad S_x = \frac{S_+ + S_-}{2}; \quad S_y = -i\,\frac{S_+ - S_-}{2} \tag{2.243}$$

E' evidente, allora, che, così come nel caso di spin 1/2, gli operatori S_z e S_x sono rappresentati da matrici reali, mentre S_y è rappresentato da una matrice immaginaria pura.
L'operatore T, che anticommuta con $\vec{S}$, non può quindi essere rappresentato solo dall'operatore K, ma occorre, in generale, che questo sia accompagnato anche da una opportuna trasformazione unitaria che anticommuti con S_x e S_z e commuti invece con S_y.
Giungiamo così, in generale, alla conclusione già tratta nel caso dello spin 1/2, ovvero che, in presenza di qualsivoglia spin, la trasformazione U che, insieme a K, descrive la time-reversal T, è una rotazione di π intorno all'asse y, i.e.

$$T = U\,K; \qquad U = e^{i\pi\,S_y} \tag{2.244}$$

D'altronde, essendo S_y immaginario puro, U è reale, per cui

$$T^2 = U\,K\,U\,K = UU\,KK = UU = e^{2i\pi\,S_y} \tag{2.245}$$

[63]Si tratta della convenzione seguita, per esempio, da
L. Landau, E. Lifchitz: *Mécanique Quantique*, ed. MIR 1974, pag 110

quindi, nella base considerata, T^2 è *sempre* una rotazione di 2π intorno all'asse y. Solo che, nel caso degli spin interi, questa rotazione è semplicemente l'identità I, mentre per gli spin semidispari, come sappiamo, essa vale $-I$ (nel gruppo $SU(2)$ è la rotazione di 4π che coincide con l'identità ...).

Veniamo infine a un'ultima conseguenza che si ha per i sistemi caratterizzati dall'avere $T^2 = -1$.
Supponiamo di avere un sistema per cui $T^2 = -I$ e assumiamo che T sia una simmetria conservata. Indichiamo con $|E>$ un generico autostato dell'hamiltoniana. Siccome T è conservata, l'operatore T commuta con l'hamiltoniana e quindi anche il vettore di stato

$$|E_T> \equiv T\,|E> \tag{2.246}$$

è autostato dell'hamiltoniana per lo stesso autovalore E. Si ha

$$\begin{aligned} <E|E_T> \; &\equiv \; <E|T\,E> = <T\,E|E>^* = <TT\,E|T\,E> = \\ &= \; -<E|T\,E> \equiv -<E|E_T> \end{aligned} \tag{2.247}$$

dove le prime due uguaglianze sono ovvie, la terza proviene dall'antiunitarietà di T e l'ultima dal fatto che, per ipotesi, $T^2 = -I$.
La relazione ottenuta mostra chiaramente che gli stati $|E>$ ed $|E_T>$ sono necessariamente ortogonali fra loro e quindi che descrivono stati diversi[64].
Si tratta della cosiddetta *degenerazione di Kramers*[65] ed è presente, per quanto visto, solo nei sistemi con spin semidispari.

[64] Il risultato ottenuto implica che, se $T^2 = -I$ allora l'hamiltoniana non può costituire, da sola, un set completo di osservabili. Il sistema deve possedere anche un qualche grado di libertà che viene cambiato da T, in modo da produrre la degenerazione: solitamente questo grado di libertà è proprio la componente z dello spin.

[65] H.A. Kramers; *Théorie générale de la rotation paramagnétique dan les cristaux*
Proc. Amsterdam Acad. 33, 959 (1930)

2.5 Il momento di dipolo elettrico, la parità e l'inversione temporale

Consideriamo un sistema fisico come, per esempio, quello di una particella elementare, un atomo, una molecola, etc ... che sia posto in un campo elettrico esterno "debole". L'energia del sistema potrà essere scritta come

$$\mathcal{E} = q\,V + \vec{d}\cdot\vec{E} + \frac{1}{2}Q_{ij}\,E_i\,E_j + ... \tag{2.248}$$

dove V ed $\vec{E} \equiv (E_1, E_2, E_3)$ rappresentano il valore del potenziale e del campo elettrico misurati nell'origine del sistema di riferimento nel quale stiamo studiando il sistema fisico assegnato, il quale ha carica q, momento di dipolo elettrico (EDM) $\vec{d}$, momento di quadrupolo Q, ...
Il momento di dipolo $\vec{d}$, come è ben noto dall'elettrodinamica classica, è una misura della polarizzazione della carica nel sistema, *preesistente* all'applicazione del campo elettrico esterno. Risulta infatti

$$\vec{d} = \sum e_i\,\vec{r}_i \tag{2.249}$$

ed esso è indipendente dalla scelta dell'origine del sistema di coordinate se il sistema fisico considerato è globalmente neutro ($q = 0$).
Supponiamo adesso che la parità P sia una simmetria conservata nel sistema fisico considerato, i.e. che

$$[P, H] = 0 \tag{2.250}$$

Gli stati stazionari possono allora essere scelti in modo che siano anche autostati della parità e, se il sistema *non presenta degenerazione accidentale* (cioè nessuna degenerazione oltre quella eventualmente legata al momento angolare[66] orbitale), allora a ogni autovalore dell'hamiltoniana corripondono autostati di parità definita, eventualmente degeneri nell'autovalore di J_z.
Anche lo stato fondamentale avrà dunque parità definita, per cui

$$\begin{aligned} <\psi_0|\vec{d}|\psi_0> &= <\psi_0|P^\dagger\,P\,\vec{d}\,P^\dagger\,P|\psi_0>=<P\,\psi_0|P\,\vec{d}\,P^{-1}|P\,\psi_0>= \\ &= <\psi_0|P\,\vec{d}\,P^{-1}|\psi_0>= -<\psi_o|\vec{d}|\psi_0> \end{aligned} \tag{2.251}$$

[66]Se il sistema è invariante per rotazioni (e siamo in assenza di spin) H, J^2 e J_z costituiscono un set completo di osservabili che commutano. Siccome il momento angolare commuta a sua volta con la parità, se non ci sono degenerazioni accidentali, ciascun multipletto *deve* avere parità definita.

ovvero il suo momento di dipolo[67] dovrà essere nullo[68].
Storicamente questo argomento fu usato per verificare la conservazione della parità nelle interazioni forti, misurando l'eventuale EDM del neutrone[69].

Fu però osservato successivamente da Landau[70] che un eventuale valore non nullo dell'EDM su uno stato stazionario di un sistema elementare *senza degenerazione accidentale* richiedeva anche la violazione di T. Vediamo perché.

Nel caso di un sistema isolato, se esso non presenta degenerazione accidentale, allora una base dello spazio di Hilbert degli stati del sistema potrà essere costituita da autostati simultanei dell'hamiltoniana, di J^2 e di J_z, i.e. potrà essere data

---

[67]Abbiamo qui usato il fatto che ψ_0 ha parità definita e che $P\,\vec{d}\,P^{-1} = P^{-1}\,\vec{d}\,P = -\vec{d}$.
Chiaramente infatti, data la definizione (2.249), assumendo che la carica elettrica sia uno scalare per parità, il momento di dipolo risulta essere un operatore vettoriale e dunque deve anticommutare con P, così come $\vec{r}$.

[68]Si noti che questo argomento vale non solo per lo stato fondamentale ma anche per qualunque altro autostato dell'hamiltoniana, visto che discende unicamente dal fatto che esso ha, necessariamente, parità definita, per l'ipotesi di assenza di degenerazione accidentale.

[69]Nell'articolo citato sotto, gli autori considerano la possibilità che il nucleone possa avere un momento di dipolo elettrico, data lo scarsa conoscenza che si aveva a quel tempo (1950) delle interazioni forti e delle loro proprietà.
E.M. Purcell, N.F. Ramsey: *On the possibility of electric dipole moment for elementary particles and nuclei* Phys. Rev. 78, 807, (1950)
Usando la tecnica della risonanza magnetica applicata a un fascio di neutroni polarizzati e misurando la frequenza di precessione di Larmor in presenza di un campo magnetico ed elettrico parallelo o antiparallelo al primo, data da

$$\hbar\,\omega_{\pm} = 2\mu\,B \pm 2\,d\,E$$

essi raggiunsero la precisione di $2.4 \cdot 10^{-20}\,e \cdot cm$
J.H. Smith, E.M. Purcell, N.F. Ramsey: *Experimental limit to the electric dipole moment of the neutron* Phys. Rev. 108, 120, (1957)
Ad oggi, la precisione raggiunta nella misura del momento di dipolo elettrico con la tecnica NMR applicata all'atomo diamagnetico di ^{199}Hg ($I = 1/2$), iniziata con l'esperimento di
S.K. Lamoreaux, J.P. Jacobs, B.R. Heckel, F.J. Raab, and E.N. Fortson,: *New constraints on Time-Reversal asymmetry from a search for a permanent electric dipole moment of* ^{199}Hg;
Phys. Rev. Lett. 59, 2275 (1987) è oggi di $\approx 2.1 \cdot 10^{-28}\,e \cdot cm$
(cfr. M.V. Romalis, W.C. Griffith, J.P. Jacobs, and E.N. Fortson: *New limit on the Permanent electric dipole moment of* ^{199}Hg Phys. Rev. Lett. 86, 2505 (2001))
ed esistono esperimenti in corso che dovrebbero permettere di raggiungere sensibilità ancora maggiori. Il motivo di questa ricerca, oggi, non ha a che fare con la violazione di P, ma, come vedremo a breve, con il fatto che un EDM non nullo in un sistema elementare implica anche una violazione di T. Sappiamo che lo SM prevede una violazione di CP nel settore adronico, e quindi una violazione di T (assumendo CPT...) che comunque situa il valore dell'EDM del neutrone a non più di $10^{-32}\,e \cdot cm$.
Un valore più elevato sarebbe quindi un segnale importante di fisica oltre il MS.

[70]L. Landau; *On the conservation laws in weak interactions*
Nucl. Phys. 3, 127 (1957)

nella forma[71]

$$| \, E, \, J_E, \, m > \tag{2.252}$$

dove, per l'ipotesi circa la non esistenza di degenerazione accidentale, fissato E, allora J_E risulta univocamente determinato.

In questo caso, se T è una simmetria conservata e dunque commuta con H, allora, poiché $[T, \, J^2] = 0$, lo stato $T \, | \, E, \, J_E, \, m >$ deve appartenere ancora al multipletto corrispondente all'energia E e, per quanto già osservato, è evidente che dovrà essere

$$T \, | \, E, \, J_E, \, m >= e^{i\phi} \, |E, \, J_E, \, -m > \tag{2.253}$$

dove la fase ϕ potrà in generale dipendere da E, J_E ed m.

Veniamo ora al momento di dipolo elettrico. Poiché $\vec{d}$ è un operatore vettoriale, per il teorema[72] di Wigner-Eckart risulta allora che[73]

$$< E, J_E, m|\vec{d}|E, J_E, m' >= C(E) \, < J, m|\vec{J}|J, m' > \tag{2.256}$$

da cui ne segue quindi, per esempio, che dovrà essere

$$< E, J_E, m|d_z|E, J_E, m >= C(E) \, < J_E, m|J_z|J_E, m >= m \, C(E) \tag{2.257}$$

[71]Nel caso di spin semidispari, la degenerazione di Kramer, comunque, non altera il discorso che stiamo facendo perché, siccome T commuta con J^2 come si è già avuto modo di osservare, T non può far uscire dal multipletto.

[72]Ricordiamo che il teorema di Wigner-Eckart stabilisce che, se O_k^L è la componente k di un operatore tensoriale (per rotazioni) di rango L, allora, su stati che siano anche autostati di J^2 e di J_z, risulta in generale che, in termini del coefficiente di Clebsh-Gordan $< J', m'|L, J; k, m >$, si ha

$$< J', m', \alpha'| \, O_k^L \, |J, m, \alpha >=< J', \alpha'||O||J, \alpha >< J', m'|L, J; k, m > \tag{2.254}$$

dove $< J', \alpha'||O||J, \alpha >$ viene detto *elemento di matrice ridotto*.
Per un operatore vettoriale in particolare, questa relazione può essere riscritta, *all'interno dello stesso multipletto*, più semplicemente come

$$< J, m', \alpha| \, \vec{V} \, |J, m, \alpha >= C(\alpha, J) \, < J, m'|\vec{J}|J, m > \tag{2.255}$$

dove $C(\alpha, J)$ è il rapporto fra l'elemento di matrice ridotto definito sopra per l'operatore $\vec{V}$ e quello per $\vec{J}$ (certamente non nullo in multipletti in cui $J \neq 0$: se $J = 0$, comunque, la relazione resta valida in quanto sia $\vec{V}$ che $\vec{J}$ hanno comunque solo elementi di matrice nulli).
Si osservi che la *proporzionalità* fra $\vec{V}$ e $\vec{J}$ esiste solo e soltanto all'interno di uno stesso multipletto (e la costante può dipendere dal multipletto stesso ...).
Infatti, nel caso di multipletti con J differente, mentre può accadere che $\vec{V}$ abbia elementi di matrice e quindi che $< J', \alpha'||V||J, \alpha > \neq 0$, è certo che $\vec{J}$ non può averne perché esso commuta con J^2 e dunque, se $J \neq J'$ o $\alpha \neq \alpha' \Rightarrow < J', \alpha'||J||J, \alpha >= 0$!

[73]Siccome per ipotesi il sistema non possiede degenerazione accidentale, questo implica che E_J determini univocamente J per cui è inutile precisare formalmente la dipendenza della costante C anche da questo autovalore.

Riguardo a T, abbiamo già detto che risulta

$$T\,|E, J_E, m> = e^{i\phi}\,|E, J_E, -m> \tag{2.258}$$

D'altronde, evidentemente è

$$< E, J_E, m|d_z|E, J_E, m> = < E, J_E, m|T^{-1}\,T\;d_z\,T^{-1}\,T\,|E, J_E, m> \tag{2.259}$$

ma, per la (2.189) e la definizione (2.248), risulta

$$T^{-1}\,\vec{d}\,T = \vec{d} \quad \Leftrightarrow \quad T\,\vec{d}\,T^{-1} = \vec{d} \qquad \Rightarrow \quad T\,d_z\,T^{-1} = d_z \tag{2.260}$$

quindi

$$\begin{aligned} < E, J_E, m|d_z|E, J_E, m> &= < E, J_E, m|T^{-1}\;d_z\;T\,|E, J_E, m> \equiv \\ &\equiv < E, J_E, m|T^{-1}\;d_z\;T\,(E, J_E, m)> = \\ &= < T^{-1}\,T\,(E, J_E, m)|T^{-1}\;d_z\;T\,(E, J_E, m)> \end{aligned}$$

ovvero, tenendo conto che T e quindi T^{-1} sono antiunitari e usando la (2.253), abbiamo

$$\begin{aligned} < E, J_E, m|d_z|E, J_E, m> &= < T\,(E, J_E, m)|\;d_z|\,T\,(E, J_E, m)>^* = \\ &= < e^{i\phi}(E, J_E, -m)|\;d_z|\,e^{i\phi}(E, J_E, -m)>^* = \\ &= |e^{i\phi}|^2 < E, J_E, -m|\,d_z\,|E, J_E, -m>^* \end{aligned} \tag{2.261}$$

ma d_z è un operatore hermitiano, quindi

$$< E, J_E, -m|\,d_z\,|E, J_E, -m>^* = < E, J_E, -m|\,d_z\,|E, J_E, -m>$$

e dunque, essendo ovviamente $|e^{i\phi}|^2 = 1$, abbiamo che

$$< E, J_E, m|d_z|E, J_E, m> \;=\; < E, J_E, -m|\,d_z\,|E, J_E, -m>$$

relazione che, evidentemente, non può essere in accordo con la (2.257) senza che $C(E) = 0$, visto che essa fornisce la relazione

$$m\,C(E) = -m\,C(E) \tag{2.262}$$

Questo significa che, dato un qualunque autostato di una hamiltoniana T-invariante relativa a un sistema che non presenta degenerazione accidentale, il valor medio su quello stato del momento di dipolo elettrico (EDM) $\vec{d}$ *deve* essere nullo.

Ma significa questo che nessun sistema può mai avere un EDM non nullo senza che T sia violata ?

La risposta alla domanda sta nel fatto che sia verificata o meno l'ipotesi di assenza di degenerazione accidentale, ovvero nel fatto che il sistema non possieda un'altra direzione intrinseca (polare) indipendente da quella (assiale) definita dal momento angolare.

Se questo accade, la conclusione per cui la presenza di un momento di dipolo elettrico non nullo implica violazione di T non è più vera.

Un caso particolarmente istruttivo è quello dello stesso atomo di idrogeno. La teoria non relativistica (senza spin) prevede infatti, come è ben noto, che tutti gli stati con lo stesso numero quantico principale[74] n siano degeneri fra loro e che, fissato n, esistano multipletti con quel valore di n, corrispondenti a un diverso valore del momento angolare L, da $L = 0$ a $L = n - 1$, quindi fra loro degeneri.

Siamo dunque in presenza di degenerazione accidentale, legata alla particolare forma del potenziale coulombiano. Per questo potenziale accade che l'equazione di Schrödinger, oltre a essere separabile nelle consuete coordinate polari, è separabile anche in coordinate paraboliche[75], e in queste coordinate gli autostati dell'hamiltoniana sono individuati da $|n_1, n_2, m>$ dove n_1 ed n_2 sono interi non negativi legati al numero quantico principale[76] n e all'autovalore m di L_z dalla

[74]Ricordiamo infatti che

$$E_n = -Ry \cdot \frac{1}{n^2} \quad dove \quad Ry \equiv \frac{e^2}{2a_0} = \frac{mc^2}{2}\,\alpha^2 \tag{2.263}$$

essendo l'energia di Rydgerg Ry, nel caso dell'atomo di idrogeno, pari a $13.6\,eV$.

[75]La definizione del sistema di coordinate paraboliche è il seguente:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\xi\eta}\,cos\phi && (2.264)\\ y &= \sqrt{\xi\eta}\,sin\phi && (2.265)\\ z &= \frac{1}{2}(\xi - \eta) && (2.266) \end{aligned}$$

con $\xi, \eta \geq 0$ e ϕ compreso fra 0 e 2π. Risulta

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{1}{2}(\xi + \eta) && (2.267)\\ \xi &= r + z; \qquad \eta = r - z; \qquad \phi = arctg\frac{y}{x} && (2.268) \end{aligned}$$

e le superfici $\xi = cost$ e $\eta = cost$ sono, appunto, paraboloidi di rotazione intorno all'asse z con fuoco nell'origine (la prima con concavità verso il basso e piano direttore di equazione $z = \xi$, la seconda con concavità verso l'alto e piano direttore di equazione $z = -\eta$).

[76]Fissato n, i possibili valori di $|m|$ vanno da 0 a $n - 1$. Fissati n e $|m|$, data la (2.269) n_1 può assumere tutti i valori che vanno da 0 a $n - |m| - 1$, ovvero può assumere $n - |m|$ valori differenti, dopodichè n_2, invece, è univocamente fissato. Tenendo conto che per ogni $m > 0$ esiste un corrispondente $m < 0$, ecco che gli stati $|n_1, n_2, m>$ con n fissato sono

$$2\sum_{m=1}^{n-1}(n - m) + (n - 0)$$

dove l'ultimo addendo corrisponde ad $m = 0$. Risulta quindi

$$2\sum_{m=1}^{n-1}(n - m) + (n - 0) = 2n(n - 1) - n(n - 1) + n = n^2$$

relazione[77]

$$n = n_1 + n_2 + 1 + |m| \tag{2.269}$$

Si dimostra che questi stati possiedono un momento di dipolo elettrico pari a

$$d_z = \frac{3}{2}\, n(n_1 - n_2)\, |e|\, a_0 \tag{2.270}$$

dove abbiamo indicato, al solito, con a_0 il raggio di Bohr.

Questo EDM non nullo, ovviamente, non implica alcuna violazione né di T né di P, visto appunto che siamo in presenza di degenerazione accidentale[78]. Vediamo adesso di capire a che cosa questa sia dovuta.
Essa discende dal fatto che, nel caso del potenziale coulombiano $V(\vec{r}) = -k/r$, esiste un altro vettore conservato, indipendente dal momento angolare orbitale $\vec{L}$, che è il vettore di Runge-Lenz, il quale classicamente[79], è dato da

$$\vec{G} = \frac{1}{m}\, \vec{p} \times \vec{L} - k\, \frac{\vec{r}}{r} \tag{2.290}$$

che rappresenta, come sappiamo, la degenerazione del livello n dell'atomo di idrogeno.

[77]Cfr. L. Landau E. Lifchitz: *Mécanique Quantique* Ed. Mir, 1974, pagg. 154 e successive e pagg. 328 e successive.

[78]Si noti che d_z è comunque nullo sul livello fondamentale che è non degenere e per il quale $n_1 = n_2 = m = 0$.

[79]Come è noto, l'hamiltoniana classica di un punto materiale di massa m in un potenziale kepleriano $V(r) = -k/r$ è data da

$$H = \frac{|\vec{p}|^2}{2m} - \frac{k}{r} \tag{2.271}$$

Come sappiamo, il moto avviene lungo una traiettoria ellittica *chiusa*. Essendo l'hamiltoniana indipendente esplicitamente dal tempo e invariante per rotazioni, esistono i consueti integrali primi del moto, cioè l'energia E e il momento angolare $\vec{L}$, la costanza della direzione del quale implica in particolare che il moto sia piano. Risulta

$$E = -\frac{k}{2a} \tag{2.272}$$

$$L^2 = k\, m\, \frac{b^2}{a} \tag{2.273}$$

dove a e b rappresentano, rispettivamente, il semiasse maggiore e minore dell'ellisse percorsa dal punto materiale.
Oltre a questi integrali primi, caratteristici di qualunque sistema conservativo in cui il potenziale sia sfericamente simmetrico, nel caso kepleriano esiste un altro vettore conservato che è appunto il vettore di Runge-Lenz, definito da

$$\vec{G} = \frac{1}{m}\, \vec{p} \times \vec{L} - k\, \frac{\vec{r}}{r} \tag{2.274}$$

Quantisticamente, siccome $\vec{p}$ ed $\vec{L}$ non commutano fra loro, la definizione che

---

Per rendercene conto, ripartiamo dall'espressione che la seconda legge della dinamica assume in questo caso, i.e.

$$m\,\frac{d\vec{v}}{dt} = -\,\frac{k}{r^3}\,\vec{r} \equiv -\,\frac{k}{r^2}\,\vec{u}_r \tag{2.275}$$

dove abbiamo indicato con $\vec{u}_r$ il versore $\vec{u}_r \equiv \vec{r}/r$. Calcoliamo adesso la quantità

$$\frac{d\vec{v}}{dt} \times \vec{L} = m\,\frac{d\vec{v}}{dt} \times (\vec{r} \times \vec{v}) = -\,\frac{k}{r^2}\,\vec{u}_r \times (\vec{r} \times \vec{v}) \tag{2.276}$$

Ma poiché $\vec{L}$ è una costante del moto, abbiamo che

$$\frac{d\vec{v}}{dt} \times \vec{L} = \frac{d}{dt}(\vec{v} \times \vec{L}) \tag{2.277}$$

e quindi

$$\frac{d}{dt}(\vec{v} \times \vec{L}) = -\,\frac{k}{r^2}\,\vec{u}_r \times (\vec{r} \times \vec{v}) \tag{2.278}$$

D'altronde, dalla sua definizione, essendo $\vec{r} \equiv r\,\vec{u}_r$, ne segue che

$$\vec{v} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\,\vec{u}_r + r\,\frac{d\vec{u}_r}{dt} \tag{2.279}$$

e dunque

$$\vec{r} \times \vec{v} = \vec{r} \times \left(r\frac{d\vec{u}_r}{dt}\right) \tag{2.280}$$

per cui

$$\frac{d}{dt}(\vec{v} \times \vec{L}) = -\frac{k}{r^2}\,\vec{u}_r \times \left[\vec{r} \times \left(r\frac{d\vec{u}_r}{dt}\right)\right] = -k\,\vec{u}_r \times \left(\vec{u}_r \times \frac{d\vec{u}_r}{dt}\right) \tag{2.281}$$

Usando adesso la relazione vettoriale ben nota per cui

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) \tag{2.282}$$

e ricordando che, essendo $\vec{u}$ un versore, necessariamente risulta che $\vec{u} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} = 0$, abbiamo che

$$\vec{u}_r \times \left(\vec{u}_r \times \frac{d\vec{u}_r}{dt}\right) = -\frac{d\vec{u}_r}{dt} \tag{2.283}$$

per cui, sostituendo, ricaviamo che

$$\frac{d}{dt}(\vec{v} \times \vec{L}) = k\frac{d\vec{u}_r}{dt} \tag{2.284}$$

da cui, infine

$$\frac{d}{dt}(\vec{v} \times \vec{L} - k\,\frac{\vec{r}}{r}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{m}\,\vec{p} \times \vec{L} - k\,\frac{\vec{r}}{r}\right) \equiv \frac{d\vec{G}}{dt} = 0 \tag{2.285}$$

rende altresì l'operatore $\vec{G}$ hermitiano, è la seguente

$$G_i = \frac{1}{2m}\,\epsilon_{ijk}(\,p_j\,L_k + L_k\,p_j) - k\,\frac{r_i}{r} = \frac{1}{m}\left(p^2\,r_i - (\vec{p}\cdot\vec{r})p_i\right) - k\,\frac{r_i}{r} \tag{2.291}$$

L'operatore $\vec{G}$ così definito è un operatore vettoriale[80] tale che

$$\vec{G}\cdot\vec{L} = 0 = \vec{L}\cdot\vec{G} \tag{2.292}$$
$$\left[\vec{G}, H\right] = 0 \tag{2.293}$$
$$[L_i, G_j] = i\hbar\,\epsilon_{ijk}\,G_k \tag{2.294}$$
$$[G_i, G_j] = \frac{2H}{m}\,i\,\hbar\,\epsilon_{ijk}\,L_k \tag{2.295}$$
$$\vec{G}\cdot\vec{G} \equiv G^2 = \frac{2}{m}\,H\,(L^2 + \hbar^2) + k^2 \tag{2.296}$$

Ed è proprio l'esistenza di questa osservabile conservata che implica l'esistenza di una degenerazione[81] ulteriore dei livelli energetici, oltre a quella legata a L_z !

---

la quale stabilisce appunto che, nel moto kepleriano, il vettore di Runge-Lenz $\vec{G}$, definito dalla (2.290), è una costante del moto.
Dalla definizione risulta poi che questo vettore è ortogonale ad $\vec{L}$, essendo

$$\vec{G}\cdot\vec{L} = \left(\frac{1}{m}\,\vec{p}\times\vec{L} - k\,\frac{\vec{r}}{r}\right)\cdot\vec{L} = -k\,\frac{\vec{r}}{r}\cdot(\vec{r}\times\vec{p}) = 0 \tag{2.286}$$

Si dimostra inoltre che esso è diretto dal fuoco dell'ellisse verso il perielio, e possiede un modulo pari a

$$G^2 = \frac{2}{m}\,H\;L^2\,+\,k^2 \tag{2.287}$$

ovvero

$$G^2 = \frac{2}{m}\,\left(\frac{-k}{2a}\right)\,\left(mk\frac{b^2}{a}\right) + \,k^2 = -k^2\frac{b^2}{a^2} + k^2 = k^2\,\frac{a^2-b^2}{a^2} = k^2\,e^2 \tag{2.288}$$

dove abbiamo indicato con e l'eccentricità dell'ellisse, definita nel modo consueto come

$$e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} \tag{2.289}$$

[80]Esso anticommuta con la parità e dunque non può avere elementi di matrice diversi da zero fra stati all'interno di uno stesso multipletto (stati aventi la stessa parità ...) mentre può avere elementi di matrice fra multipletti diversi, degeneri in energia ma solo con $|\Delta L| = 1$, essendo l'operatore $\vec{G}$ di rango 1.

[81]Consideriamo lo spazio vettoriale generato dagli autovettori dell'hamiltoniana che corrispondono a un certo numero quantico principale n e quindi ad una certa energia $E < 0$. Come mostrato in
A. Bohm: *Quantum mechanics: foundations and applications*, III edition, 1993, Springer, Ch.VI

riscalando in questo spazio il vettore $\vec{G}$ nel modo seguente (si ricordi che E è negativa ...)

$$\vec{A} \equiv \vec{G}\sqrt{\frac{-m}{2E}} \tag{2.297}$$

otteniamo le seguenti regole di commutazione

$$[L_i, A_j] = i\hbar\,\epsilon_{ijk} A_k \tag{2.298}$$
$$[A_i, A_j] = i\hbar\,\epsilon_{ijk} L_k \tag{2.299}$$

che, unitamente a quella del momento angolare

$$[L_i, L_j] = i\hbar\,\epsilon_{ijk} L_k \tag{2.300}$$

costituiscono l'algebra di Lie di $SO(4)$, il quale è un gruppo di Lie a sei parametri, isomorfo a $SU(2) \otimes SU(2)$, come si dimostra immediatamente ponendo

$$\vec{R} \equiv \frac{\vec{L}+\vec{A}}{2\hbar}; \qquad \vec{S} \equiv \frac{\vec{L}-\vec{A}}{2\hbar}; \tag{2.301}$$

e osservando che le regole di commutazione per questi operatori sono le seguenti

$$[R_i, R_j] = i\,\epsilon_{ijk} R_k \tag{2.302}$$
$$[S_i, S_j] = i\,\epsilon_{ijk} S_k \tag{2.303}$$
$$[R_i, S_j] = 0 \tag{2.304}$$

Chiaramente gli operatori R_i e S_i continuano a commutare con l'hamiltoniana per cui lo spazio dei vettori che corrispondono a un dato autovalore E di H è necessariamente sede di una rappresentazione di quest'algebra. Assumendo, al minimo, che la rappresentazione sia irriducibile, avremo che essa sarà il prodotto diretto di una rappresentazione irriducibile di $SU(2)$ generata da $\vec{R}$ per un'altra rappresentazione irriducibile di $SU(2)$, indipendente dalla precedente, generata da $\vec{S}$. Essa sarà dunque caratterizzata da

$$R^2 = r(r+1) \tag{2.305}$$
$$S^2 = s(s+1) \tag{2.306}$$

e lo spazio avrà dimensione $(2r+1)(2s+1)$.
Consideriamo ora l'invariante

$$Q = R^2 - S^2 = \left(\frac{\vec{L}+\vec{A}}{2\hbar}\right)^2 - \left(\frac{\vec{L}-\vec{A}}{2\hbar}\right)^2 = \frac{\vec{L}\cdot\vec{A}+\vec{A}\cdot\vec{L}}{2\hbar^2} \tag{2.307}$$

Esso, come abbiamo già detto, è identicamente nullo, per cui

$$R^2 = S^2 = s(s+1) \tag{2.308}$$

e dunque il sottospazio dei autovettori di H corrispondenti a un dato numero quantico principale n avrà dimensione proprio $(2s+1)^2$.
Vediamo come questa dimensione è legata allo stesso numero quantico principale.
Abbiamo osservato che

$$G^2 = \frac{2H}{m}(L^2+\hbar^2) + k^2 \tag{2.309}$$

La base $|n_1, n_2, m>$ degli autostati di H che abbiamo ricavato in coordinate paraboliche è infatti definita da vettori che sono autovettori simultanei di H, L_z e A_z, i cui autovalori sono pari a $\frac{n_2-n_1}{n}\frac{|e|^2}{c} \equiv \hbar\,\alpha\,\frac{n_2-n_1}{n}$.

L'osservabile $\vec{d}$, nel supermultipletto definito dal numero quantico principale n, invece che essere parallela a $\vec{L}$, come dovrebbe necessariamente accadere se non ci fosse alcuna degenerazione accidentale (con le conseguenze viste sopra circa $<|\vec{d}|>$, dovute, in buona sostanza al fatto che T e $\vec{L}$ anticommutano mentre T e $\vec{d}$ commutano), risulta in questo caso parallela ad $\vec{A}$ (senza conseguenze su $<|\vec{d}|>$, visto che anche T ed $\vec{A}$ commutano), infatti si dimostra che risulta[82]

$$<|\vec{d}|>= \frac{3}{4}\frac{|e|\,c}{E_n}\;<|\vec{A}|> \tag{2.319}$$

Questo per quanto riguarda T.

Riguardo infine al legame fra EDM e parità, da cui eravamo partiti, siccome A_z non commuta con L^2 bensì ha elementi di matrice fra stati con $|\Delta L| = 1$, gli

---

e dunque

$$A^2 = -(L^2+\hbar^2) - \frac{m}{2E}k^2 \;\Rightarrow\; A^2+L^2 = -\hbar^2 - \frac{m}{2E}k^2 \tag{2.310}$$

Ma, per quanto detto sopra

$$R^2+S^2 = \frac{1}{2\hbar^2}(L^2+A^2) = 2S^2 = 2s(s+1) \;\Rightarrow\; L^2+A^2 = 4s(s+1)\,\hbar^2 \tag{2.311}$$

Sostituendo, si ha dunque

$$\begin{aligned} 4s(s+1)\,\hbar^2 &= -\hbar^2 - \frac{m}{2E}k^2 \;\Rightarrow\; \frac{m}{2E}k^2 = -\hbar^2\,(4s(s+1)+1) = -\hbar^2(2s+1)^2 \\ &\Rightarrow\; E = -\frac{mk^2}{2}\frac{1}{\hbar^2(2s+1)^2} \equiv -\frac{mk^2}{2\hbar^2\,n^2} \end{aligned} \tag{2.312}$$

che individua quindi il numero quantico principale n proprio nella dimensione $(2s+1)$ dei sottospazi sede delle rappresentazioni generate da $\vec{R}$ e $\vec{S}$, entrambe di rango s.

Possiamo così ritrovare per questa strada il fatto che lo spazio degli autovettori corrispondenti a un certo numero quantico principale sia fatto dalla somma diretta degli spazi associati ai multipletti definiti da $L = 0, ..., n-1$. Abbiamo infatti che, dalla definizione, è $\vec{L} = \hbar(\vec{R}+\vec{S})$ e le regole di composizione del momento angolare ci dicono che L, in unità di $\hbar$, deve essere compreso fra $|r-s|$ e $r+s$. D'altronde $r = s$ e quindi $0 \le L \le 2s = n-1$.

Resta così spiegata l'origine della degenerazione accidentale: essa è legata al fatto che, nel caso kepleriano/coulombiano, il gruppo di simmetria dell'hamiltoniana è più grande del solo gruppo delle rotazioni e, su ogni supermultipletto, è appunto $SO(4)$.

[82]Le due osservabili $\vec{d}$ ed $\vec{A}$ non sono proporzionali tra loro poiché la costante che le lega è in effetti funzione dell'energia e quindi la proporzionalità è limitata solo all'interno di un multipletto degenere.

stati[83] $|n_1, n_2, m>$ sono, in generale, combinazioni lineari di stati con lo stesso autovalore di L_z (ovvio !), ma appartenenti a multipletti differenti, corrispondenti allo stesso numero quantico principale n.
Essi non hanno parità definita, per cui, l'esistenza di un EDM non nullo su questi autostati dell'hamiltoniana, non implica, evidentemente, alcuna violazione di P !

Risulta infatti

$$
\begin{aligned}
<|d_z|> &= \frac{3}{2} n(n_1 - n_2)|e|a_0 && (2.313)\\
<|A_z|> &= \frac{n_2 - n_1}{n} \frac{|e|^2}{c} && (2.314)
\end{aligned}
$$

dunque

$$
<|d_z|> = -\frac{3}{2} n^2 \,|e|\, a_0 \; <|A_z|> \frac{c}{|e|^2} \tag{2.315}
$$

ma, come è noto, l'energia del livello $n-$esimo è data da

$$
E_n = -\frac{|e|^2}{2a_0\, n^2} \tag{2.316}
$$

dunque risulta

$$
n^2 = -\frac{|e|^2}{2a_0\, E_n} \tag{2.317}
$$

e quindi si ha infine appunto che

$$
<|d_z|> = \frac{3}{2} \frac{|e|^2}{2a_0\, E_n} |e|\, a_0 \; <|A_z|> \frac{c}{|e|^2} = \frac{3}{4} \frac{|e|\, c}{E_n} <|A_z|> \tag{2.318}
$$

[83]Giusto per completezza, osserviamo che se consideriamo, per esempio, il primo livello eccitato ($n = 2$), allora, nella base $|n_1, n_2, m>$ i quattro stati degeneri, espressi come combinazione degli stati nella base più consueta $|n, L, m>$, sono dati da

$$
\begin{aligned}
|1,0,0> &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|2,0,0> + |2,1,0> \right) && (2.320)\\
|0,1,0> &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|2,0,0> - |2,1,0> \right) && (2.321)\\
|0,0,1> &= |2,1,1> && (2.322)\\
|0,0,-1> &= |2,1,-1> && (2.323)
\end{aligned}
$$

ed è allora del tutto evidente come d_z possa avere valor medio non nullo sugli stati $|1,0,0>$ e $|0,1,0>$ visto che la funzione d'onda di $|2,0,0>$ ha simmetria sferica, mentre quella di $|2,1,0>$ è proporzionale a z.

2.5.1 *Una curiosità: il vettore di Runge-Lenz*

Classicamente, nel caso del moto di un punto materiale di massa m in un campo kepleriano o coulombiano centrato nell'origine del sistema di riferimento, fra le grandezze fisiche conservate c'è, come è noto, il vettore assiale del momento angolare[84]

$$\vec{L} \equiv \vec{r} \times \vec{p} \equiv m\,\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$$

e, oltre a questo, il cosiddetto vettore (polare) di $Runge - Lenz\ \vec{G}$.
Se il potenziale lo scriviamo come

$$V(r) = -\frac{k}{r}$$

allora il vettore di Runge-Lenz è definito come

$$\vec{G} = \frac{1}{m}\,\vec{p} \times \vec{L} - k\,\frac{\vec{r}}{r} \tag{2.324}$$

Esso, come vedremo, individua *la direzione dell'asse fuoco-direttrice, nel verso del perielio.*

Iniziamo provando che $\vec{G}$ è davvero una costante del moto. Ricordiamo a questo proposito che $\vec{L}$ è indipendente dal tempo, per cui

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{m}\,\vec{p} \times \vec{L}\right) = \frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}} \times \vec{L}\right) = \ddot{r} \times \vec{L} \tag{2.325}$$

ma, per la seconda legge della dinamica si ha che

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{1}{m}\,\frac{k}{r^3}(-\vec{r}) \tag{2.326}$$

dunque

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{m}\,\vec{p} \times \vec{L}\right) = -\frac{k}{mr^3}\,\vec{r} \times \vec{L} = -\frac{k}{mr^3}\,\vec{r} \times (\vec{r} \times (m\dot{\vec{r}})) = -\frac{k}{r^3}\,\vec{r} \times (\vec{r} \times \dot{\vec{r}})$$

D'altronde, risultando evidentemente

$$\vec{r} = r\,\vec{n} \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\vec{r}} = \dot{r}\,\vec{n} + r\,\dot{\vec{n}} \tag{2.327}$$

si ha che

$$\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{r} \times (r\,\dot{\vec{n}}) = r\,(\vec{r} \times \dot{\vec{n}}) \tag{2.328}$$

[84]Questo è dovuto al carattere centrale della forza, i.e. al fatto che $\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\,\vec{n}$, dove $\vec{n} \equiv \frac{\vec{r}}{r}$, infatti

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = m\,\frac{d(\vec{r} \times \dot{\vec{r}})}{dt} = m\,\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} + m\,\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = f(r)\,\vec{r} \times \vec{n} = 0$$

per cui ne segue che

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{m}\vec{p}\times\vec{L}\right) = -\frac{k}{r^2}\,\vec{r}\times(\vec{r}\times\dot{\vec{n}}) = -\frac{k}{r^2}\,\left[\vec{r}\,(\vec{r}\cdot\dot{\vec{n}}) - \dot{\vec{n}}\,r^2\right] \tag{2.329}$$

D'altronde, essendo

$$n^2 = \vec{n}\cdot\vec{n} = 1 \quad\Rightarrow\quad \dot{\vec{n}}\cdot\vec{n} = 0 \quad\Rightarrow\quad \dot{\vec{n}}\cdot\vec{r} = 0$$

e quindi, finalmente, si ha

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{m}\vec{p}\times\vec{L}\right) = k\,\dot{\vec{n}} \quad\Rightarrow\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{m}\vec{p}\times\vec{L} - k\,\vec{n}\right) = 0 \tag{2.330}$$

che prova appunto il fatto che il vettore di Runge-Lenz è una costante del moto.

Vediamo ora come da questa legge di conservazione si possa dedurre che la traiettoria percorsa dal punto materiale deve essere una conica.

Moltiplichiamo scalarmente il vettore $\vec{G}$ per la coordinata radiale $\vec{r}$: si ha

$$\vec{G}\cdot\vec{r} = \frac{1}{m}(\vec{p}\times\vec{L})\cdot\vec{r} - k\,r \quad\Rightarrow\quad G\,r\,cos\theta = (\dot{\vec{r}}\times\vec{L})\cdot\vec{r} - k\,r \tag{2.331}$$

dove l'angolo θ è l'angolo fra $\vec{r}$ e $\vec{G}$. Ricordiamo adesso l'identità vettoriale

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = (\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}$$

per cui risulta che

$$(\dot{\vec{r}}\times\vec{L})\cdot\vec{r} = (\vec{r}\times\dot{\vec{r}})\cdot\vec{L} = \frac{1}{m}\,|\vec{L}|^2 \equiv \frac{l^2}{m}$$

dove abbiamo indicato con l il modulo (costante) del momento angolare della particella. Dunque abbiamo

$$\begin{aligned} G\,r\,cos\theta = \frac{l^2}{m} - k\,r \;\;\Rightarrow\;\; r\,(G\,cos\theta + k) = \frac{l^2}{m} \\ \Rightarrow\quad \frac{1}{r} = \frac{km}{l^2} + \frac{G\,m}{l^2}\,cos\theta \end{aligned} \tag{2.332}$$

che è appunto l'equazione di una conica di eccentricità

$$\epsilon = \frac{\frac{G\,m}{l^2}}{\frac{km}{l^2}} = \frac{A}{k} \tag{2.333}$$

Nel caso di potenziale attrattivo ($k > 0$) e nel caso particolare di un sistema legato, come è noto la traiettoria è un'ellisse.

Vediamo, in questo caso, come è fatto il vettore $\vec{G}$.

Senza perdita di generalità, visto che il moto è piano data la costanza di $\vec{L}$ a cui il vettore posizione è ovviamente sempre ortogonale, possiamo supporre che esso avvenga nel piano (x, y). Poniamo allora

$$\vec{r} = r\,(cos\phi,\ sin\phi,\ 0) \tag{2.334}$$

e dunque

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\,(cos\phi,\ sin\phi,\ 0) + r\,\dot{\phi}\,(-sin\phi,\ cos\phi,\ 0) \tag{2.335}$$

da cui

$$\vec{L} = m\,\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = m\,r^2\,\dot{\phi}\,(0,\ 0,\ 1) \equiv (0,\ 0,\ l) \tag{2.336}$$

Veniamo ora al calcolo esplicito di $\vec{G}$: dalla definizione si ha

$$\vec{G} = \frac{1}{m}\,\vec{p} \times (\vec{r} \times \vec{p}) - k\,\vec{n} = \frac{p^2}{m}\,\vec{r} - \frac{1}{m}\,\vec{p}\,(\vec{r} \cdot \vec{p}) - k\,\vec{n} \tag{2.337}$$

ma per determinare il vettore, essendo costante durante il moto, basta calcolarlo in un punto qualsiasi dell'orbita. Osserviamo allora che, essendo

$$\vec{r} \cdot \vec{p} = m\,\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = m\,r\,\dot{r}$$

il secondo addendo nell'espressione (2.337) è nullo sia al perielio che all'afelio, dove $\dot{r} = 0$. In ciascuno di questi due punti, quindi, l'espressione del vettore di Runge-Lenz si semplifica in

$$\vec{G} = \frac{p^2}{m}\,\vec{r} - \frac{1}{m}\,\vec{p}\,(\vec{r} \cdot \vec{p}) - k\,\vec{n} \ \Rightarrow\ \vec{G} = \frac{p^2}{m}\,\vec{r} - k\,\vec{n} = \vec{n}\left(r\,\frac{p^2}{m} - k\right) \tag{2.338}$$

D'altronde l'energia totale E della particella è anch'essa una costante del moto e vale

$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{k}{r}$$

per cui ne segue che

$$2r\,E = r\,\frac{p^2}{m} - 2\,k \tag{2.339}$$

da cui, sempre unicamente al perielio e all'afelio, risulta

$$\vec{G} = (2rE + k)\,\vec{n} \tag{2.340}$$

Ma in un moto kepleriano l'energia totale E risulta

$$E = -\frac{k}{2a}$$

dove a è la lunghezza del semiasse maggiore dell'ellisse per cui, detti α e β ($\alpha > \beta$), rispettivamente, la distanza dell'afelio e del perielio dall'origine (fuoco dell'ellisse), risulta[85]

$$E = -\frac{k}{2a} = -\frac{k}{\alpha + \beta} \tag{2.341}$$

per cui risulta

$$afelio : \vec{G} = \vec{n}_a \left(2\alpha \frac{-k}{\alpha + \beta} + k \right) = \frac{k(\beta - \alpha)}{\alpha + \beta} \; \vec{n}_a = |E|(\beta - \alpha)\vec{n}_a \tag{2.342}$$

$$perielio : \vec{G} = \vec{n}_b \left(2\beta \frac{-k}{\alpha + \beta} + k \right) = \frac{k(\alpha - \beta)}{\alpha + \beta} \; \vec{n}_b = |E|(\alpha - \beta)\vec{n}_b \tag{2.343}$$

ed evidentemente i due risultati coincidono visto che $\vec{n}_a = -\vec{n}_b$.

Concludendo, il vettore di Runge-Lenz classico (vedi fig.7) ha per modulo il prodotto del valore assoluto dell'energia totale per la differenza afelio-perielio, ha per direzione quella dell'asse dell'ellisse e verso quello che va dal fuoco al perielio.

L'interesse per questo vettore sta nel fatto che, come sappiamo, esso è, per esempio, all'origine della degenerazione accidentale dei livelli nell'atomo di idrogeno (trattazione non relativistica, senza spin), per la quale l'energia dipende solo dal numero quantico principale n e sono degeneri tutti i livelli con $J = 0, ...n - 1$.

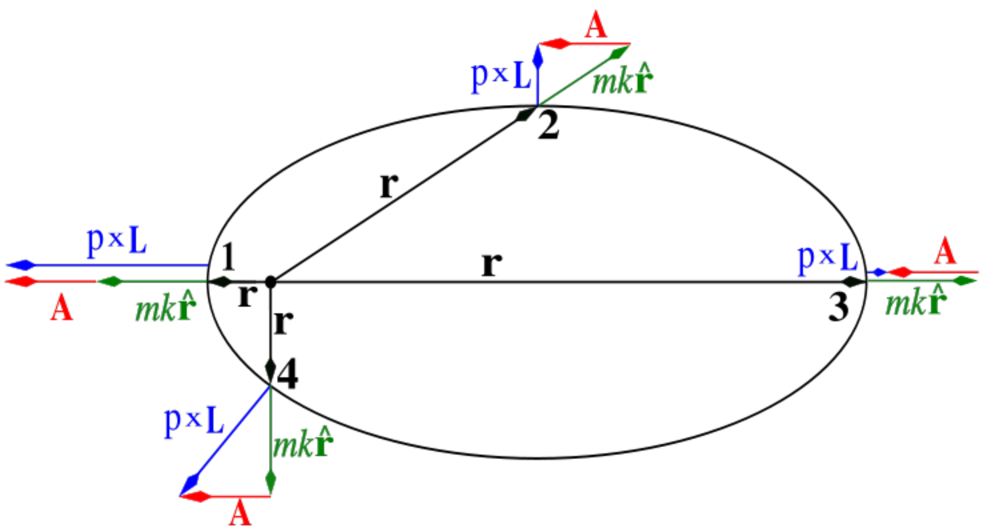


Figure 7: *Vettore di Runge Lenz*

[85]Si ricordi che il semiasse maggiore a di una ellisse coincide con la semisomma della distanze del fuoco dall'afelio (α) e dal perielio (β): $a = (\alpha + \beta)/2$, mentre la distanza f dei fuochi dal centro dell'ellisse vale $f = (\alpha - \beta)/2 = \sqrt{a^2 - b^2}$, dove b sta per la lunghezza del semiasse minore. Dalle (2.342) - (2.343) segue quindi che $G^2 = k^2 \, \frac{a^2 - b^2}{a^2}$.

2.6 Il decadimento del π^0

Proviamo adesso ad applicare quanto detto fino ad ora circa le simmetrie discrete al caso del decadimento del pione π^0.
Esso decade per via elettromagnetica (vita media $\tau = (8.4 \pm 0.5) \times 10^{-17} s$) quasi unicamente in due fotoni ($B.R. = 98.8\%$)

$$\pi^0 \to \gamma\,\gamma \tag{2.344}$$

attraverso l'annichilazione della coppia di quark/antiquark che lo compongono.
Siccome il processo è, appunto, elettromagnetico, si devono conservare separatamente C, P e T. Vediamo con quali conseguenze.
Iniziamo dalla conservazione di C.
Il fotone è autostato della coniugazione di carica per l'autovalore -1, dovendo il campo A_μ, che lo descrive, cambiare di segno sotto C in modo che il termine di interazione nella lagrangiana $J^\mu A_\mu$ resti invariante in forma sotto la stessa trasformazione di simmetria. Ne segue allora che il pione sarà anch'esso autostato della coniugazione di carica ma corrispondente all'autovalore $+1$, dovendo appunto essere

$$e^{i\eta_C(\pi^0)} = (-1)^2 = +1, \qquad \Rightarrow \qquad C|\pi^0 >= +|\pi^0 > \tag{2.345}$$

Vediamo ora quali sono le conseguenze sullo stato dei due fotoni in relazione alla conservazione della parità[86] P.

[86]La parità intrinseca del π^0 viene determinata, come vedremo tra breve, proprio attraverso lo studio della correlazione fra gli stati di polarizzazione lineare dei due fotoni emessi; ma questa strada però, come è ovvio, è percorribile solo per il pione neutro...
Quanto, invece al pione carico, per esempio, al pione π^-, la sua parità intrinseca è stata determinata attraverso lo studio della reazione di cattura nucleare che segue la cattura elettromagnetica del π^- da parte del deutone, i.e. la reazione

$$\pi^- \;+\; d \;\to\; n \;+\; n \tag{2.346}$$

Il deutone, come è noto, è in uno stato $J^P = 1^+$. Ricordiamo a questo proposito che, siccome la forza forte conserva la parità, ci attendiamo che lo stato fondamentale di deutone abbia parità definita: si trova infatti che questo è sostanzialmente uno stato $L = 0$, con una piccola contaminazione da $L = 2$ (infatti possiede un piccolo momento di quadrupolo elettrico, incompatibile con la simmetria sferica di $L = 0$), dunque uno stato pari. Quanto allo spin, esso deve essere $S = 1$ per ragioni di statistica: i due nucleoni devono essere infatti in uno stato globalmente dispari per scambio e, visto che l'isospin del deutone è nullo e dunque lo stato di isospin dei due nucleoni che lo formano è dispari mentre la parte orbitale è pari, ne segue che lo stato di spin deve essere anch'esso pari e dunque può essere solo $S = 1$.
Quanto al mesone π^-, si assume di sapere che esso abbia spin nullo (la dimostrazione sperimentale di questo fatto sarà data in seguito e si basa sul confronto delle sezione d'urto della reazione $\pi^+ \;+\; d \;\to\; p \;+\; p$ con quella della sua inversa).
Ne segue che (cfr. K. Brueckner et al. in Phys. Rev. 81, 575 (1951)), siccome la cattura (2.346) avviene in onda S (la forza forte è una forza a corto range, perché possa agire è necessario dunque che la funzione d'onda del pione si sovrapponga apprezzabilmente a quella del

Assumiamo, per semplicità, che il decadimento avvenga a riposo.
La conservazione del quadriimpulso richiede che entrambi i fotoni abbiano la stessa energia (pari a metà della massa del π^0...) e impulsi spaziali esattamente opposti: chiameremo asse z il loro asse di propagazione, di versore $\vec{k}$.
Per avere informazioni sulla parità intrinseca del π^0, occorre studiare lo stato di polarizzazione dei due fotoni e, più precisamente, la loro correlazione.
A questo riguardo ricordiamo che una base per gli stati di polarizzazione di un fotone che viaggia nel verso positivo $\vec{k}$ dell'asse z potrà essere costituita dai vettori che descrivono le due polarizzazioni lineari, i.e. da

$$\vec{\epsilon}_z(1) = (1,0,0), \qquad \vec{\epsilon}_z(2) = (0,1,0) \tag{2.348}$$

oppure dalla base fatta dalle due polarizzazioni circolari

$$\vec{\epsilon}_z(+) \quad = \quad \frac{-1}{\sqrt{2}}\,(\vec{\epsilon}_z(1) + i\,\vec{\epsilon}_z(2)) = \frac{-1}{\sqrt{2}}\,(1,i,0) \tag{2.349}$$

---

deutone e questo, come è noto dalla teoria dell'atomo di idrogeno, avviene sostanzialmente solo per stati aventi $L = 0$) evidentemente lo stato di partenza deve essere tale che $J^P = 1^x$ dove x è appunto la parità intrinseca, ignota, del pione. Lo stato finale dei due neutroni, essendo la reazione mediata dalla forza forte che conserva la Parità, ha la stessa parità dello stato iniziale e dunque (visto che il momento angolare deve anche lui conservarsi !) è anch'esso tale per cui $J^P = 1^x$. Trattandosi di un sistema non relativistico, spin e momento orbitale sono separabili: siccome i neutroni hanno spin 1/2, lo stato di spin della coppia può essere solo $S = 0$ oppure $S = 1$ per cui, per le ben note regole di composizione dei momenti angolari, dovendo lo stato avere $J = 1$, può solo essere

$$J = 1 \quad \Rightarrow \qquad \begin{array}{l} L = 0,\ S = 1 \\ L = 1,\ S = 0 \\ L = 1,\ S = 1 \\ L = 2,\ S = 1 \end{array}$$

D'altronde lo stato dei due neutroni deve essere antisimmetrico per scambio, ovvero, visto che, per scambio, la funzione d'onda orbitale va come $(-1)^L$ e quella di spin come $(-1)^{S+1}$, deve risultare

$$(-1)^L \cdot (-1)^{S+1} = -1 \tag{2.347}$$

la quale implica che $L + S$ debba essere pari e l'unico caso che realizza questa condizione ed è compatibile con $J = 1$ è $L = 1,\ S = 1$. Ma allora, assunto che la parità si conservi nel processo (interazione forte), poiché la parità dello stato dei due neutroni è $(-1)^L = -1$, questa deve essere anche la parità dello stato iniziale e dunque, per quanto detto sopra, la parità intrinseca del pione deve essere $P_\pi = -1$, cioè il pione negativo deve essere, appunto, una particella *pseudoscalare*.
Per il pione positivo, ovviamente non si può fare lo stesso ragionamento perché, essendo positivo, non subisce la cattura elettromagnetica da parte del nucleo e quella nucleare che ne consegue; però, siccome esso è $C-$coniugato con il pione negativo e le simmetrie P e C commutano, dobbiamo aspettarci che valga anche per lui la stessa conclusione, i.e. che sia pseudoscalare.

$$\vec{\epsilon}_z(-) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{\epsilon}_z(1) - i\,\vec{\epsilon}_z(2)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(1,-i,0) \tag{2.350}$$

corrispondenti, rispettivamente, alle elicità $\lambda = +1$ e $\lambda = -1$.
Riguardo alle polarizzazioni lineari, la convenzione prevede che $\vec{\epsilon}_z(1)$, $\vec{\epsilon}_z(2)$ e $\vec{k}$ formino una terna destrorsa. Se poi il fotone viaggia in una direzione $\vec{k}'$ diversa da quella positiva dell'asse z, la nuova terna fatta dalle polarizzazioni lineari e dal versore di propagazione si ottiene dalla terna $\vec{\epsilon}_z(1)$, $\vec{\epsilon}_z(2)$, $\vec{k}$ attraverso una rotazione[87] avente asse nel piano $(\vec{k},\vec{k}')$. Nel caso in cui $\vec{k}' = -\vec{k}$, ovvero per un fotone che viaggia nella direzione opposta a quella positiva dell'asse z, si può vedere che, per continuità con quanto sopra detto, abbiamo

$$\vec{\epsilon}_{-z}(1) = -\vec{\epsilon}_z(1); \quad \vec{\epsilon}_{-z}(2) = \vec{\epsilon}_z(2) \quad \Rightarrow \quad \vec{\epsilon}_{-z}(\pm) = \vec{\epsilon}_z(\mp) \tag{2.351}$$

Torniamo adesso al decadimento del π^0. Sappiamo che esso ha spin nullo, dunque le elicità dei due fotoni dovranno essere le stesse (conservazione del momento angolare) e quindi lo stato dei due fotoni (onda s) potrà essere rappresentato come

$$|k,+>|-k,+> \quad oppure \quad |k,->|-k,-> \tag{2.352}$$

dove $\pm k$ indica la componente dell'impulso del fotone lungo il verso positivo dell'asse z. Occorre però tenere ora conto del fatto che i fotoni sono bosoni identici e quindi che lo stato deve essere simmetrico di scambio, per cui, in realtà, gli stati possibili sono piuttosto

$$|A> \;\equiv\; \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|k,+>|-k,+> + |-k,+>|k,+>\right) \tag{2.353}$$

$$|B> \;\equiv\; \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|k,->|-k,-> + |-k,->|k,->\right) \tag{2.354}$$

dove il primo ket descrive lo stato del fotone che chiamiamo "1" mentre il secondo vettore quello del fotone che chiamiamo "2", fra i quali si opera lo scambio.
D'altronde, per parità, risulta[88]

$$P\,|\vec{k},\pm>= -|-\vec{k},\mp> \tag{2.355}$$

[87] Se $\vec{k} = (0,0,1)$ e $\vec{k}' = (sin\theta\, cos\phi, sin\theta\, sin\phi, cos\theta)$, allora la rotazione in questione è definita da

$$R = e^{-i\phi L_3}\, e^{-i\theta L_2}\, e^{i\phi L_3}$$

e si tratta di una rotazione di $-\theta$ intorno all'asse $e^{-i\phi L_3}\,\vec{n}_0$, dove $\vec{n}_0 = (0,1,0)$.

[88] Anche se è irrilevante ai fini del risultato che ci accingiamo a valutare perché i fotoni di decadimento sono due, la (2.355) tiene conto che la parità intrinseca del fotone è -1, perché il vettore di polarizzazione ϵ^μ può essere scelto in modo che abbia solo le componenti spaziali (gauge di Coulomb) e questo, unito al fatto che, per parità deve accadere che $A^\mu(x) \to A_\mu(Px)$, richiede che il fotone sia P-dispari.

evidentemente né $|A>$ né $|B>$ sono autostati della parità, bensì[89]

$$P\,|A>=|B>;\quad P\,|B>=|A> \tag{2.356}$$

D'altronde, per la conservazione di P nelle interazioni elettromagnetiche, se il π^0 ha parità intrinseca negativa come i $\pi^{\pm}$, cosa che adesso assumeremo

$$P\,|\pi^0>=-|\pi^0> \tag{2.357}$$

lo stato dei due fotoni deve essere autovettore di P per l'autovalore -1, e quindi deve essere descritto dalla combinazione lineare seguente

$$\begin{aligned}|2\,\gamma\,dal\,\pi^0> \;&\equiv\; |2\gamma, P=-1> \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\,[|A>-|B>]=\\ &=\; \frac{1}{2}\,[(|k,+>|-k,+>+|-k,+>|k,+>)-\\ &-\; (|k,->|-k,->-|-k,->|k,->)]\end{aligned} \tag{2.358}$$

Come possiamo distinguere questo stato, per esempio, da quello corrispondente allo stato di parità $+1$ (che imporrebbe o la non conservazione della parità nel decadimento o una parità intrinseca positiva del π^0) ?
Per esempio, se guardiamo il fotone che viaggia nel verso positivo dell'asse z ed osserviamo che ha una certa elicità definita λ, è immediato che ne concludiamo comunque che anche l'altro fotone ha la stessa elicità e quindi questo non ci fa apprendere nulla circa la parità dello stato.

Proviamo a vedere che succede se osserviamo invece lo stato di polarizzazione lineare del fotone che si muove nel verso positivo dell'asse z lungo, per esempio, l'asse x. Poiché per la (3.230) e la (3.231) evidentemente è

$$\vec{\epsilon}_x(\vec{k}) \equiv \vec{\epsilon}(\vec{k},1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{\epsilon}(\vec{k},-)-\vec{\epsilon}(\vec{k},+)\right) \tag{2.359}$$

ecco che, se partiamo dallo stato $|2\gamma, P=-1>$ di cui sopra, allora se il fotone che si muove nel verso positivo dell'asse z viene osservato trovarsi nello stato di polarizzazione lungo l'asse x, ne segue che lo stato del fotone che si muove nel verso negativo dell'asse z, vista la (2.358) e la (2.359) deve essere il seguente

$$\begin{aligned}|\gamma(-k)> \;&=\; \frac{1}{2\sqrt{2}}\,(-|-k,->-|-k,->-|-k,+>-|-k,+>)\\ &=\; -\frac{1}{\sqrt{2}}(|-k,->+|-k,+>)\end{aligned} \tag{2.360}$$

[89]Si noti, di nuovo, che la parità intrinseca del fotone, ancorchè negativa, non ha rilevanza in quanto stiamo dicendo, essendo coinvolti un numero pari di fotoni ...

e dunque il suo stato di polarizzazione, sempre per le definizioni (3.230) e la (3.231), risulta essere il seguente

$$\vec{\epsilon}(\gamma(-k)) = -\frac{1}{2}\left(-2i\,\vec{\epsilon}(-\vec{k},2)\right) = i\vec{\epsilon}_y(-k) \tag{2.361}$$

ovvero il fotone che viaggia lungo il verso negativo dell'asse z deve risultare polarizzato lungo y: in altri termini, la polarizzazione lineare dei due fotoni deve risultare ortogonale.

Questo risultato è una diretta conseguenza della parità dello stato di partenza: se assumiamo infatti che questa sia $+1$, ovvero che

$$\begin{aligned} |2\,\gamma > \; &= \; \frac{1}{\sqrt{2}}(|A> + |B>) \equiv |2\gamma, P=+1>= \\ &= \; \frac{1}{2}(|k,+>|-k,+> + |-k,+>|k,+> + \\ &+ \; |k,->|-k,-> + |-k,->|k,->) \end{aligned} \tag{2.362}$$

allora, se è stata osservata la polarizzazione del fotone che viaggia nel verso positivo dell'asse z allineata lungo l'asse x, lo stato del fotone che si propaga in verso opposto deve necessariamente essere il seguente

$$\begin{aligned} |\gamma(-k)> \; &= \; \frac{1}{2\sqrt{2}}(|-k,-> + |-k,-> - |-k,+> - |-k,+>) \\ &= \; \frac{1}{\sqrt{2}}(|-k,-> - |-k,+>) \end{aligned} \tag{2.363}$$

e il suo stato di polarizzazione risulta dunque il seguente

$$= \frac{1}{2}\left(2\,\vec{\epsilon}(-\vec{k},1)\right) = \vec{\epsilon}_x(-k) \tag{2.364}$$

ovvero le polarizzazioni lineari dei due fotoni risulteranno, in questo caso, parallele.

Sperimentalmente si verifica che le polarizzazioni sono ortogonali[90], coerentemente con il fatto che P è conservata e che il π^0 è pseudoscalare.

[90]La polarizzazione di un fotone di alta energia viene inferita attraverso l'osservazione della correlazione fra il piano definito dagli impulsi della coppia e^+e^- e quello individuato dalla direzione della polarizzazione lineare del gamma e da quella di propagazione dello stesso, come mostrato da N.M. Kroll e W. Wada in Phys. Rev. 98, 1355 (1955).

2.7 Il decadimento del positronio

Come ulteriore applicazione di quanto abbiamo visto fin'ora, studiamo i modi di decadimento (annichilazione) del positronio. Questo è un sistema legato costituito da un elettrone e un positrone. Esso è del tutto analogo a un atomo di idrogeno, a parte la massa ridotta $\mu = \frac{m_e}{2}$ invece di $\mu = \frac{m_e\, m_p}{m_e + m_p} \approx m_e$ e quanto ad essa collegato (Rydberg $\propto \mu$, raggio di Bohr $a \propto \mu^{-1}$ ...).
Inoltre, siccome elettrone e positrone non hanno fattore di forma e hanno momenti magnetici uguali in modulo e opposti in segno, a differenza di quanto accade nel caso dell'atomo di idrogeno, nel positronio non c'è effetto Zeeman[91].
Ma la differenza fondamentale naturalmente è che, essendo esso costituito da un sistema particella/antiparticella, non è stabile, bensì si annichila in fotoni.

Lo stato fondamentale del positronio, analogamente a quanto accade per l'atomo di idrogeno, è lo stato $n = 1, L = 0$ e il sistema dei due fermioni può trovarsi in uno stato di tripletto di spin ($S = 1$) oppure in uno stato di singoletto ($S = 0$). Nel primo caso si parla di *ortopositronio (Ops)*, mentre nel secondo caso, si parla di *parapositronio (Pps)*. Questa distinzione è molto importante in quanto *Ops* e *Pps* hanno vite medie e modi di annichilazione del tutto diversi. Vediamo perché.
Occupiamoci per prima cosa della simmetria di Coniugazione di Carica C la quale, poiché il processo di annichilazione avviene per via puramente elettromagnetica, sappiamo essere una simmetria conservata dalla dinamica.

Lo stato di positronio sarà descrivibile in termini di operatori di creazione $a^\dagger$ e $b^\dagger$ sia dell'elettrone che del positrone, i.e. avremo

$$|ps>= a_1^\dagger\, b_2^\dagger\, |\Omega> \tag{2.365}$$

dove, per semplicità, non abbiamo indicato né le variabili orbitali né quelle di spin, ma le abbiamo indicate globalmente con l'indice "1" per l'elettrone e con l'indice "2" per il positrone.

[91] La ragione dell'assenza dell'effetto Zeeman al primo ordine si può capire facilmente dai seguenti due argomenti. Dato che le masse delle due particelle sono uguali ed esse hanno cariche opposte, il moto orbitale non può mai determinare nessuna corrente, per cui il fattore di Landé g_L è necessariamente nullo. D'altronde, nemmeno gli stati di spin possono contribuire, visto che

- se il sistema si trova in stato di singoletto, non esiste nessuna direzione definita dello spin e quindi il valore di aspettazione sullo stato di singoletto del momento magnetico non può che essere nullo;
- se il sistema è in stato di tripletto, allora gli spin delle due particelle sono allineati ma poiché i loro momenti magnetici sono uguali ed opposti, si compensano uno con l'altro.

Per questi motivi, quindi, semplicemente l'effetto Zeeman *non* può manifestarsi nel positronio, a meno di usare campi magnetici estremamente intensi, tali da provocare lo splitting dei livelli al secondo ordine in B.

Sotto l'operatore di coniugazione di carica[92], si ha (ricordiamo che il vuoto è C-invariante)

$$\begin{aligned} C\,|ps> &= C\,a_1^\dagger\;b_2^\dagger\,|\Omega>= C\,a_1^\dagger\,C^{-1}\,C\,b_2^\dagger\,C^{-1}C\,|\Omega>= b_1^\dagger\;a_2^\dagger\,|\Omega>= \\ &= -a_2^\dagger\;b_1^\dagger\,|\Omega> \end{aligned} \tag{2.366}$$

ovvero, a parte il segno meno che viene dalle regole di anticommutazione degli operatori del campo spinoriale, l'operatore di coniugazione di carica si comporta esattamente come l'operatore di scambio fra le due particelle, e dunque uno stato con L ed S definiti sarà autostato di C per l'autovalore

$$C = -(-1)^L\,(-1)^{S+1} \equiv (-1)^{L+S} \tag{2.367}$$

Il parapositronio, allora, il quale ha $L = 0$ ed $S = 0$, è *pari* sotto C, i.e.

$$C\,|Pps>= +\,|Pps> \tag{2.368}$$

e questo implica, per quanto visto circa l'effetto della coniugazione di carica sul vettore di stato di singolo fotone, che

$$(e^+\;e^-)_{Pps} \to 2\gamma,\;\; 4\gamma, ... \tag{2.369}$$

Si dimostra che la probabilità di decadimento dello stato di Pps per unità di tempo (all'ordine più basso, ovvero trascurando i decadimenti con un numero pari di fotoni maggiore di due) è data da

$$\lambda_{2\gamma} = \sigma_0\;c\,|\psi(0)|^2\;\; s^{-1} \tag{2.370}$$

dove σ_0 è la sezione d'urto di annichilazione elettrone-positrone in due fotoni a momento trasferito nullo, pari a

$$\begin{aligned} \sigma_{2\gamma} &= \sigma_0 = 4\pi\,r_0^2 = 4\pi\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 = 4\pi\left(\frac{e^2}{\hbar c}\,\frac{\hbar c}{mc^2}\right)^2 = \\ &= 4\pi\alpha^2\,\not{\lambda}^2 \end{aligned} \tag{2.371}$$

mentre $|\psi(0)|^2$ fornisce la densità di probabilità di sovrapposizione delle funzioni d'onda dell'elettrone e del positrone che, sullo stato fondamentale $n = 1, L = 0$, vale[93]

$$|\psi(0)|^2 = \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{a^3} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\mu e^2}{\hbar^2}\right)^3 = \frac{1}{8\pi}\left(\frac{mc}{\hbar}\,\frac{e^2}{\hbar c}\right)^3 = \frac{1}{8\pi}\,\alpha^3\,\not{\lambda}^{-3} \tag{2.372}$$

[92] Un eventuale fattore di fase $e^{i\eta_C}$ non è rilevante, trattandosi di un sistema particella/antiparticella, per il quale ci sarebbe comunque compensazione fra quello che moltiplicherebbe $a^\dagger$ e quello, complesso coniugato, che moltiplicherebbe $b^\dagger$.

[93] Con μ intendiamo qui la massa ridotta del sistema, mentre con m indichiamo la massa dell'elettrone (positrone).

per cui risulta

$$\lambda_{2\gamma} = 4\pi\,\alpha^2\,\lambdabar^2\; c\;\frac{1}{8\pi}\,\alpha^3\,\lambdabar^{-3} = \frac{c}{2}\,\alpha^5\,\lambdabar^{-1} = \frac{1}{2}\,\alpha^5\,\frac{mc^2}{\hbar} \qquad (2.373)$$

e quindi, essendo la vita media $\tau_{2\gamma}$ niente altro che l'inverso di $\lambda_{2\gamma}$, abbiamo infine che

$$\tau_{2\gamma} = 2\,\alpha^{-5}\,\frac{\hbar}{mc^2} \approx 2\times(137)^5\;\frac{6.582\times 10^{-22}}{0.511} = 1.24\times 10^{-10}\,s \qquad (2.374)$$

Veniamo adesso allo stato dei due fotoni emessi. Visto che $(e^+\,e^-)_{Pps}$ ha evidentemente $J=0$, possiamo dire senz'altro che, nel sistema dove esso è a riposo, i due fotoni emessi in direzione necessariamente opposta (con la stessa energia, pari alla massa dell'elettrone) dovranno avere la stessa elicità dato che la componente del momento angolare totale in ogni direzione (e dunque anche in quella di volo dei fotoni) deve comunque essere nulla. Questo, però, come abbiamo già visto nel caso del decadimento del π^0, non basta a definire completamente lo stato, visto che questa prescrizione individua due stati indipendenti, i.e. (prescindendo dalla simmetrizzazione dello stato ...)

$$|\vec{k},+>|-\vec{k},+> \qquad e \qquad |\vec{k},->|-\vec{k},-> \qquad (2.375)$$

per cui, a priori, una qualunque loro combinazione lineare soddisferebbe ancora la condizione di conservazione del momento angolare.
In realtà lo stato dei due fotoni è univocamente determinato perchè il Pps ha parità definita e questa simmetria è anch'essa conservata dalla dinamica, i.e. dall'interazione elettromagnetica.
Ma qual è la parità del positronio nel suo stato fondamentale ?
Evidentemente risulta

$$P = (-1)^L\,P_{e^+}\,P_{e^-} \qquad (2.376)$$

dove $P_{e^+}\,P_{e^-}$ è il prodotto delle parità intrinseche del positrone e dell'elettrone che sarà comunque sempre pari a -1, trattandosi di un sistema particella-antiparticella di Dirac.
Dunque, essendo sul fondamentale $L=0$, ne segue che la parità sia del parapositronio che dell'ortopositronio è comunque $P=-1$.
Per il parapositronio ci troviamo quindi esattamente nella stessa situazione che nel caso del decadimento del π^0, avendo lo stato iniziale momento angolare nullo e parità negativa: per quanto visto trattando il decadimento del π^0, i due fotoni avranno dunque polarizzazioni lineari ortogonali.
Non è un caso che si sia ritrovato questo risultato.
Il π^0, infatti, è fatto proprio dello stesso tipo di combinazione particella/antiparticella del positronio, essendo

$$|\pi^0> = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|d\bar{d}> - |u\bar{u}>\right) \qquad (2.377)$$

e accade che ogni coppia $(q\bar{q})$ nel π^0 ha momento angolare orbitale relativo $L = 0$ e si trova in uno stato di singoletto di spin, i.e. $S = 0$, per cui lo spin del π^0, cioè il momento angolare complessivo J del sistema, è nullo.
La particella risulta quindi pseudoscalare[94] proprio perché è costituita da coppie quark/antiquark che essendo fermioni, hanno parità intrinseca opposta, ed essi si trovano in uno stato che ha $L = 0$.

Quanto infine all'Ops, esso, avendo $S = 1$, pur continuando ad avere parità negativa, è autostato della coniugazione di carica C per l'autovalore -1.
Esso non può decadere in un numero pari di fotoni e quindi, non potendo decadere per ragioni cinematiche in un solo fotone, deve decadere in almeno tre. Questo significa che questo processo di annichilazione avviene a un ordine perturbativo più alto di quello in due fotoni e dunque dobbiamo aspettarci che

$$\lambda_{3\gamma} \approx \alpha\ \lambda_{2\gamma} \tag{2.378}$$

Per ragioni di spazio delle fasi, compare poi un fattore extra $\frac{1}{4\pi}\left(\frac{4}{3}\right)^2(\pi^2-9)$ per cui alla fine risulta

$$\begin{aligned} \lambda_{3\gamma} &= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{4}{3}\right)^2(\pi^2-9)\ \alpha\ \frac{1}{2}\alpha^5\,\frac{mc^2}{\hbar} \\ &\Rightarrow\ \tau_{3\gamma} = \tau_{2\gamma}\ \alpha^{-1}\left(\frac{1}{4\pi}\left(\frac{4}{3}\right)^2(\pi^2-9)\right)^{-1} = 1.38\times 10^{-7}\,s \end{aligned} \tag{2.379}$$

[94]Sia chiaro che esistono anche mesoni neutri che hanno autovalori diversi da $J^{PC} = 0^{-+}$, ma, generalmente, quelli di massa più bassa hanno $L = S = 0$ e dunque $J = 0$, $P = -1$, ovvero sono dei mesoni pseudoscalari.

3 Cenni di seconda quantizzazione

3.1 *Il campo scalare libero*

L'evoluzione libera del campo[95] scalare[96] carico di massa m è retta dalla lagrangiana

$$\mathcal{L} \;=\; (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi^\dagger) \;-\; m^2\, \phi\, \phi^\dagger \tag{3.9}$$

[95]Ricordiamo che in Teoria Quantistica dei Campi (QFT), i campi non sono più delle funzioni, bensì sono *operatori* che agiscono nello spazio di Hilbert degli stati di multiparticella del sistema.

[96]Consideriamo la trasformazione (a, Λ) del gruppo di Poincaré

$$(a, \Lambda): \qquad x \rightarrow x' = a + \Lambda x \tag{3.1}$$

e indichiamo con $U \equiv U(a, \Lambda)$ l'operatore unitario che descrive l'azione di questa trasformazione sui vettori di stato del sistema dato. Se consideriamo due stati generici $|\alpha>$ e $|\beta>$ e poniamo

$$|\alpha'>= U(a,\Lambda)|\alpha>; \qquad\qquad |\beta'>= U(a,\Lambda)|\beta> \tag{3.2}$$

allora l'azione dell'operatore unitario $U(a, \Lambda)$ sul campo $\phi(x)$, definito in tutto lo spazio tempo, dovrà essere tale che

$$<\alpha|\,\phi(x)\,|\beta>=<\alpha'|\,\phi(x')\,|\beta'>\equiv<\alpha|U^\dagger(a,\Lambda)\phi(x')U(a,\Lambda)|\beta> \tag{3.3}$$

ovvero, per l'arbitrarietà degli stati considerati, essendo $U^\dagger = U^{-1}$ e risultando $x = \Lambda^{-1}(x'-a)$, abbiamo

$$\phi(\Lambda^{-1}(x'-a)) = U^{-1}(a,\Lambda)\phi(x')U(a,\Lambda) \tag{3.4}$$

da cui, equivalentemente, si ottiene altresì che

$$\phi(x') = U(a,\Lambda)\phi(x)U^{-1}(a,\Lambda) = \phi(a+\Lambda x) \tag{3.5}$$

Questa conclusione è valida per il campo scalare.

Nel caso il campo abbia diverse componenti, dobbiamo attenderci, in generale, che la trasformazione possa mescolarle fra loro, ovvero che risulti (la scelta di usare M^{-1} invece di M diventerà più chiara in seguito ...)

$$<\alpha|\,\phi_i(x)\,|\beta>= M^{-1}_{ij}\; <\alpha'|\,\phi_j(x')\,|\beta'> \tag{3.6}$$

essendo $M = M(\Lambda)$. Proseguendo il calcolo in modo analogo a quanto già fatto, abbiamo che

$$\phi_i(\Lambda^{-1}(x'-a)) = M^{-1}_{ij}\, U^{-1}(a,\Lambda)\phi(x')U(a,\Lambda) \tag{3.7}$$

e dunque

$$U(a,\Lambda)\phi_i(x)U^{-1}(a,\Lambda) = M^{-1}_{ij}\, \phi(a+\Lambda x) \tag{3.8}$$

Poiché questa legge di trasformazione deve riflettere la legge di composizione interna del gruppo, è facile verificare che $M = M(\Lambda)$ deve costituire una rappresentazione del gruppo di Lorentz.

da cui ricaviamo appunto l'equazione di Klein-Gordon sia per ϕ che per $\phi^\dagger$ (considerati indipendenti)

$$\Box\phi \ + \ m^2\,\phi \ = \ 0; \qquad\qquad \Box\phi^\dagger \ + \ m^2\,\phi^\dagger \ = \ 0; \tag{3.10}$$

Per effettuarne la quantizzazione, il campo scalare (complesso) $\phi(x)$ viene espanso in termini di operatori di *creazione/distruzione* di singola particella[97] nel modo seguente:

$$\phi(x) \ = \ \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\{a(\vec{p})\,e^{-ipx} \ + \ b^\dagger(\vec{p})\,e^{ipx}\} \tag{3.13}$$

da cui

$$\phi^\dagger(x) \ = \ \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\{b(\vec{p})\,e^{-ipx} \ + \ a^\dagger(\vec{p})\,e^{ipx}\} \tag{3.14}$$

dove

- p è il quadrimpulso della particella/antiparticella: $p \equiv (E_p, \vec{p}) \equiv (\sqrt{m^2 + |\vec{p}|^2}, \vec{p})$;
- $a(\vec{p})$ annichila la particella di quadrimpulso $(E_p, \vec{p})$;
- $a^\dagger(\vec{p})$ crea la particella di quadrimpulso $(E_p, \vec{p})$;
- $b(\vec{p})$ annichila l'antiparticella di quadrimpulso $(E_p, \vec{p})$;
- $b^\dagger(\vec{p})$ crea l'antiparticella di quadrimpulso $(E_p, \vec{p})$;

e questi operatori[98] soddisfano le seguenti regole di commutazione che, come vedremo, garantiscono il rispetto delle regole di commutazione canoniche quando si considerino i campi stessi, appunto, come variabili lagrangiane generalizzate (tutte le altre coppie di operatori commutano fra loro ...)

$$[a(\vec{p}), a^\dagger(\vec{p'})] \ = \ [b(\vec{p}), a^\dagger(\vec{p'})] \ = \ 2\,E_p\,(2\pi^3)\ \delta^3(\vec{p} - \vec{p'}) \tag{3.15}$$

Naturalmente, essendo gli operatori ϕ e $\phi^\dagger$ soluzioni di una equazione differenziale lineare e omogenea (l'equazione di Klein-Gordon), essi sono evidentemente indeterminati a meno di una costante moltiplicativa.

---

[97]Coerentemente con la (3.5) e la (3.3), l'azione degli operatori unitari $U(a, \Lambda)$ sugli operatori di creazione e distruzione $a(\vec{p})$, $a^\dagger(\vec{p})$, $b(\vec{p})$ e $b^\dagger(\vec{p})$ è la seguente:

$$U(a,\Lambda)\,c(\vec{p})\,U^{-1}(a,\Lambda) = e^{-ia\cdot\Lambda p}\ c(\vec{\Lambda p}); \qquad U^{-1}(a,\Lambda)\,c(\vec{p})\,U(a,\Lambda) = e^{ia\cdot p}\ c(\vec{\Lambda^{-1}p}) \tag{3.11}$$

$$U(a,\Lambda)\,c^\dagger(\vec{p})\,U^{-1}(a,\Lambda) = e^{ia\cdot\Lambda p}\ c^\dagger(\vec{\Lambda p}); \quad U^{-1}(a,\Lambda)\,c^\dagger(\vec{p})\,U(a,\Lambda) = e^{-ia\cdot p}\ c^\dagger(\vec{\Lambda^{-1}p}) \tag{3.12}$$

dove c sta per a oppure b e analogamente $c^\dagger$ per $a^\dagger$ o $b^\dagger$, mentre $\vec{\Lambda p}$ indica la parte spaziale del quadrivettore $\Lambda(\sqrt{m^2 + |\vec{p}|^2}, \vec{p})$, essendo m la massa della particella descritta dal campo.

[98]Si noti che gli operatori di creazione/annichilazione si riferiscono sempre a particelle o antiparticelle aventi energia $E_p = \sqrt{m^2 + |\vec{p}|^2}$ positiva !

La scelta fatta attraverso lo (3.15) è quella per cui la funzione d'onda $\psi_{\vec{q}}(x)$ associata allo stato[99] $|\vec{q}> \equiv a^\dagger(\vec{q})|\Omega>$, autostato del quadrimpulso per l'autovalore $(\sqrt{m^2+|\vec{q}|^2}, \vec{q})$, è semplicemente un'onda piana, i.e.

$$\psi_{\vec{q}}(\vec{x},t) = e^{-iqx} \equiv e^{-i(Et-\vec{q}\cdot\vec{x})} = e^{-iEt}\, e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} \tag{3.16}$$

A priori, per il solo fatto che, per definizione dell'operatore di creazione, $a^\dagger(\vec{q})|\Omega>$ è autostato del quadrimpulso, ne segue solo che la funzione d'onda $\psi_{\vec{q}}(x)$ sarà tale che $\psi_{\vec{q}}(x) = K_{\vec{q}}\ e^{-iqx}$.
La costante K è definita proprio dal fatto che

$$<\vec{p}|\vec{q}> \;=\; <\Omega|a(\vec{p})\, a^\dagger(\vec{q})|\Omega> = <\Omega|[a(\vec{p}), a^\dagger(\vec{q})]|\Omega> = 2E_p\ (2\pi)^3\ \delta^3(\vec{p}-\vec{q})$$

la quale implica dunque che risulti

$$<\psi_{\vec{p}}|\psi_{\vec{q}}> = 2E_p\ (2\pi)^3\ \delta^3(\vec{p}-\vec{q}) \tag{3.17}$$

D'altronde, ricordiamo[100] che se $\psi_1(x)$ e $\psi_2(x)$ sono due funzioni d'onda soluzioni

---

[99]Indicheremo qui e nel seguito con $|\Omega>$ lo stato di vuoto, i.e. lo stato di minima energia del sistema considerato: assumeremo inoltre che esso sia non degenere e invariante per trasformazioni del gruppo di Poincaré, nonché sotto C, P, e T.

[100]La funzione d'onda $\hat{\psi}(\vec{p})$ che in rappresentazione dell'impulso è associata a un generico stato di singola particella $|\psi>$ (per l'antiparticella vale un discorso del tutto analogo con $a \leftrightarrow b$, ovvero $\phi \leftrightarrow \phi^\dagger$), per definizione, è tale che

$$|\psi> \equiv \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\, \hat{\psi}(\vec{p})\, |\vec{p}> = \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\, \hat{\psi}(\vec{p})\, a^\dagger(\vec{p})|\Omega> \tag{3.18}$$

da cui discende, evidentemente, che il prodotto scalare dei due stati generici $|\psi_1>$ e $|\psi_2>$ è dato da (si ricordi che $<\vec{q}|\vec{p}> = (2\pi)^3\, 2E_q\, \delta^3(\vec{p}-\vec{q})$)

$$<\psi_1|\psi_2> = \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\, d^3q\, 2E_q(2\pi)^3 \hat{\psi}_1^*(\vec{q})\, \hat{\psi}_2(\vec{p})\ <\vec{q}|\vec{p}> = \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\, \hat{\psi}_1^*(\vec{p})\, \hat{\psi}_2(\vec{p}) \tag{3.19}$$

Poiché, per quanto visto precedentemente, la funzione d'onda che descrive, in rappresentazione delle coordinate, lo stato $|\vec{p}> \equiv a^\dagger(\vec{p})|\Omega>$ è semplicemente l'esponenziale e^{-ipx}, ecco che allo stato $|\psi>$ possiamo associare, in rappresentazione delle coordinate, la funzione d'onda

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\, \hat{\psi}(\vec{p})\, e^{-ipx} \tag{3.20}$$

la quale soddisfa, ovviamente, l'equazione di Klein-Gordon relativa alla massa m.
E' immediato allora che risulta

$$\psi(x) = <\Omega|\phi(x)|\psi> \tag{3.21}$$

infatti

$$\begin{aligned} <\Omega|\phi(x)|\psi> &= \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\, \frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3} <\Omega|\{a(\vec{p})\, e^{-ipx} b^\dagger(\vec{p})\, e^{ipx}\} a^\dagger(\vec{q})|\Omega>\, \hat{\psi}(\vec{q}) = \\ &= \int \frac{d^3p}{2E(2\pi)^3}\, e^{-ipx}\, \hat{\psi}(\vec{p}) \end{aligned} \tag{3.22}$$

Questo è coerente con il fatto che lo stato $\phi^\dagger(x)|\Omega>$ di cui $<\Omega|\phi(x)$ è il bra, è uno stato di singola particella autostato della posizione per l'autovalore x, infatti risulta evidentemente che

$$\phi^\dagger(x)|\Omega> = \int \frac{d^3p}{2E(2\pi)^3}\, e^{ipx}\, |\vec{p}> \equiv |x> \tag{3.23}$$

ma in rappresentazione dell'impulso l'operatore di quadriposizione X^μ è rappresentato da $X^\mu = -i\frac{\partial}{\partial p_\mu}$, così come in rappresentazione delle coordinate l'operatore di quadriimpulso è rappresentato da $P^\mu = i\frac{\partial}{\partial x_\mu}$, per cui

$$X^\mu\, \phi^\dagger(x)|\Omega> = -i\frac{\partial}{\partial p_\mu} \int \frac{d^3p}{2E(2\pi)^3}\, e^{ipx}\, |\vec{p}> = x^\mu\, \phi^\dagger(x)|\Omega> \tag{3.24}$$

Quanto infine alla normalizzazione di questi autostati della posizione, abbiamo

$$<y|x> = <\Omega|\phi(y)\phi^\dagger(x)|\Omega> = \int \frac{d^3p}{2E(2\pi)^3}\, e^{ip(y-x)} \equiv \Delta^+(y-x) \tag{3.25}$$

dove la funzione impropria $\Delta^+(x)$ verrà descritta più diffusamente in seguito.

dell'equazione di Klein-Gordon, allora il loro prodotto scalare[101] è il seguente

$$< \psi_1|\psi_2 >= i \int d^3x \left[\psi_1^*(\partial^0\psi_2) - (\partial^0\psi_1^*)\psi_2 \right] \tag{3.29}$$

dove le due funzioni sono valutate allo stesso tempo t.

---

[101]L'espressione (3.29) non è, a stretto rigore, un prodotto scalare nel senso solito di questo termine in Meccanica Quantistica perché su due generiche soluzioni dell'equazione di Klein-Gordon non è, in generale, definito positivo. La struttura di questo prodotto nasce dal fatto che se $\psi_1(x)$ e $\psi_2(x)$ sono soluzioni dell'equazione di Klein-Gordon, allora l'unica corrente conservata antilineare in ψ_1 e lineare in ψ_2 (ovvero sequilineare in ψ_1, ψ_2 ...) risulta essere proporzionale a

$$J^\mu(x) = i\,[\psi_1^*(x)(\partial^\mu\psi_2(x)) - (\partial^\mu\psi_1(x))^*\psi_2(x)] \tag{3.26}$$

da cui ne segue che

$$\int d^3x\, J^0(t,\vec{x}) = i \int d^3x\, \left[\psi_1^*(\partial^0\psi_2) - (\partial^0\psi_1^*)\psi_2 \right] \tag{3.27}$$

è certamente indipendente dal tempo e dunque rappresenta l'unica generalizzazione possibile (a meno di costanti moltiplicative) del prodotto scalare che non sia in conflitto con la dinamica.

Venendo al caso di due generici stati di singola particella o di singola antiparticella, il prodotto scalare in questione è definito positivo, e, in accordo con la (3.19), risulta pari a

$$\begin{aligned}
& < \psi_1|\psi_2 >= i \int d^3x\, \left[\psi_1^*(\vec{x},t)(\partial^0\psi_2(\vec{x},t)) - (\partial^0\psi_1^*(\vec{x},t))\psi_2(\vec{x},t) \right] = \\
= \;& i \int d^3x \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3} \left[\hat{\psi}_1^*(\vec{p})e^{ipx} \left(\partial^0 \hat{\psi}_2(\vec{q})e^{-iqx} \right) - \partial^0 \left(\hat{\psi}_1^*(\vec{p})e^{ipx} \right) \hat{\psi}_2(\vec{q})e^{-iqx} \right] = \\
= \;& \int d^3x \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3} \left[q^0\, \hat{\psi}_1^*(\vec{p})e^{ipx}\hat{\psi}_2(\vec{q})e^{-iqx} + p^0\, \hat{\psi}_1^*(\vec{p})e^{ipx}\hat{\psi}_2(\vec{q})e^{-iqx} \right] = \\
= \;& \int d^3x e^{-i\vec{x}\cdot(\vec{p}-\vec{q})} \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3}\, e^{-it(q^0-p^0)} \left[q^0\, \hat{\psi}_1^*(\vec{p})\hat{\psi}_2(\vec{q}) + p^0\, \hat{\psi}_1^*(\vec{p})\hat{\psi}_2(\vec{q}) \right] = \\
= \;& \int (2\pi)^3\delta^3(\vec{p}-\vec{q}) \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3}\, e^{-it(q^0-p^0)} \left[q^0\, \hat{\psi}_1^*(\vec{p})\hat{\psi}_2(\vec{q}) + p^0\, \hat{\psi}_1^*(\vec{p})\hat{\psi}_2(\vec{q}) \right] = \\
= \;& \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \hat{\psi}_1^*(\vec{p})\, \hat{\psi}_2(\vec{p})
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Nel caso in esame, abbiamo dunque

$$\begin{aligned}
< \psi_{\vec{p}}|\psi_{\vec{q}} > &= i\, K^*_{\vec{p}}\, K_{\vec{q}} \int d^3x\, \left[e^{ipx}\,(-iq^0)\, e^{-iqx} - ip^0\, e^{ipx}\, e^{-iqx} \right] = \\
&= K^*_{\vec{p}}\, K_{\vec{q}} \int d^3x (q^0 + p^0) e^{ix(p-q)} = K^*_{\vec{p}}\, K_{\vec{q}} (q^0 + p^0)\, e^{it(p^0 - q^0)} (2\pi)^3\, \delta^3(\vec{p} - \vec{q}) = \\
&= |K_{\vec{p}}|^2\; 2E_p\; (2\pi)^3\, \delta^3(\vec{p} - \vec{q})
\end{aligned}$$

e il confronto con la (3.17) impone appunto che, indipendentemente da $\vec{p}$, sia $|K|^2 = 1$, ovvero[102] $K = 1$. Lo stesso vale per le antiparticelle.

Vogliamo ricordare infine che, siccome la densità di corrente[103], definita dalla invarianza di gauge di prima specie e associata alla generica funzione d'onda ψ che soddisfa l'equazione di Klein-Gordon, è data da

$$j^\mu(x) = i\,[\psi^*(\partial^\mu \psi) - (\partial^\mu \psi^*)\psi] \tag{3.31}$$

la funzione d'onda $\psi_{\vec{p}}(x) = e^{-ipx}$ rappresenta uno stato con densità di particelle/antiparticelle pari a

$$\rho(x) = J^0(x) = i\left[\psi^*(\partial^0\psi) - (\partial^0\psi^*)\psi\right] = 2E \tag{3.32}$$

Concludendo, dunque, possiamo dire che la normalizzazione scelta è tale per cui gli stati di "singola" particella/antiparticella $a^+(\vec{q})|\Omega >$ o $b^+(\vec{q})|\Omega >$ descrivono stati normalizzati a $2E$ particelle/antiparticelle per unità di volume. Questo risultato, come vedremo, ci ritornerà utile in seguito, quando tratteremo il problema dello spazio delle fasi, nell'ambito della teoria dello scattering.

Veniamo infine alla questione dei commutatori dei campi e alla giustificazione della scelta fatta.
Sulla base dell'analogia classica secondo cui, fissato comunque un tempo t, il campo $\phi(\vec{x};t)$ costituisce una generalizzazione del concetto di coordinata lagrangiana, ci aspettiamo che risulti

$$[\phi(\vec{x};t), \phi(\vec{y};t)] = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[\phi^\dagger(\vec{x};t), \phi^\dagger(\vec{y};t)\right] = 0 \tag{3.33}$$

[102]Si noti che $|K|^2 = 1$ impone solo che K abbia modulo unitario e dunque possa essere solo un fattore di fase, che può essere semplicemente riassorbito nella definizione della base.

[103]Come abbiamo visto in precedenza, parlando del teorema di Noëther, se la lagrangiana è invariante in forma sotto il gruppo $U(1)$ delle trasformazioni di gauge di prima specie $x \to x$, $\psi \to e^{i\alpha}\psi$, $\psi^\dagger \to e^{-i\alpha}\psi^\dagger$ allora la corrente conservata che ne deriva è la seguente (cfr. (1.18))

$$J^\mu(x) = i\left[-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)}\,\psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi^*)}\,\psi^* \right] \tag{3.30}$$

Ma che dire del commutatore $\left[\phi(\vec{x};t),\phi^\dagger(\vec{y};t)\right]$?

Questo non può essere altrettanto semplice, infatti, proprio per l'analogia classica secondo cui il momento coniugato alla variabile lagrangiana q è

$$p \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}$$

ne segue che il "momento coniugato" al campo $\phi(\vec{x},t)$ sarà il campo

$$\pi(\vec{x},t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \phi)} = \partial_t \phi^\dagger(\vec{x},t) \tag{3.34}$$

e, analogamente, quello coniugato al campo $\phi^\dagger(\vec{x},t)$ risulta essere

$$\pi^\dagger(\vec{x},t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \phi^\dagger)} = \partial_t \phi(\vec{x},t) \tag{3.35}$$

Quindi, proprio per l'analogia con la Meccanica Quantistica di prima quantizzazione, per cui ($\hbar = 1$) risulta

$$[p,x] = -i \tag{3.36}$$

dobbiamo adesso aspettarci[104] che valga la ovvia generalizzazione al caso continuo della (3.36), i.e.

$$\begin{aligned} &[\pi(\vec{y},t),\phi(\vec{x},t)] = -i\ \delta^3(\vec{y}-\vec{x}) \\ &\Rightarrow \left[\phi(\vec{x},t),\partial_t\phi^\dagger(\vec{y},t)\right] = i\,\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \end{aligned} \tag{3.37}$$

e, analogamente, quindi, che sia

$$\left[\phi^\dagger(\vec{x},t),\partial_t\phi(\vec{y},t)\right] = i\,\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \tag{3.38}$$

Questo è, in effetti, esattamente quanto accade usando le regole di commutazione (3.15) fissate per gli operatori di creazione e distruzione. Infatti si ha

$$\begin{aligned} &\left[\phi(\vec{x},t),\partial_t\phi^\dagger(\vec{y},t)\right] = \\ = &\left[\int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\{a(\vec{p})e^{-ipx}+b^\dagger(\vec{p})e^{ipx}\}\,,\ \partial_t \int \frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3}\{b(\vec{q})e^{-iqy}+a^\dagger(\vec{q})e^{iqy}\}\right]_{t=x^0=y^0} = \\ = &\int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3}\left\{iq^0\left[a(\vec{p}),a^\dagger(\vec{q})\right]\ e^{-ipx}\,e^{iqy} - iq^0\left[b^\dagger(\vec{p}),b(\vec{q})\right]\ e^{ipx}\,e^{-iqy}\right\}_{t=x^0=y^0} = \\ = &\int \frac{d^3p\ d^3q}{2E_p\ 2E_q(2\pi)^6}\ iE_q\left\{2E_q\,(2\pi)^3\,\delta^3(\vec{p}-\vec{q})\left[e^{i(\vec{p}\cdot\vec{x}-\vec{q}\cdot\vec{y})}+e^{-i(\vec{p}\cdot\vec{x}-\vec{q}\cdot\vec{y})}\right]\right\} \end{aligned}$$

dove si è usata la definizione (3.15) unitamente al fatto che

[104] E' importante notare che, in base all'analogia con la MQ di prima quantizzazione, le regole di commutazione possono essere definite solo a tempi uguali. Una volta che queste siano state assegnate (proprietà cinematica), le regole di commutazione a tempi diversi sono determinate dall'evoluzione del sistema nel tempo, cioè dalla sua dinamica, ovvero dalle soluzioni esplicite dell'equazione del moto.

- abbiamo posto per definizione $px \equiv p^0x^0 - \vec{p}\cdot\vec{x}$
- risulta $x^0 = y^0 = t$,
- $q^0 \equiv E_q$

per cui, visto che per la presenza nell'integrale della funzione delta proveniente dal commutatore, è $E_p = E_q$, si può evidentemente assumere che

$$p^0x^0 - q^0y^0 = t(p^0 - q^0) = 0$$

Ne segue quindi che il commutatore in esame, integrando la delta, vale

$$\left[\phi(\vec{x},t), \partial_t\phi^\dagger(\vec{y},t)\right] = \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\; iE_p \left\{e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} + e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}\right\} \tag{3.39}$$

Ma

$$\int d^3p\;\; e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} = (2\pi)^3\,\delta(\vec{x}-\vec{y}) = \int d^3p\;\; e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}$$

quindi esso, alla fine, risulta pari a

$$\left[\phi(\vec{x},t), \partial_t\phi^\dagger(\vec{y},t)\right] = i\;\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \tag{3.40}$$

che è quanto ci attendevamo sulla base dell'analogia con la MQ di prima quantizzazione.
Lo stesso accade, ovviamente, anche per il commutatore $[\phi^\dagger, \partial_t\phi]$ per il quale risulta ancora

$$\left[\phi^\dagger(\vec{x},t), \partial_t\phi(\vec{y},t)\right] = i\;\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \tag{3.41}$$

Questo dimostra quindi che le regole di commutazione fissate per gli operatori di creazione e distruzione (3.15) sono esattamente quelle in grado di riprodurre le regole di commutazione che debbono valere, a tempi uguali, fra i campi ed i loro momenti coniugati.
Ovviamente, poi le regole di commutazione (3.15) consentono di determinare le regole di commutazione fra i campi stessi anche a tempi diversi.
In generale[105] risulta

$$\begin{aligned}
&\left[\phi(x), \phi^\dagger(y)\right] = \\
= &\left[\int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\left\{a(\vec{p})e^{-ipx} + b^\dagger(\vec{p})e^{ipx}\right\}\;,\;\int \frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3}\left\{b(\vec{q})e^{-iqy} + a^\dagger(\vec{q})e^{iqy}\right\}\right] = \\
= &\int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3}\left\{\left[a(\vec{p}), a^\dagger(\vec{q})\right]e^{-ipx}\,e^{iqy} + \left[b^\dagger(\vec{p}), b(\vec{q})\right]e^{ipx}\,e^{-iqy}\right\} = \\
= &\int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3}\left\{2E_p\,(2\pi)^3\,\delta^3(\vec{p}-\vec{q})e^{-ipx}\,e^{iqy} - 2E_p\,(2\pi)^3\,\delta^3(\vec{p}-\vec{q})e^{ipx}\,e^{-iqy}\right\}
\end{aligned}$$

[105] Evidentemente dalle regole di commutazione (3.15) segue immediatamente che

$$[\phi(x), \phi(y)] = [\phi^\dagger(x), \phi^\dagger(y)] = 0$$

Integrando in d^3p, dato che quando $\vec{p} = \vec{q}$ anche $p^0 = q^0 = E_p = E_q \equiv \sqrt{m^2 + |\vec{q}|^2}$, abbiamo

$$\left[\phi(x), \phi^\dagger(y)\right] = \int \frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3} \left[e^{-iq(x-y)} - e^{iq(x-y)}\right] \equiv \Delta^+(x-y) + \Delta^-(x-y) \tag{3.42}$$

dove le funzioni improprie Δ^+ e Δ^- sono così definite[106]

$$\Delta^+(x-y) \equiv \int \frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3} e^{-iq(x-y)} \tag{3.45}$$

$$\Delta^-(x-y) \equiv -\int \frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3} e^{iq(x-y)} \tag{3.46}$$

D'altronde, l'integrale (3.42), usando il fatto che

$$\frac{d^3q}{2E_q} = d^4q\ \delta(q^2 - m^2)\, \Theta(q^0) \tag{3.47}$$

può essere anche riscritto nel modo seguente

$$\begin{aligned} \left[\phi(x), \phi^\dagger(y)\right] &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4q\, \delta(q^2 - m^2)\, \Theta(q^0)\, e^{-iq(x-y)} - \\ &- \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4q\, \delta(q^2 - m^2)\, \Theta(q^0)\, e^{iq(x-y)} \end{aligned} \tag{3.48}$$

ovvero, con la sostituzione $q \to -q$ nel secondo integrale, finalmente otteniamo

$$\begin{aligned} \left[\phi(x), \phi^\dagger(y)\right] &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4q\, \delta(q^2 - m^2)\, e^{-iq(x-y)} \left[\Theta(q^0) - \Theta(-q^0)\right] = \\ &\equiv i\,\Delta(x-y;m) \end{aligned} \tag{3.49}$$

dove si è fatto uso della definizione della funzione impropria

$$\Delta(x-y;m) \equiv -\frac{i}{(2\pi)^3} \int d^4q\, \delta(q^2 - m^2)\, e^{-iq(x-y)} \left[\Theta(q^0) - \Theta(-q^0)\right] \tag{3.50}$$

Ed evidentemente[107] dalla (3.42) e dalla (3.49) discende che

$$i\Delta(x-y) = \Delta^+ + \Delta^- \Leftrightarrow \Delta(x-y) = -i(\Delta^+ + \Delta^-) \tag{3.52}$$

---

[106] Le notazioni sono quelle usate anche nel libro *Relativistic Quantum Fields* di J.D. Bjorkeen e S.D. Drell. Si osservi che dalle definizioni (3.45) e (3.46) segue, in particolare, che

$$\Delta^\pm(x) = -\Delta^\mp(-x) \tag{3.43}$$

$$\left[\Delta^\pm(x)\right]^* = -\Delta^\mp(x) \tag{3.44}$$

[107] Quando questo non creerà possibili confusioni, ometteremo la dipendenza esplicita dalla massa m, i.e. porremo

$$\Delta(x-y;m) \equiv \Delta(x-y) \tag{3.51}$$

La funzione Δ, definita dalla (3.50)

- soddisfa l'equazione di Klein-Gordon[108]

$$\left(\Box + m^2\right) \Delta(x;m) = 0 \tag{3.53}$$

- è tale per cui[109]

$$\partial_t \, \Delta(\vec{x},t;m)\big|_{t=0} = -\delta(\vec{x}) \tag{3.55}$$

- è reale[110]
- è dispari[111]
- è scalare[112] sotto il gruppo di Lorentz.

---

[108] Infatti abbiamo

$$\left(\Box + m^2\right) \Delta(x;m) = -i \left(\Box + m^2\right) [\phi(x), \phi^\dagger(0)] = 0$$

essendo $\left(\Box + m^2\right) \phi(x) = 0$.

[109] Infatti risulta

$$\begin{aligned} \partial_t \, \Delta(\vec{x},t;m)\big|_{t=0} &= -i\partial_t \left[\phi(x), \phi^\dagger(0)\right]_{t=0} = -i \left[\partial_t \phi(x)\big|_{t=0}, \phi^\dagger(0)\right] = \\ = \quad & -i \left[\Pi^\dagger(\vec{x},0), \phi^\dagger(\vec{0},0)\right] = -i\left[-i\delta(\vec{x})\right] = -\delta(\vec{x}) \end{aligned} \tag{3.54}$$

dove abbiamo usato il fatto che

$$\Pi^\dagger(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^\dagger} = \dot{\phi}(x)$$

e che, a tempi uguali, risulta appunto, come abbiamo visto, che

$$[\Pi(\vec{x},t), \phi(\vec{y},t)] = -i\delta(\vec{x}-\vec{y}) = \left[\Pi^\dagger(\vec{x},t), \phi^\dagger(\vec{y},t)\right]$$

[110] Infatti, essendo $i\Delta(x) \equiv \Delta^+(x) + \Delta^-(x)$ abbiamo che

$$[i\Delta(x)]^* = -i\Delta^*(x) = \left(\Delta^+(x)\right)^* + \left(\Delta^-(x)\right)^* = -\Delta^-(x) - \Delta^+(x) = -i\Delta(x) \Rightarrow \Delta^*(x) = \Delta(x)$$

[111] Infatti

$$i\Delta(-x) = \Delta^+(-x) + \Delta^-(-x) = -\Delta^-(x) - \Delta^+(x) = -i\Delta(x) \Rightarrow \Delta(-x) = -\Delta(x)$$

[112] La struttura della funzione, così come risulta dalla (3.50), non lascia dubbi in proposito: l'elemento di volume è invariante e la funzione integranda è scalare perché le funzioni $\Theta(\pm q^0)$ sono entrambe costanti su ciascuno dei due iperboloidi definiti dalla condizione di massa espressa dalla equazione $p^2 - m^2 = 0$, in quanto il segno della componente temporale di un quadrivettore time-like, come sappiamo, è invariante sotto trasformazioni del gruppo di Lorentz ortocrono proprio.

Si noti che dalla sua natura dispari e dal fatto che è scalare sotto il gruppo di Lorentz, ne segue che la funzione Δ è nulla se x è un quadrivettore *space-like*, potendo x essere cambiato di segno con una opportuna trasformazione di Lorentz. Questo implica che il commutatore $[\phi(x), \phi^\dagger(y)]$ è nullo quando il quadrivettore $x - y$ è space-like, ovvero quando non è possibile connettere x con y in modo causale e quindi, in particolare, per esempio, quando $x^0 = y^0$, i.e. $\Delta(\vec{x}, 0; m) = 0$.
Questo risultato era comunque da attendere perché, se vogliamo che ci sia coerenza con la relatività ristretta, variabili non causalmente correlabili non possono influenzarsi a vicenda e dunque non possono che commutare fra loro !
La funzione $\Delta(x) \equiv \Delta(x; m)$, o funzioni ad essa collegate, si ritrovano in ogni teoria di campo perché, alla fine, ognuna di queste teorie tratta di particelle con massa definita e dunque di campi che soddisfano *anche* l'equazione di Klein-Gordon con massa opportuna.
Vediamo dunque di studiarne meglio le proprietà e le caratteristiche.
Osserviamo che, evidentemente, essendo il commutatore (3.49) un c-numero (una funzione a valori complessi ...), risulta

$$< \Omega| \left[\phi(x), \phi^\dagger(y)\right] |\Omega >= i\,\Delta(x-y) = \Delta^+(x-y) + \Delta^-(x-y) \tag{3.56}$$

Vediamo adesso un po' meglio qual è il significato fisico dei due termini Δ^+ e Δ^-.
Consideriamo per questo le quantità seguenti

$$< \Omega|\phi(x)\,\phi^\dagger(y)|\Omega >; \qquad < \Omega|\phi(y)^\dagger\,\phi(x)|\Omega > \tag{3.57}$$

e partiamo dal fatto che, evidentemente, risulta[113]

$$\phi^\dagger(y)|\Omega >= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p}\, a^\dagger(\vec{p})|\Omega >\, e^{ipy} \equiv \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p}\, e^{ipy}\,|p > \tag{3.58}$$

dove $|p >$ è lo stato di singola particella di quadriimpulso p.
Evidentemente, passando al bra, si ha altresì che

$$< \Omega|\phi(x) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2E_q}\, e^{-iqx}\ < q| \tag{3.59}$$

per cui abbiamo

$$\begin{aligned} < \Omega|\phi(x)\phi^\dagger(y)|\Omega >= & \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2E_q} e^{ipy} e^{-iqx}\ < q|p >= \\ = & \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2E_q} e^{ipy} e^{-iqx}\,(2\pi)^3 2E_q\,\delta(\vec{q}-\vec{p}) = \\ = & \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p}\, e^{-ip(x-y)} \equiv \Delta^+(x-y) \end{aligned} \tag{3.60}$$

[113]autostato della posizione ....

Per quanto riguarda l'altro termine, cioè $< \Omega|\phi(y)^\dagger, \phi(x)|\Omega >$, ripartiamo ancora dal fatto che

$$\phi(x)|\Omega >= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} b^\dagger(\vec{p})|\Omega > e^{ipx} \equiv \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} e^{ipx} \, |p > \tag{3.61}$$

dove però, stavolta, $|p >$ è lo stato di singola antiparticella di quadriimpulso p. Ripetendo il conto fatto sopra, abbiamo che

$$\begin{aligned} < \Omega|\phi^\dagger(y)\phi(x)|\Omega >&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2E_q} e^{ipx} e^{-iqy} \; < q|p >= \\ = \; & \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} \, e^{ip(x-y)} \equiv -\Delta^-(x-y) \end{aligned} \tag{3.62}$$

Ecco dunque il senso delle funzioni improprie $\Delta^\pm$: sono i valori di aspettazione sul vuoto delle forme bilineari nei campi $\phi(x)\phi^\dagger(y)$ e $\phi^\dagger(y)\phi(x)$, rispettivamente.

Un altro modo interessante di rappresentare sia la Δ che le funzioni $\Delta^\pm$ passa attraverso la definizione seguente

$$\hat{\Delta}(x) \equiv \frac{1}{(2\pi)^4} \int_C d^4q \, \frac{e^{iqx}}{q^2 - m^2} \tag{3.63}$$

dove C è un cammino di integrazione che è chiuso nel piano complesso q_0, contiene entrambi i poli della funzione integranda $q_0 = \pm E_q \equiv \sqrt{m^2 + |\vec{p}|^2}$ ed è percorso in senso antiorario (vedi Fig. 8).

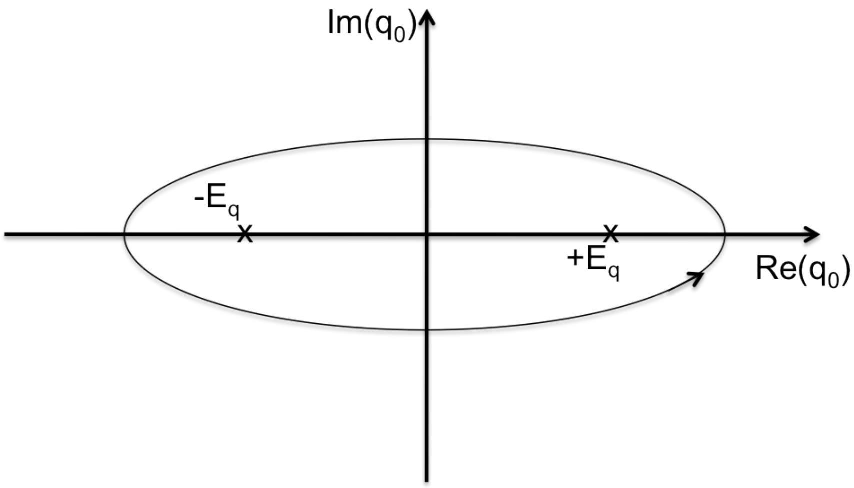


Figure 8: *Cammino di integrazione relativo alla funzione* $\hat{\Delta}$

Abbiamo dunque

$$
\begin{aligned}
\hat{\Delta}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^4}\int_C d^4q\,\frac{e^{iqx}}{q^2-m^2} = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^3q e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}}\int_C dq^0\,\frac{e^{iq_0t}}{q_0^2-E_q^2} = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^3q e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}}\,(2\pi\, i)\left[\frac{e^{iE_qt}}{2E_q}+\frac{e^{-iE_qt}}{-2E_q}\right] = \\
&= \frac{i}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3q}{2E_q}\left(e^{iqx}-e^{-iqx}\right) = -i\Delta^-(x)-i\Delta^+(x) = \\
&= -i(\Delta^+(x)+\Delta^-(x)) = \Delta(x) \qquad (3.64)
\end{aligned}
$$

dove, nel secondo addendo dell'integrale riportato nel penultimo rigo dell'equazione precedente, abbiamo effettuato la sostituzione $\vec{q}\to-\vec{q}$.
Dunque la funzione $\hat{\Delta}(x)$ definita dalla (3.63) è semplicemente un altro modo di rappresentare la funzione Δ stessa. Questa rappresentazione, a sua volta, ci consente di reinterpretare le funzioni $\Delta^\pm$, infatti abbiamo evidentemente che

$$
\begin{aligned}
\hat{\Delta}(x) &\equiv \frac{1}{(2\pi)^4}\int_C d^4q\,\frac{e^{iqx}}{q^2-m^2} = -i(\Delta^+ + \Delta^-) \;\Rightarrow \\
&\Rightarrow \left[\phi(x),\phi^\dagger(y)\right] = \Delta^- + \Delta^+ = i\hat{\Delta}(x) = \frac{i}{(2\pi)^4}\int_C d^4q\,\frac{e^{iqx}}{q^2-m^2} = \\
&= \frac{i}{(2\pi)^4}\int_{C^+} d^4q\,\frac{e^{iqx}}{q^2-m^2} + \frac{i}{(2\pi)^4}\int_{C^-} d^4q\,\frac{e^{iqx}}{q^2-m^2} \qquad (3.65)
\end{aligned}
$$

dove i percorsi $C^\pm$ sono i percorsi chiusi in senso antiorario intorno a ciascun polo (vedi fig. 9)

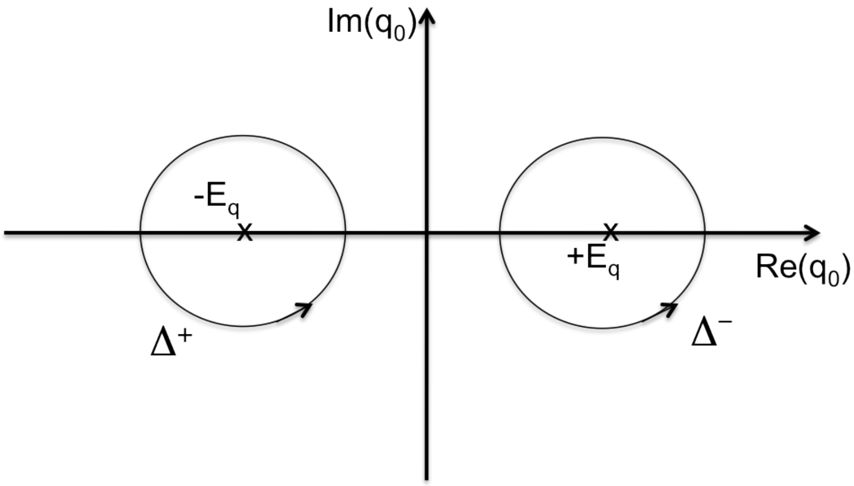


Figure 9: *Cammino di integrazione relativo alle funzione* $\Delta^\pm$

E' facile verificare[114] allora che risulta in particolare che

$$\Delta^{\pm}(x) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int_{C^{\mp}} d^4q \, \frac{e^{iqx}}{q^2 - m^2} \tag{3.68}$$

Come già detto varie volte, le funzioni improprie $\Delta^{\pm}(x)$ e $\Delta(x)$ sono soluzioni dell'equazione di Klein-Gordon omogenea per la massa m.

Veniamo ora a considerare un'altra funzione molto importante in teoria dei campi, legata anch'essa in modo speciale alle funzioni $\Delta^{\pm}$, che è la funzione di Green $G(x)$ ovvero il propagatore[115] del campo stesso.
La definizione[116] che adotteremo per la funzione impropria $G(x)$ è la seguente

$$\left(\Box + m^2\right) G(x) = -\delta^4(x) \tag{3.71}$$

---

[114] Infatti si ha

$$\begin{aligned}
& \frac{i}{(2\pi)^4} \int_{C^-} d^4q \, \frac{e^{iqx}}{q^2 - m^2} = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^3q e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}} \int_{C^-} \frac{e^{iq^0t}}{(q^0 - E_q)(q^0 + E_q)} = \\
= & \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^3q e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}} (2\pi i) \frac{e^{-iE_qt}}{-2E_q} = \int \frac{1}{2E_q(2\pi)^3} d^3q e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}} \, e^{-iE_qt} = \\
= & \int \frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3} e^{-iqx} = \Delta^+(x)
\end{aligned} \tag{3.66}$$

dove abbiamo effettuato nel penultimo integrale la solita sostituzione $\vec{q} \to -\vec{q}$.
Analogamente risulta

$$\begin{aligned}
& \frac{i}{(2\pi)^4} \int_{C^+} d^4q \, \frac{e^{iqx}}{q^2 - m^2} = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^3q e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}} \int_{C^-} \frac{e^{iq^0t}}{(q^0 - E_q)(q^0 + E_q)} = \\
= & \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^3q e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}} (2\pi i) \frac{e^{iE_qt}}{2E_q} = \int \frac{1}{2E_q(2\pi)^3} d^3q e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}} \, e^{-iE_qt} = \\
= & -\int \frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3} e^{iqx} = \Delta^-(x)
\end{aligned} \tag{3.67}$$

[115] Come e noto, il nome *propagatore* trae la sua origine dal fatto che, in presenza di un termine di sorgente $S(x)$ del campo, ovvero nel caso dell'equazione inomogenea

$$\left(\Box + m^2\right) \phi(x) = S(x) \tag{3.69}$$

la soluzione generale si può scrivere formalmente nel modo seguente

$$\phi(x) = \phi_0(x) - \int d^4y \; G(x - y) S(y) \tag{3.70}$$

dove $\phi_0(x)$ è una qualunque soluzione dell'equazione omogenea.
[116] In matematica la definizione usuale della funzione di Green differisce da qualla da noi adottata per il segno. La ragione della scelta diversa sta semplicemente nella maggior praticità d'uso nel caso dei campi, legata a sua volta alla scelta della metrica.

Per esplicitare $G(x)$ assumeremo che essa sia rappresentabile in integrale di Fourier e dunque assumeremo di poter scrivere

$$G(x) = \int d^4q\, e^{-iqx}\, \hat{G}(q) \tag{3.72}$$

Siccome

$$\delta^4(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q\, e^{-iqx} \tag{3.73}$$

la (3.71) implica che debba essere

$$(-q^2 + m^2)\hat{G}(q) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \quad \Rightarrow \quad \hat{G}(q) = \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 - m^2} \tag{3.74}$$

ovvero, quindi

$$G(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q\, \frac{e^{-iqx}}{q^2 - m^2} \tag{3.75}$$

E' evidente, allora, dalla (3.75), la stretta similitudine con le funzioni $\Delta^{\pm}(x)$ e $\Delta(x)$: ma come si spiega allora che le funzioni $\Delta^{\pm}(x)$ e $\Delta(x)$ soddisfano l'equazione di Klein-Gordon omogenea, mentre il propagatore $G(x)$ verifica invece l'equazione disomogena (3.71) ?
Il punto è che la (3.75) non è sufficiente, da sola, per definire la funzione $G(x)$ a causa della presenza dei due zeri al denominatore della funzione integranda, per $q^0 = \pm E_p$. Per definire $G(x)$ occorre anche definire il percorso di integrazione relativamente a q^0, ovvero decidere la prescrizione con cui trattare i poli.
La prescrizione che si usa quanto al propagatore è quella di Feynman-Stueckelberg, per cui

$$\hat{G}(q) \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 - m^2 + i\epsilon} \tag{3.76}$$

dove la quantità positiva ϵ verrà poi mandata a zero al momento opportuno e serve unicamente per definire il modo di operare intorno ai poli.
Con questa prescrizione, il denominatore della funzione integranda diviene infatti

$$q^2 - m^2 + i\epsilon = q_0^2 - |\vec{q}|^2 - m^2 + i\epsilon = q_0^2 - E_q^2 + i\epsilon \approx q_0^2 - \left(E_q - \frac{i\epsilon}{2E_q}\right)^2 \tag{3.77}$$

ovvero si azzera non più sull'asse reale, bensì nei punti del piano complesso tali che

$$q_0 = \pm \left(E_q - \frac{i\epsilon}{2E_q}\right) \equiv \pm\,(E_q - i\epsilon') \tag{3.78}$$

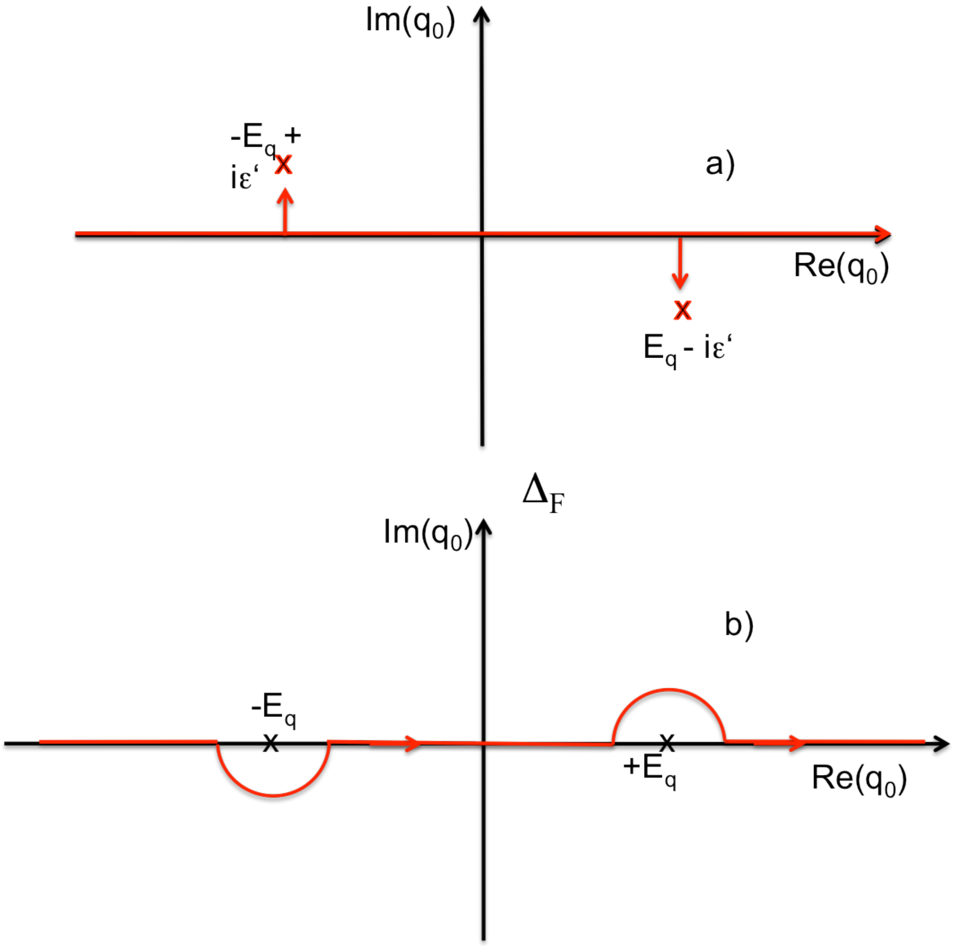


Figure 10: *Cammino di integrazione relativo al propagatore* $G = \Delta_F$

Accade dunque che il polo con parte reale positiva E_q si *abbassa* sotto l'asse reale della quantità $\epsilon' = \frac{\epsilon}{2E_q}$, mentre il polo in $-E_q$ si *alza* sopra l'asse reale della stessa quantità (vedi fig.10 a)). In questo modo, sull'asse reale q^0 non ci sono più poli e l'integrazione da $-\infty$ a $+\infty$ può procedere senza necessità di altre precisazioni[117]. Abbiamo

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4q\, \frac{e^{-iqx}}{q^2 - m^2 + i\epsilon} = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^4}\, e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} \int_{-\infty}^{+\infty} dq^0\, \frac{e^{-iq^0 t}}{q_0^2 - E_q^2 + i\epsilon} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^3q\; e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} \int_{-\infty}^{+\infty} dq^0\, \frac{e^{-iq^0 t}}{[q^0 - (E_q - i\epsilon'] \, [q^0 + (E_q - i\epsilon')]} \end{aligned} \tag{3.79}$$

Si osservi adesso che la funzione integranda è olomorfa in tutto il piano complesso q_0, a parte i due poli semplici in $q^0 = \pm(E_q - i\epsilon')$, e l'integrale è sull'asse reale. Nel caso in cui $t > 0$, la presenza dell'esponenziale $e^{-iq^0 t}$ nella funzione integranda consente di chiudere il cammino di integrazione all'infinito su una semicirconferenza nel semipiano inferiore ($\Im m(q_0) < 0$), senza che questo contributo alteri il valore dell'integrale sull'asse reale in quanto l'integrale sulla semicirconferenza sarà comunque nullo a causa dell'esponenziale reale negativo che si realizza su

[117]Evidentemente lo stesso risultato si ottiene senza introdurre il termine immaginario proporzionale ad ϵ, ma valutando l'integrale seguendo semplicemente la prescrizione illustrata nella figura 10 *b*).

questo cammino. D'altronde, proprio perché la funzione integranda è olomorfa in tutto il piano complesso all'infuori dei due poli semplici ben noti, sappiamo che un qualunque suo integrale su un percorso chiuso avrà come risultato la somma dei residui ai poli contenuti all'interno del cammino di integrazione.
Per $t > 0$, richiudendo verso il basso, il solo polo che viene compreso nel cammino di integrazione è quello per $q^0 = (E_q - i\epsilon')$, percorso in senso orario.
Dunque, per $\epsilon \to 0$, abbiamo

$$t > 0: \quad G(x) \quad = \quad -\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{C^+} d^4q\,\frac{e^{-iqx}}{q^2-m^2} \tag{3.80}$$

D'altronde

$$-\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{C^+} d^4q\,\frac{e^{-iqx}}{q^2-m^2} = -\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^3q e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}\int_{C^+} dq_0\frac{e^{-iq_0t}}{(q_0-E_q)(q_0+E_q)} =$$
$$-\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^3q e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}(2\pi i)\frac{e^{-iE_qt}}{2E_q} = \frac{-i}{(2\pi^3)}\int\frac{d^3q}{2E_q}\,e^{-iqx} \equiv -i\Delta^+(x) \tag{3.81}$$

Nel caso in cui $t < 0$, dovendo richiudere il cammino nel semipiano superiore, il polo da considerare è quello per $q^0 = -(E_q - i\epsilon')$ e dunque, siccome questa volta il senso di circolazione è quello antiorario, risulta

$$t < 0: \quad G(x) \quad = \quad \frac{1}{(2\pi)^4}\int_{C^-} d^4q\,\frac{e^{-iqx}}{q^2-m^2} \tag{3.82}$$

Ma

$$\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{C^-} d^4q\,\frac{e^{-iqx}}{q^2-m^2} = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^3q e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}\int_{C^-} dq_0\frac{e^{-iq_0t}}{(q_0-E_q)(q_0+E_q)} =$$
$$\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^3q\, e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}(2\pi i)\frac{e^{iE_qt}}{-2E_q} = \frac{-i}{(2\pi^3)}\int\frac{d^3q}{2E_q}\,e^{iqx} \equiv i\Delta^-(x) \tag{3.83}$$

per cui, in conclusione, abbiamo

$$x^0 > y^0 \Leftrightarrow t > 0: \quad G(x) \quad = \quad -i\Delta^+(x-y) \tag{3.84}$$
$$x^0 < y^0 \Leftrightarrow t < 0: \quad G(x) \quad = \quad i\Delta^-(x-y) \tag{3.85}$$

D'altronde, per loro stessa definizione, risulta

$$<\Omega|\phi(x)\phi^\dagger(y)|\Omega> \quad = \quad \Delta^+(x-y) \tag{3.86}$$
$$<\Omega|\phi^\dagger(y)\phi(x)|\Omega> \quad = \quad -\Delta^-(x-y) \tag{3.87}$$

e dunque, ponendo adesso per uniformità di simboli con la letteratura più comune

$$\Delta_F(x-y) \equiv G(x-y) \tag{3.88}$$

abbiamo che

$$i\Delta_F(x-y) = <\Omega|\mathcal{T}\left(\phi(x)\phi^\dagger(y)\right)|\Omega> \tag{3.89}$$

dove il simbolo $\mathcal{T}$ indica[118] il prodotto dei campi T-ordinato o di Dyson, secondo il quale, dati comunque due campi $A(x)$ e $B(x)$, risulta

$$\mathcal{T}\left(A(x)\,B(y)\right) = A(x)B(y)\Theta(x^0-y^0) + B(y)A(x)\Theta(y^0-x^0) \tag{3.90}$$

Prima di concludere questo argomento è senz'altro utile ritornare sulla assunzione (3.76) da cui segue appunto che

$$\Delta_F(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\,\frac{e^{-ipx}}{p^2-m^2+i\epsilon} \tag{3.91}$$

E' del tutto evidente che, effettivamente, nel limite in cui $\epsilon\to 0$, risulta

$$(\Box+m^2)\Delta_F(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\,\frac{(m^2-p^2)e^{-ipx}}{p^2-m^2+i\epsilon} = -\delta^4(x) \tag{3.92}$$

ma è altresì evidente che, nello stesso limite, vale anche la relazione

$$(\Box+m^2)\Delta_F^*(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\,\frac{(m^2-p^2)e^{ipx}}{p^2-m^2-i\epsilon} = -\delta^4(x) \tag{3.93}$$

Qual è la differenza fra le due possibili scelte della funzione di Green ?
Cominciamo con il dire che sono due perché l'equazione di Klein-Gordon è reale: la scelta fatta, come si è visto, ha condotto a identificare la funzione di Green con il valore di aspettazione sul vuoto del prodotto T-ordinato dei campi $\phi(x)$ e $\phi^\dagger(y)$ nel senso dal passato verso il futuro; infatti la creazione della particella, operata da $\phi^\dagger(y)$ o dell'antiparticella, operata da $\phi(x)$, avviene sempre e comunque ad un tempo *precedente* a quello della sua annichilazione (operata da $\phi(x)$ e $\phi^\dagger(y)$, rispettivamente). Se avessimo fatto l'altra scelta, cioè Δ_F^*, saremmo giunti ad un'analoga conclusione ma con un ordinamento dal futuro verso il passato ...
Per finire, siccome evidentemente $\Delta_F(x)-\Delta_F^*(x)$ dovrà soddisfare l'equazione di Klein Gordon omogenea, possiamo chiederci quale sia il suo legame con le $\Delta^\pm(x)$.
Iniziamo osservando che

$$t>0: \quad \Delta_F(x) = -i\Delta^+(x) \quad\Leftrightarrow\quad (\Delta_F(x))^* = i\left(\Delta^+(x)\right)^* = -i\Delta^-(x) \tag{3.94}$$

$$t<0: \quad \Delta_F(x) = i\Delta^-(x) \quad\Leftrightarrow\quad (\Delta_F(x))^* = -i\left(\Delta^-(x)\right)^* = i\Delta^+(x) \tag{3.95}$$

e dunque, indipendentemente dal valore di t, risulta

$$\Delta_F(x)-\Delta_F^*(x) = i\left(-\Delta^+(x)+\Delta^-(x)\right) \;\Rightarrow\; -i(\Delta_F(x)-\Delta_F^*(x)) = \Delta^-(x)-\Delta^+(x) \tag{3.96}$$

[118]Cfr. pag 42 di *relativistic Quantum Fields* di J.D. Bjorkeen e S.D. Drell, edito da McGraw-Hill, 1965.

che corrisponde all'integrazione della funzione

$$\frac{i}{(2\pi)^4}\int d^4q\,\frac{e^{iqx}}{q^2-m^2}$$

sul cammino indicato in fig. 11.

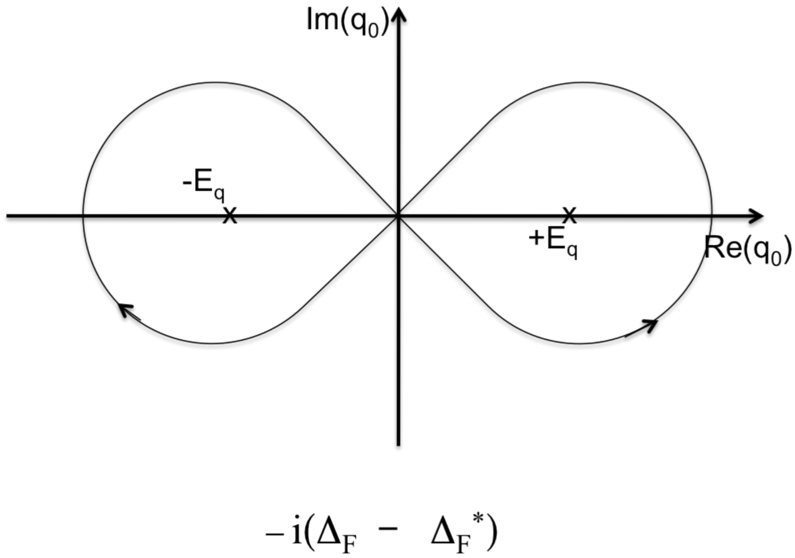


Figure 11: *Cammino di integrazione relativo alla funzione* $-i(\Delta_F - \Delta_F^*)$

Quanto, infine, all'azione delle simmetrie discrete C, P e T, si dimostra che risulta (cfr. Appendice)

$$C\,a(\vec{p})\,C^{-1} = e^{-i\eta_c}\,b(\vec{p}) \quad\longleftrightarrow\quad C\,a^\dagger(\vec{p})\,C^{-1} = e^{i\eta_c}\,b^\dagger(\vec{p}) \tag{3.97}$$

$$C\,b(\vec{p})\,C^{-1} = e^{i\eta_c}\,a(\vec{p}) \quad\longleftrightarrow\quad C\,b^\dagger(\vec{p})\,C^{-1} = e^{-i\eta_c}\,a^\dagger(\vec{p}) \tag{3.98}$$

$$C\,\phi(x)\,C^{-1} = e^{-i\eta_c}\,\phi^\dagger(x) \quad\longleftrightarrow\quad C\,\phi^\dagger(x)\,C^{-1} = e^{i\eta_c}\,\phi(x) \tag{3.99}$$

$$P\,a(\vec{p})\,P^{-1} = e^{-i\eta_P}\,a(-\vec{p}) \longleftrightarrow P\,a^\dagger(\vec{p})\,P^{-1} = e^{i\eta_P}\,a^\dagger(-\vec{p}) \tag{3.100}$$

$$P\,b(\vec{p})\,P^{-1} = e^{i\eta_P}\,b(-\vec{p}) \longleftrightarrow P\,b^\dagger(\vec{p})\,P^{-1} = e^{-i\eta_P}\,b^\dagger(-\vec{p}) \tag{3.101}$$

$$P\,\phi(x)\,P^{-1} = e^{-i\eta_P}\,\phi(Px) \longleftrightarrow P\,\phi^\dagger(x)\,P^{-1} = e^{i\eta_P}\,\phi^\dagger(Px) \tag{3.102}$$

$$e^{i\eta_P} = \pm 1 \tag{3.103}$$

$$T\,a(\vec{p})\,T^{-1} = e^{-i\eta_T}\,a(-\vec{p}) \;\longleftrightarrow\; T\,a^\dagger(\vec{p})\,T^{-1} = e^{i\eta_T}\,a^\dagger(-\vec{p}) \tag{3.104}$$

$$T\,b(\vec{p})\,T^{-1} = e^{i\eta_T}\,b(-\vec{p}) \;\longleftrightarrow\; T\,b^\dagger(\vec{p})\,T^{-1} = e^{-i\eta_T}\,b^\dagger(-\vec{p}) \tag{3.105}$$

$$T\,\phi(x)\,T^{-1} = e^{-i\eta_T}\,\phi(Tx) \;\longleftrightarrow\; T\,\phi^\dagger(x)\,T^{-1} = e^{i\eta_T}\,\phi^\dagger(Tx) \tag{3.106}$$

dove, se $x = (t, \vec{x})$, allora $Px \equiv (t, -\vec{x})$ e $Tx \equiv (-t, \vec{x})$.

Si osservi che la condizione $C^2 = I$, per come agisce la trasformazione C, non può dare condizioni sul valore della fase $e^{i\eta_c}$, mentre la condizione $P^2 = I$ implica che, quanto a $e^{i\eta_p}$, non possa essere che $e^{i\eta_p} = \pm 1$.
Quanto invece a T^2, evidentemente $T^2 = I$, dato che lo spin della particella è nullo e quindi è intero: essendo l'operatore T antiunitario, questa condizione, però, non può fornire condizioni di sorta sulla fase $e^{i\eta_T}$.

Un altro operatore, infine, di cui è interessante verificare la legge di trasformazione sotto le simmetrie C, P e T è senz'altro la quadricorrente conservata $J^\mu(x)$ associata all'invarianza di gauge di prima specie della lagrangiana (3.9), i.e. l'osservabile[119]

$$J^\mu(x) = i\left[-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\,\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^\dagger)}\,\phi^\dagger\right] = i\left[(\partial^\mu\phi)(x)\,\phi^\dagger(x) - (\partial^\mu\phi^\dagger)(x)\,\phi(x)\right] \tag{3.107}$$

Risulta (cfr. Appendice)

$$C\,J^\mu(x)\,C^{-1} = -J^\mu(x) \tag{3.108}$$
$$P\,J^\mu(x)\,P^{-1} = J_\mu(Px) \tag{3.109}$$
$$T\,J^\mu(x)\,T^{-1} = J_\mu(Tx) \tag{3.110}$$

[119]La quadricorrente (3.107) è un operatore autoaggiunto, dunque è un'osservabile, a differenza dei campi stessi che, ovviamente, come gli operatori di creazione e distruzione, non lo sono.

3.2 *Il campo vettoriale massivo*

Le equazioni di moto per i campi[120] classici e in generale complessi che descrivono particelle vettoriali (cioè di spin 1) sono[121] le seguenti

$$\begin{array}{c}(\Box + m^2)W^\mu = 0 = (\Box + m^2)W^{*\mu} \\ \partial_\mu W^\mu = 0 = \partial_\mu W^{*\mu}\end{array} \tag{3.114}$$

dove m è la loro massa, che *assumeremo per adesso diversa da zero.*

Una densità lagrangiana che, attraverso il principio di minima azione, determina le equazioni di moto (3.114) per il campo classico è la seguente

$$\mathcal{L} \; = \; \frac{1}{2}\, F^{\mu\nu} F^*_{\mu\nu} \; - \; m^2\, W^\mu W^*_\mu \tag{3.115}$$

dove

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu W^\nu - \partial^\nu W^\mu \tag{3.116}$$

Infatti, dalle equazioni di Eulero-Lagrange

$$\begin{array}{c}\partial_\mu \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu W_\nu)} - \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial W_\nu} = 0 \\ \partial_\mu \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu W^*_\nu)} - \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial W^*_\nu} = 0\end{array}$$

otteniamo, rispettivamente

$$\partial_\mu F^{*\mu\nu} + m^2\, W^{*\nu} = 0 \;\; \Rightarrow \;\; \Box W^{*\nu} - \partial^\nu(\partial_\mu W^{*\mu}) + m^2\, W^{*\nu} = 0 \tag{3.117}$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2\, W^\nu = 0 \;\; \Rightarrow \;\; \Box W^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu W^\mu) + m^2\, W^\nu = 0 \tag{3.118}$$

---

[120] Per un campo vettoriale, se (a, Λ) è l'elemento del gruppo di Poincaré tale che

$$(a, \Lambda) : \qquad x \to x' = a + \Lambda x \tag{3.111}$$

ecco che, in termini degli operatori unitari $U(a, \Lambda)$ che descrivono l'azione della trasformazione sopra citata sugli stati, come abbiamo visto per il campo scalare (cfr. (3.8), abbiamo che la trasformazione del campo vettoriale è tale che

$$U(a, \Lambda)\, W^\mu(x)\, U^{-1}(a, \Lambda) = (\Lambda^{-1})^\mu_{\cdot\,\nu}\, W^\nu(\Lambda x + a) \tag{3.112}$$

ovvero, equivalentemente

$$U^{-1}(a, \Lambda) W^\mu(x) U(a, \Lambda) = \Lambda^\mu_{\cdot\,\nu}\, W^\nu(\Lambda^{-1}(x - a)) \tag{3.113}$$

[121] Un campo quadrivettoriale come W^μ, dal punto di vista delle rotazioni, è la somma diretta di un campo vettoriale ($s = 1$) e di un campo scalare ($s = 0$). La condizione $\partial_\mu W^\mu = 0$ elimina la componente scalare e quindi lascia solo lo spin 1.

D'altronde, essendo $F^{\mu\nu}$ ovviamente antisimmetrico, è

$$\partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} = 0$$

per cui, usando l'espressione di sinistra dell'equazione del moto (3.118) se ne deduce che

$$\partial_\mu [m^2\, W^\mu] = 0 \Rightarrow \partial_\mu W^\mu = 0 \tag{3.119}$$

dove si è fatto uso del fatto che la massa del campo non è nulla.
Analogamente, partendo da $F^{*\mu\nu}$, si dimostra che anche la quadridivergenza di $W^{*\mu}$ è nulla, per cui, in definitiva, risultano così dimostrate le equazioni di moto (3.114) sia per W^μ che per $W^{*\mu}$.

La densità lagrangiana (3.115) è poi evidentemente invariante per trasformazioni di gauge di prima specie e la corrente conservata che, via il teorema di Noëther, consegue da questa invarianza può essere scritta nel modo seguente[122]

$$J^\mu(x) = i \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu W_\rho)}\, W_\rho - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu W^*_\rho)}\, W^*_\rho \right] \tag{3.120}$$

ovvero

$$\begin{aligned} J^\mu(x) &= i \left[F^{*\mu\rho} W_\rho - F^{\mu\rho} W^*_\rho \right] = i \left[(\partial^\mu W^{*\rho} - \partial^\rho W^{*\mu})\, W_\rho - (\partial^\mu W^\rho - \partial^\rho W^\mu)\, W^*_\rho \right] = \\ &= i \left[(\partial^\mu W^{*\rho})\, W_\rho - (\partial^\rho W^{*\mu})\, W_\rho - (\partial^\mu W^\rho)\, W^*_\rho + (\partial^\rho W^\mu)\, W^*_\rho \right] \end{aligned} \tag{3.121}$$

che, tenendo conto che $\partial_\rho W^\rho = 0$, si può riscrivere come

$$J^\mu(x) = i \left[(\partial^\mu W^{*\rho})\, W_\rho - (\partial^\mu W^\rho)\, W^*_\rho \right] - i\partial_\rho \left[W^{*\mu} W^\rho - W^\mu W^{*\rho} \right] \tag{3.122}$$

ma il termine

$$\hat{J}^\mu \equiv -i\partial_\rho \left[W^{*\mu} W^\rho - W^\mu W^{*\rho} \right] \tag{3.123}$$

- essendo la quantità in parentesi quadra antisimmetrica in μ e ρ, essa soddisfa separatamente l'equazione di continuità $\partial_\mu \hat{J}^\mu = 0$;
- il suo contributo all'integrale spaziale di $J^0(x)$ è nullo perché

  $$\hat{J}^0 \equiv -i\partial_\rho \left[W^{*0} W^\rho - W^0 W^{*\rho} \right] = -i\partial_k \left[W^{*0} W^k - W^0 W^{*k} \right]$$

  coincide con una divergenza nelle sole variabili spaziali.

[122] Questa definizione è formalmente opposta alla (1.18). Abbiamo già notato che il teorema di Noëther definisce la corrente conservata a meno di una costante moltiplicativa: in questo caso, come vedremo, è opportuno scegliere il segno contrario a quello usuale nella definizione di J^μ per coerenza con la metrica di Minkowski.

Per questo motivo si può assumere la seguente espressione della corrente conservata per il campo vettoriale di massa m

$$J^\mu = -i\left[(\partial^\mu W^\nu)\, W^*_\nu - (\partial^\mu W^*_\nu)\, W^\nu\right] \tag{3.124}$$

La quantizzazione dei campi W^μ e $W^{\dagger\mu}$, al solito, viene effettuata espandendoli in termini di operatori di creazione/distruzione, nel modo seguente

$$W^\mu(x) = \sum_{r=1}^{3}\int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\left[A(r,\vec{p})\,\epsilon^\mu(r,\vec{p})\,e^{-ipx} + B^\dagger(r,\vec{p})\,\epsilon^{*\mu}(r,\vec{p})\,e^{ipx}\right] \tag{3.125}$$

$$W^{\dagger\mu}(x) = \sum_{r=1}^{3}\int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\left[B(r,\vec{p})\,\epsilon^\mu(r,\vec{p})\,e^{-ipx} + A^\dagger(r,\vec{p})\,\epsilon^{*\mu}(r,\vec{p})\,e^{ipx}\right] \tag{3.126}$$

dove

- $A(r,\vec{p})$ annichila la particella di quadrimpulso $(E_p\,,\vec{p}) = (\sqrt{m^2+|\vec{p}|^2},\vec{p})$ e di stato di polarizzazione r;
- $A^\dagger(r,\vec{p})$ crea la particella di quadrimpulso $p \equiv (E_p\,,\vec{p})$ e polarizzazione r;
- $B(r,\vec{p})$ annichila l'antiparticella di quadrimpulso p e polarizzazione r;
- $B^\dagger(r,\vec{p})$ crea l'antiparticella di quadrimpulso p e polarizzazione r;

Questi operatori soddisfano le seguenti regole di commutazione (tutte le altre sono nulle ...)

$$\left[A(r,\vec{p}), A^\dagger(s,\vec{p'})\right] = \left[B(r,\vec{p}), B^\dagger(s,\vec{p'})\right] = 2\,E_p\,(2\pi)^3\;\delta_{rs}\,\delta^3(\vec{p}-\vec{p'}) \tag{3.127}$$

dove δ_{rs} è il simbolo di Kronecker.
Quanto allo stato di polarizzazione, esso è specificato dalle tre quantità[123] $\epsilon^\mu(r,\vec{p})$, per $r = 1,2,3$, le quali, affinché sia garantita la condizione di quadridivergenza nulla $\partial_\mu W^\mu = 0$, devono soddisfare il vincolo

$$\forall r: \quad p_\mu\,\epsilon^\mu(r,\vec{p}) = 0 \tag{3.128}$$

Sempre nel caso di una particella di massa $m \neq 0$, la scelta consueta è quella di iniziare definendo le polarizzazioni $\epsilon^\mu(r,\vec{0})$ nel sistema di riferimento dove la particella è ferma, ovvero dove essa ha quadrimpulso $\hat{p} \equiv (m,0,0,0)$ e quindi di estendere la definizione al caso generico, quando essa ha impulso $\vec{p}$, usando il

[123] Anche se possono averne l'apparenza, gli ϵ^μ, come vedremo fra breve, *non* sono propriamente dei quadrivettori.

boost che effettua la trasformazione $\mathcal{B}(\vec{p}) \cdot \hat{p} \equiv (E, \vec{p})$ senza ruotare gli assi, i.e. attraverso la matrice di Lorentz

$$\mathcal{B}(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \frac{E}{m} & \frac{p_x}{m} & \frac{p_y}{m} & \frac{p_y}{m} \\ \frac{p_x}{m} & 1 + \frac{p_x\, p_x}{m(E+m)} & \frac{p_x\, p_y}{m(E+m)} & \frac{p_x\, p_z}{m(E+m)} \\ \frac{p_y}{m} & \frac{p_y\, p_x}{m(E+m)} & 1 + \frac{p_y\, p_y}{m(E+m)} & \frac{p_y\, p_z}{m(E+m)} \\ \frac{p_z}{m} & \frac{p_z\, p_x}{m(E+m)} & \frac{p_z\, p_y}{m(E+m)} & 1 + \frac{p_z\, p_z}{m(E+m)} \end{pmatrix} \tag{3.129}$$

definendo

$$\epsilon^\mu(r, \vec{p}) \equiv \mathcal{B}(\vec{p})^\mu_{\cdot\,\nu}\, \epsilon^\nu(r, \vec{0}) \tag{3.130}$$

Nel riferimento di quiete, la polarizzazione, dovendo essere ortogonale al quadrimpulso (nella metrica di Minkowski), deve essere tale che

$$\epsilon^\mu(r, \vec{0}) = (0, \vec{\epsilon}(r))$$

dove gli $\vec{\epsilon}(r)$ sono tre versori indipendenti, individuati ciascuno dall'indice r.
Se indichiamo con $\vec{e}_1 = \vec{e}_x$, $\vec{e}_2 = \vec{e}_y$ e $\vec{e}_3 = \vec{e}_z$ i versori dei tre assi coordinati, allora una scelta possibile è semplicemente la seguente[124] (polarizzazioni lineari)

$$\vec{\epsilon}(r) \equiv \vec{e}_r \quad \Leftrightarrow \quad \epsilon^\mu(r, \vec{0}) = \delta^\mu_r$$

la quale conduce, secondo la regola sopra indicata, a funzioni $\epsilon^\mu(r, \vec{p})$ di polarizzazione reali e coincidenti semplicemente con le colonne della matrice $\mathcal{B}(\vec{p})$, ovvero risultano[125] essere espressi dalla relazione

$$\epsilon^\mu(r, \vec{p}) = \mathcal{B}(\vec{p})^\mu_{\cdot\,\nu}\; \epsilon^\nu(r, \vec{0}) = \mathcal{B}(\vec{p})^\mu_{\cdot\,r} = \left(\frac{p^r}{m} \;,\quad \delta^r_i + \frac{p^i\, p^r}{m(E+m)} \right) \tag{3.133}$$

dove p_r indica la componente $r-$esima del vettore $\vec{p}$ e δ_{ir} è il simbolo di Kronecker.
Le polarizzazioni lineari così definite soddisfano evidentemente la condizione

$$\epsilon^\mu(r, \vec{p}) = -\epsilon_\mu(r, -\vec{p}) \tag{3.134}$$

---

[124] Un'altra scelta possibile è, naturalmente, quella delle polarizzazioni circolari

$$\vec{\epsilon}(+) \equiv \frac{-1}{\sqrt{2}}\,(\vec{e}_x + i\vec{e}_y)\,; \qquad \vec{\epsilon}(0) \equiv \vec{e}_z; \qquad \vec{\epsilon}(-) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\vec{e}_x - i\vec{e}_y)\,; \tag{3.131}$$

[125] Si osservi che se indichiamo con $\vec{n}$ il versore dell'impulso spaziale della particella, essendo allora $p_r = m\gamma\beta n_r$, ne segue che

$$\epsilon^\mu(r, \vec{p}) = (\gamma\beta\, n_r \;,\quad \delta_{ir} + (\gamma - 1) n_r\, n_i) \tag{3.132}$$

dove abbiamo usato il fatto che $\frac{\beta^2\gamma^2}{\gamma+1} = \gamma - 1$.

Esse soddisfano inoltre la condizione di completezza[126] seguente

$$\sum_{r=1}^{3} \epsilon^\mu(r,\vec{p})\epsilon^{*\nu}(r,\vec{p}) = -\delta^{\mu\nu} + \frac{p^\mu p^\nu}{m^2} \tag{3.139}$$

insieme alla relazione di ortogonalità[127]

$$\epsilon^\mu(s,\vec{p})\ \epsilon^*_\mu(r,\vec{p}) = \delta_{sr} \equiv g_{sr} \tag{3.142}$$

dove abbiamo voluto rendere esplicito che la δ_{sr} di cui sopra indica l'elemento (sr) del tensore metrico di Minkowski.

Veniamo ora alla funzione d'onda $\psi^\mu(r,\vec{p};x)$ che, in rappresentazione delle coordinate, descrive lo stato di singola particella di impulso $\vec{p}$ e polarizzazione r

$$|r,\vec{p}> \equiv A^\dagger(r,\vec{p})|\Omega> \tag{3.143}$$

[126]Osserviamo che, dalla definizione, è

$$\epsilon^\mu(r,\vec{p}) = \mathcal{B}(\vec{p})^\mu_{\cdot\,\nu}\ \epsilon^\nu(r,\vec{0}) = \mathcal{B}(\vec{p})^\mu_{\cdot\,\nu}\delta^\nu_r = \mathcal{B}(\vec{p})^\mu_{\cdot\,r} = -\mathcal{B}(\vec{p})^{\mu\,r} \tag{3.135}$$

Dunque

$$\sum_{r=1}^{3} \epsilon^\mu(r,\vec{p})\epsilon^{*\nu}(r,\vec{p}) = -\sum_{r=1}^{3} \mathcal{B}(\vec{p})^\mu_{\cdot\,r}\,\mathcal{B}(\vec{p})^{\nu\,r} = -\mathcal{B}(\vec{p})^\mu_{\cdot\,\rho}\,\mathcal{B}(\vec{p})^{\nu\,\rho} + \mathcal{B}(\vec{p})^\mu_{\cdot\,0}\,\mathcal{B}(\vec{p})^{\nu\,0} \tag{3.136}$$

ma, per le ben note proprietà delle matrici di Lorentz, risulta

$$\mathcal{B}(\vec{p})^\mu_{\cdot\,\rho}\,\mathcal{B}(\vec{p})^{\nu\,\rho} = \mathcal{B}(\vec{p})^\mu_{\cdot\,\rho}\,\mathcal{B}(\vec{p})_\sigma^{\cdot\,\rho}\delta^{\sigma\nu} = \delta^\mu_\sigma\,\delta^{\sigma\nu} = \delta^{\mu\nu} \tag{3.137}$$

dunque, essendo

$$\mathcal{B}(\vec{p})^\mu_{\cdot\,0}\,\mathcal{B}(\vec{p})^{\nu\,0} = \frac{p^\mu}{m}\,\frac{p^\nu}{m} = \frac{p^\mu p^\nu}{m^2}$$

abbiamo infine la relazione di completezza cercata, i.e.

$$\sum_{r=1}^{3} \epsilon^\mu(r,\vec{p})\epsilon^{*\nu}(r,\vec{p}) = -\delta^{\mu\nu} + \frac{p^\mu p^\nu}{m^2} \tag{3.138}$$

[127]Infatti si ha

$$\epsilon^\mu(s,\vec{p})\ \epsilon^*_\mu(r,\vec{p}) = \Big(\mathcal{B}(p)\,\epsilon(s,\vec{0})\Big)^\mu \cdot \Big(\mathcal{B}(p)\,\epsilon(r,\vec{0})\Big)^*_\mu \tag{3.140}$$

e per il fatto che le matrici di Lorentz sono reali e le ben note proprietà del prodotto scalare fra quadrivettori, questa quantità è pari, in effetti, a

$$\epsilon^\mu(s,\vec{0})\ \epsilon^*_\mu(r,\vec{0}) = \delta^\mu_s\delta_{\mu r} = \delta_{sr} \tag{3.141}$$

visto come sono definite le polarizzazioni lineari nel sistema del CM.

essa[128] è data[129,130] da

$$\psi^\mu(r,\vec{p};x) = \epsilon^\mu(r,\vec{p})\, e^{-ipx} \equiv <\Omega|\, W^\mu(x)\, |r,\vec{p}> \qquad (3.149)$$

Coerentemente con l'espressione[131] della corrente conservata in virtù dell'invarianza di gauge di prima specie della Lagrangiana (3.115),

$$\begin{aligned} J^\mu &= -i\left[(\partial^\mu W^\nu)\, W_\nu^\dagger - (\partial^\mu W_\nu^\dagger)\, W^\nu\right] \;\Rightarrow\; \int d^3x\, J^0(x,t) = cost \\ &\Rightarrow\; -i\frac{\partial}{\partial t}\int d^3x\left[(\partial^0 W^\nu)\, W_\nu^\dagger - (\partial^0 W_\nu^\dagger)\, W^\nu\right] = 0 \qquad (3.150) \end{aligned}$$

la densità di particelle associata alla funzione d'onda (3.149), ovvero allo stato $|r,\vec{p}>$, vale $2E$, infatti, per la (3.142), risulta

$$\begin{aligned} \rho(x) = J^0(x) &= -i\left[(\partial^0\psi^\mu(r,\vec{p};x))\psi_\mu^*(r,\vec{p};x) - (\partial^0\psi^{*\mu}(r,\vec{p};x))\psi^\mu(r,\vec{p};x)\right] = \\ &= 2p^0 \equiv 2E \qquad (3.151) \end{aligned}$$

[128]Per lo stato $B^\dagger(r,\vec{p})|\Omega>$ occorre semplicemente scambiare W con il suo hermitiano coniugato $W^\dagger$.

[129]Chiaramente, in rappresentazione delle coordinate, la funzione d'onda dello stato $|r,\vec{p}>$ dovrà essere proporzionale a $\epsilon^\mu(r,\vec{p})\, e^{-ipx}$, visto che questa funzione, per definizione, descrive appunto uno stato di polarizzazione r e quadrimpulso p. Ovviamente la funzione d'onda può essere scalata per una costante complessa arbitraria, il cui modulo ne cambia la normalizzazione. La scelta fatta corrisponde, come dimostreremo con la (3.151), ad avere una densità pari a $2E$.

[130]Può essere interessante osservare che, posto

$$\psi^\mu(r,\vec{p};x) = \epsilon^\mu(r,\vec{p})\, e^{-ipx} \equiv <\Omega|\, W^\mu(x)\, |r,\vec{p}> \qquad (3.144)$$

allora, essendo

$$U(a,I)\, W^\mu(x)\, U^{-1}(a,I) = W^\mu(x+a) \quad \Rightarrow \quad U(x,I)\, W^\mu(0)\, U^{-1}(x,I) = W^\mu(x) \qquad (3.145)$$

ecco che risulta

$$\psi^\mu(r,\vec{p};x) = <\Omega|\, U(x,I)\, W^\mu(0)\, U^{-1}(x,I)\, |r,\vec{p}> \qquad (3.146)$$

ma $(U(a,I) = e^{iaP})$

$$<\Omega|U(a,I) = <\Omega|; \qquad U^{-1}(x,I)\, |r,\vec{p}> = e^{-ipx}\, |r,\vec{p}> \qquad (3.147)$$

per cui ne concludiamo che

$$\psi^\mu(r,\vec{p};x) = e^{-ipx}\; <\Omega|\, W^\mu(0)\, |r,\vec{p}> \qquad (3.148)$$

fattorizzando così la dipendenza spaziale da quella legata alla polarizzazione.

[131]Si osservi che la definizione di J^μ che usiamo per il campo vettoriale è opposta a quella usata nel caso del campo scalare. La ragione sta proprio nella normalizzazione delle polarizzazioni e nella scelta che abbiamo fatto riguardo al tensore metrico di coincidere con $-I$ sulle variabili spaziali.

Ed è ancora per lo stesso motivo che il prodotto scalare fra due stati di singola particella $|a>$ e $|b>$, rappresentati dalle funzioni d'onda $\psi^\mu_{(a)}(x)$ e $\psi^\mu_{(b)}(x)$ si deve scrivere[132]

$$< a|b >= -i \int d^3x \left[\left(\partial^0 \psi^\mu_{(b)}(\vec{x},t) \right) \psi^*_{(a)\mu}(\vec{x},t) - \left(\partial^0 \psi^{*\mu}_{(a)}(\vec{x},t) \right) \psi^\mu_{(b)}(\vec{x},t) \right] \quad (3.154)$$

Passiamo adesso a considerare la legge di trasformazione sotto il gruppo di Poincaré degli operatori di creazione e distruzione del campo vettoriale, allo scopo di determinare come queste trasformazioni agiscono sugli stati $|r,\vec{p}>$ di particella/antiparticella definiti attraverso la (3.143) o la sua equivalente per l'antiparticella.
Ricordiamo che il campo vettoriale gode della proprietà per cui

$$U(a,\Lambda)\, W^\mu(x)\, U^{-1}(a,\Lambda) = (\Lambda^{-1})^\mu_{.\nu}\, W^\nu(\Lambda x + a) \quad (3.155)$$

La presenza nella rappresentazione del campo delle funzioni che descrivono gli stati di polarizzazione

$$W^\mu(x) \;=\; \sum_{r=1}^{3} \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \left[A(r,\vec{p})\, \epsilon^\mu(r,\vec{p})\, e^{-ipx} \;+\; B^\dagger(r,\vec{p})\, \epsilon^{*\mu}(r,\vec{p})\, e^{ipx} \right] \quad (3.156)$$

richiede che, per stabilire la legge di trasformazione degli operatori di creazione e distruzione in modo coerente con la (3.155), si debbano conoscere preventivamente come gli $\epsilon^\mu(r,\vec{p})$ cambiano sotto la generica trasformazione $p \;\rightarrow\; \Lambda p$.
Ricordiamo che, secondo la definizione (3.133), risulta

$$\epsilon^\mu(s,\vec{p}) \equiv \mathcal{B}(\vec{p})^\mu_{.\nu}\; \epsilon^\nu(s,\vec{0}) \quad (3.157)$$

Questa definizione, però, *non* implica affatto che essi siano quadrivettori !
Per esplicitare le loro proprietà di trasformazione, iniziamo dimostrando che la

[132]Per gli autostati dell'impulso di cui sopra, si ha

$$< r,\vec{p}|s,\vec{q}>= -i \int d^3x \left[\left(\partial^0 \psi^\mu(s,\vec{q};x) \right) \psi^*_\mu(r,\vec{p};x) - \left(\partial^0 \psi^{*\mu}(r,\vec{p};x) \right) \psi^\mu(s,\vec{q};x) \right] \quad (3.152)$$

i.e., risulta

$$\begin{aligned} < r,\vec{p}|s,\vec{q}> \;&=\; -i \int d^3x \left[(\partial^0 e^{-iqx}) \epsilon^\mu(s,\vec{q})\, \epsilon^*_\mu(r,\vec{p})\, e^{ipx} - \epsilon^*_\mu(r,\vec{p})\, (\partial^0 e^{ipx}) e^{-iqx} \epsilon^\mu(s,\vec{q}) \right] = \\ &=\; i^2 \int d^3x\, (q^0 + p^0) e^{ix(p-q)}\, \epsilon^*_\mu(r,\vec{p})\, \epsilon^\mu(s,\vec{q}) = 2p^0\, \delta_{rs}\, (2\pi^3)\, \delta^3(\vec{p}-\vec{q}) \quad (3.153) \end{aligned}$$

coerentemente con le regole di commutazione ...

quantità $\Lambda \cdot \epsilon(s,\vec{p})$ è una combinazione lineare non banale (purtroppo) delle polarizzazioni $\epsilon(r,\vec{\Lambda p})$, ovvero che qualsiasi siano Λ e $\vec{p}$, risulta

$$\Lambda \cdot \epsilon(s,\vec{p}) = \sum_{r=1,3} M_{rs}\, \epsilon(r,\vec{\Lambda p}) \tag{3.158}$$

con M matrice opportuna, che adesso determineremo.
La (3.158) può essere riscritta equivalentemente usando la definizione (3.157), come segue

$$\Lambda \cdot \mathcal{B}(\vec{p}) \cdot \epsilon(s,\vec{0}) = \sum_{r=1,3} M_{rs}\, \mathcal{B}(\vec{\Lambda p}) \cdot \epsilon(r,\vec{0}) \tag{3.159}$$

e dunque essa è equivalente all'equazione

$$\mathcal{B}^{-1}(\vec{\Lambda p}) \cdot \Lambda \cdot \mathcal{B}(\vec{p}) \cdot \epsilon(s,\vec{0}) = \sum_{r=1,3} M_{rs}\, \epsilon(r,\vec{0}) \tag{3.160}$$

la quale si riferisce così solo alle polarizzazioni nel sistema del CM della particella. La matrice di Lorentz $\mathcal{B}^{-1}(\vec{\Lambda p}) \cdot \Lambda \cdot \mathcal{B}(\vec{p})$ è in effetti una rotazione, poiché trasforma $\hat{p}$ in se stesso: si tratta della *rotazione di Wigner* $\mathcal{R}(\Lambda,\vec{p})$ definita da

$$\mathcal{R}(\Lambda,\vec{p}) \equiv \mathcal{B}^{-1}(\vec{\Lambda p}) \cdot \Lambda \cdot \mathcal{B}(\vec{p}) \tag{3.161}$$

Sia dunque R_{js} la matrice ortogonale definita dalla rotazione di Wigner di cui sopra in tre dimensioni. Si ha

$$\mathcal{R}(\Lambda,\vec{p})^{0}_{\cdot\nu}\ \epsilon^{\nu}(s,\vec{0}) \;=\; 0 \tag{3.162}$$

$$\mathcal{R}(\Lambda,\vec{p})^{j}_{\cdot\nu}\ \epsilon^{\nu}(s,\vec{0}) \;=\; \mathcal{R}(\Lambda,\vec{p})^{j}_{\cdot\nu}\delta^{\nu}_{s} = \mathcal{R}(\Lambda,\vec{p})^{j}_{\cdot s} \equiv R_{js} \tag{3.163}$$

Ma $M_{rs}\, \epsilon^{\mu}(r,\vec{p})$ ha la componente temporale ovviamente nulla e la componente spaziale j-esima pari a M_{js}, per cui resta così dimostrato che vale la (3.158) con $M = R$, ovvero che

$$\Lambda \cdot \epsilon(s,\vec{p}) = R_{rs}\, \epsilon(r,\vec{\Lambda p}) \tag{3.164}$$

dove R la matrice di $O(3)$ individuata dalla rotazione di Wigner $\mathcal{R}(\Lambda,\vec{p})$ definita sopra. Partendo ora dalla (3.164), otteniamo che

$$\Lambda^{-1} \cdot \Lambda \cdot \epsilon(s,\vec{p}) \equiv \epsilon(s,\vec{p}) = R_{rs}\, \Lambda^{-1} \cdot \epsilon(r,\vec{\Lambda p}) \tag{3.165}$$

da, cui, ricordando che R è ortogonale, ovvero che $R^{-1} = R^{t}$, concludiamo altresì che

$$R_{ts}\, \epsilon(s,\vec{p}) = \Lambda^{-1} \cdot \epsilon(t,\vec{\Lambda p}) \;\;\Leftrightarrow\;\; R_{ts}\, \epsilon^{\mu}(s,\vec{p}) = (\Lambda^{-1})^{\mu}_{\cdot\nu}\epsilon^{\nu}(t,\vec{\Lambda p}) \tag{3.166}$$

Dato questo modo di trasformarsi dei vettori di polarizzazione, la legge di trasformazione degli operatori di creazione e distruzione, che garantisce la (3.155), risulta essere la seguente

$$U(a,\Lambda)\,A(s,\vec{p})\,U^{-1}(a,\Lambda) = e^{-ia\cdot\Lambda p}\,R_{rs}\,A(r,\vec{\Lambda p}) \tag{3.167}$$
$$U(a,\Lambda)\,A^\dagger(s,\vec{p})\,U^{-1}(a,\Lambda) = e^{ia\cdot\Lambda p}\,R^*_{rs}\,A^\dagger(r,\vec{\Lambda p}) \tag{3.168}$$

e lo stesso accade per gli operatori B e $B^\dagger$.
Risulta infatti ($U \equiv U(a,\Lambda)$...)

$$\begin{aligned} U(a,\Lambda)\,W^\mu(x)\,U^{-1}(a,\Lambda) &= \sum_{r=1}^{3}\int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\Big[U\,A(r,\vec{p})\,U^{-1}\,\epsilon^\mu(r,\vec{p})\,e^{-ipx} + \\ &\qquad U\,B^\dagger(r,\vec{p})\,U^{-1}\,\epsilon^{*\mu}(r,\vec{p})\,e^{ipx}\Big] = \\ &= \sum_{r,k}\int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\Big[e^{-ia\cdot\Lambda p}\,R_{kr}\,A(k,\vec{\Lambda p})\,\epsilon^\mu(r,\vec{p})\,e^{-ipx} + \\ &\qquad e^{ia\cdot\Lambda p}\,R^*_{kr}\,B^\dagger(k,\vec{\Lambda p})\,\epsilon^{*\mu}(r,\vec{p})\,e^{ipx}\Big] \end{aligned}$$

Ponendo $q = \Lambda p \Rightarrow p\cdot x = (\Lambda p)\cdot(\Lambda x) = q\cdot\Lambda x$, abbiamo allora

$$\begin{aligned} &U(a,\Lambda)\,W^\mu(x)\,U^{-1}(a,\Lambda) = \\ &= \sum_{r,k}\int \frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3}\Big[e^{-iq\cdot(a+\Lambda x)}\,R_{kr}\,A(k,\vec{q})\,\epsilon^\mu(r,\vec{p}) + \\ &\qquad e^{iq\cdot(a+\Lambda x)}\,R^*_{kr}\,B^\dagger(k,\vec{q})\,\epsilon^{*\mu}(r,\vec{p})\Big] \end{aligned} \tag{3.169}$$

ma, per la (3.166), ed essendo sia la R che i vettori di polarizzazione reali, risulta

$$\sum_r R_{kr}\,\epsilon^\mu(r,\vec{p}) = (\Lambda^{-1})^\mu_{\ .\nu}\;\epsilon^\nu(k,\vec{q}) \tag{3.170}$$
$$\sum_r R^*_{kr}\,\epsilon^{*\mu}(r,\vec{p}) = (\Lambda^{-1})^\mu_{\ .\nu}\;\epsilon^{*\nu}(k,\vec{q}) \tag{3.171}$$

per cui, sostituendo nella (3.169), otteniamo immediatamente la (3.155), che risulta così dimostrata.

Quanto infine all'azione delle simmetrie C, P e T, data la definizione (3.133) del vettore di polarizzazione per cui, come si è già detto, risulta

$$\epsilon_\mu(r,\vec{p}) = -\epsilon^\mu(r,-\vec{p}) = \epsilon^*_\mu(r,\vec{p}) \tag{3.172}$$

abbiamo

$$C\,A(s,\vec{p})\,C^{-1} = e^{-i\eta_C} B(s,\vec{p}) \quad \longleftrightarrow \quad C\,A^\dagger(s,\vec{p})\,C^{-1} = e^{i\eta_C} B^\dagger(s,\vec{p}) \tag{3.173}$$
$$C\,B(s,\vec{p})\,C^{-1} = e^{i\eta_C} A(s,\vec{p}) \quad \longleftrightarrow \quad C\,B^\dagger(s,\vec{p})\,C^{-1} = e^{-i\eta_C} A^\dagger(s,\vec{p}) \tag{3.174}$$
$$C\,W^\mu(x)\,C^{-1} = e^{-i\eta_C}\, W^{\dagger\mu}(x) \quad \longleftrightarrow \quad C\,W^{\dagger\mu}(x)\,C^{-1} = e^{i\eta_C}\, W^\mu(x) \tag{3.175}$$

$$P\,A(s,\vec{p})\,P^{-1} = -e^{-i\eta_P}\, A(s,-\vec{p}) \longleftrightarrow P\,A^\dagger(s,\vec{p})\,P^{-1} = -e^{i\eta_P}\, A^\dagger(s,-\vec{p}) \tag{3.176}$$
$$P\,B(s,\vec{p})\,P^{-1} = -e^{i\eta_P}\, B(s,-\vec{p}) \longleftrightarrow P\,B^\dagger(s,\vec{p})\,P^{-1} = -e^{-i\eta_P}\, B^\dagger(s,-\vec{p}) \tag{3.177}$$
$$P\,W^\mu(x)\,P^{-1} = e^{-i\eta_P}\, W_\mu(Px) \longleftrightarrow P\,W^{\dagger\mu}(x)\,P^{-1} = e^{i\eta_P}\, W^\dagger_\mu(Px) \tag{3.178}$$

$$T\,A(s,\vec{p})\,T^{-1} = -e^{-i\eta_T}\, A(s,-\vec{p}) \longleftrightarrow T\,A^\dagger(s,\vec{p})\,T^{-1} = -e^{i\eta_T}\, A^\dagger(s,-\vec{p}) \tag{3.179}$$
$$T\,B(s,\vec{p})\,T^{-1} = -e^{i\eta_T}\, B(s,-\vec{p}) \longleftrightarrow T\,B^\dagger(s,\vec{p})\,T^{-1} = -e^{-i\eta_T}\, B^\dagger(s,-\vec{p}) \tag{3.180}$$
$$T\,W^\mu(x)\,T^{-1} = e^{-i\eta_T}\, W_\mu(Tx) \longleftrightarrow T\,W^{\dagger\mu}(x)\,T^{-1} = e^{i\eta_T}\, W^\dagger_\mu(Tx) \tag{3.181}$$

dalle quali, per quanto riguarda la corrente (3.124)

$$J^\mu = -i\left[(\partial^\mu W^\nu)\, W^\dagger_\nu - (\partial^\mu W^\dagger_\nu)\, W^\nu\right] \tag{3.182}$$

ricaviamo di nuovo

$$C\,J^\mu(x)\,C^{-1} \;=\; -J^\mu(x) \tag{3.183}$$
$$P\,J^\mu(x)\,P^{-1} \;=\; J_\mu(Px) \tag{3.184}$$
$$T\,J^\mu(x)\,T^{-1} \;=\; J_\mu(Tx) \tag{3.185}$$

3.3 *Il campo elettromagnetico*

Consideriamo adesso un caso molto particolare di campo vettoriale cioè quello del campo elettromagnetico $A^\mu(x)$.
Ricordiamo che, classicamente, in assenza di cariche e correnti, il campo A^μ soddisfa la seguente equazione del moto

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} \equiv \Box A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) = 0 \tag{3.186}$$

la quale può essere dedotta dalla lagrangiana già usata nel caso massivo (3.115), ponendo $m = 0$, ovvero dalla lagrangiana[133,134]

$$\mathcal{L} \;=\; \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \tag{3.188}$$

dove $F^{\mu\nu}$ è il tensore di cui alla (3.116), i.e.

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \tag{3.189}$$

che, nel caso attuale, è proprio il consueto tensore del campo elettromagnetico

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \;=\; \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{3.190}$$

A differenza del caso massivo, dall'equazione di moto (3.186) non discende la condizione (3.119) di quadridivergenza nulla. Questa condizione deve essere imposta indipendentemente, usando il fatto che, fissato $F_{\mu\nu}$, cioè fissati i campi elettromagnetici $\vec{E}$ e $\vec{B}$, il potenziale A_μ è indeterminato a meno di una trasformazione di gauge

$$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \chi \tag{3.191}$$

dove $\chi = \chi(x)$ è una funzione scalare, a priori qualsiasi.
Questa arbitrarietà può essere usata per scegliere A_μ in modo che soddisfi la

---

[133]Rispetto al caso del campo vettoriale carico di massa m, la lagrangiana presenta adesso un fattore $\frac{1}{4}$ invece di $\frac{1}{2}$ perché adesso $\partial^\mu A^\nu$ compare quattro volte in essa, visto che compare sia in $F^{\mu\nu}$ che in $F_{\mu\nu}$ essendo il campo A^μ intrinsecamente reale.
Chiaramente il fattore moltiplicativo non ha comunque effetto sulle equazioni di moto, essendo esse omogenee nella lagrangiana: volendo scriverla correttamente normalizzata nel sistema c.g.s. elettrostatico, il fattore sarebbe in realtà $-\frac{1}{16\pi}$.

[134]Si noti che, nello scrivere la lagrangiana abbiamo usato il fatto che, proprio per il suo significato fisico in termini dei campi classici $\vec{E}$ e $\vec{B}$, $F^{\mu\nu}$ è reale, i.e.

$$F^{\mu\nu} = F^{*\mu\nu} \tag{3.187}$$

e dunque al campo quantizzato A^μ dovrà poi essere richiesto di essere autoaggiunto.

condizione (gauge) di Lorentz[135], i.e.

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \tag{3.192}$$

In questo modo, le equazioni di moto si semplificano e diventano

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} \equiv \Box A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) = 0 \Rightarrow \Box A^\nu = 0 \tag{3.193}$$

L'equazione

$$\Box A^\nu = 0 \tag{3.194}$$

ha soluzioni piane della forma

$$A^\mu = N\, \epsilon^\mu\, e^{-ikx} \tag{3.195}$$

dove $k_\mu k^\mu \equiv k^2 = 0$, N è un opportuno fattore di normalizzazione ed ϵ^μ descrive lo stato di polarizzazione.
La condizione di Lorentz, come abbiamo già visto nel caso massivo, implica che non esistano tutte le quattro polarizzazioni possibili, bensì solo quelle per cui

$$k_\mu\, \epsilon^\mu = 0 \tag{3.196}$$

Questo, ovviamente, riduce da quattro a tre le polarizzazioni[136] possibili.

Ma noi sappiamo che gli stati di polarizzazione indipendenti di un fotone con impulso $\vec{k}$ fissato sono solo due !
L'ulteriore riduzione avviene, come è noto, tenendo conto che la gauge di Lorentz non esaurisce i gradi di arbitrarietà che abbiamo su A^μ, infatti l'ulteriore trasformazione di gauge *ristretta*

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu\chi; \qquad \Box\chi = 0 \tag{3.197}$$

lascia inalterate sia la condizione di Lorentz che il tensore $F^{\mu\nu}$.
Quest'ultima libertà di gauge corrisponde, per le soluzioni piane di k^μ fissato, a traslare la polarizzazione nel modo seguente, dove λ è un coefficiente a priori arbitrario

$$\epsilon^\mu \rightarrow \epsilon^{'\mu} = \epsilon^\mu + \lambda k^\mu \tag{3.198}$$

[135] Come è ben noto dall'elettromagnetismo classico, basta che $\chi(x)$ sia scelto in modo che soddisfi l'equazione $\Box\chi = \partial^\mu A_\mu$: evidentemente il campo A'_μ che discende dalla (3.191) ha quadridivergenza nulla ed è equivalente ad A_μ per quanto riguarda la descrizione dei campi elettromagnetici.

[136] Nel caso massivo, la condizione sulla quadridivergenza eliminava il contributo scalare, lasciando solo quello di spin 1. Nel caso di massa nulla, un'affermazione simile perderebbe di significato perché, in questo caso, è lo spin come variabile a non essere più definito !
Per massa nulla, si può parlare, infatti, solo di stati di elicità definita (e questo è sempre uno solo ...). La condizione sulla quadridivergenza elimina uno stato di elicità che corrisponde a $\lambda = 0$.

Questa possibilità ha conseguenze importanti, infatti proviamo a considerare una soluzione con

$$k^\mu = (k^0, \vec{k}); \qquad \epsilon^\mu = (\epsilon^0, \vec{\epsilon}) \tag{3.199}$$

che soddisfa la condizione di Lorentz, i.e.

$$\epsilon \cdot k = 0 \tag{3.200}$$

La condizione di gauge (3.198) implica che si possa sommare ad ϵ^μ un qualunque multiplo di k^μ ed avere ancora una polarizzazione equivalente a quella di partenza. Essendo certamente $k^0 \neq 0$ dato che k è sul cono luce, possiamo allora, in ogni sistema di riferimento, fare sempre in modo che risulti

$$\epsilon^0 = 0 \Rightarrow \epsilon^\mu = (0, \vec{\epsilon}) \tag{3.201}$$

La condizione di Lorentz diviene allora

$$\vec{k} \cdot \vec{\epsilon} = 0 \tag{3.202}$$

ovvero implica che $\vec{\epsilon}$, a sua volta, sia trasverso all'impulso spaziale del fotone e dunque esistano solo due polarizzazioni indipendenti.
In questa gauge, evidentemente, $div\vec{A} = 0$ e, in assenza di cariche e correnti, il potenziale scalare è nullo, i.e. $A^0 \equiv 0$: è la *gauge di radiazione* detta anche *gauge di Coulomb*[137] o anche *gauge trasversa*.

[137] Il punto di partenza è sempre rappresentato, naturalmente, dalle equazioni di Maxwell per i campi elettrico $\vec{E}$ e magnetico $\vec{B}$, i.e.

$$div\vec{E} = 4\pi\rho \qquad rot\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \tag{3.203}$$

$$div\vec{B} = 0 \qquad rot\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \tag{3.204}$$

Dall'equazione sulla divergenza di $\vec{B}$ si conclude, come è noto, che possiamo trovare un potenziale vettore $\vec{A}$ tale che

$$\vec{B}(\vec{x}, t) \equiv rot\vec{A}(\vec{x}, t) \tag{3.205}$$

Questo potenziale, proprio perché è definito a meno di un termine irrotazionale, è indeterminato a meno della somma del gradiente di una funzione scalare $\Gamma(\vec{x}, t)$ qualsiasi, i.e. vale la libertà di gauge per cui

$$\vec{A}(\vec{x}, t) \to \vec{A}(\vec{x}, t) + \vec{\nabla}\Gamma(\vec{x}, t) \tag{3.206}$$

Venendo ora al campo elettrico $\vec{E}$, dall'equazione relativa alla sua rotazione abbiamo che

$$rot\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}rot\vec{A} \quad \Rightarrow \quad rot\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = 0 \tag{3.207}$$

Questa gauge non è covariante al cambiare del sistema di riferimento inerziale:

---

e dunque è possibile trovare una funzione $V(\vec{x},t)$ tale che

$$\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla} V \tag{3.208}$$

Sostituendo adesso nella equazione della divergenza del campo elettrico, si ha

$$4\pi\rho = div\vec{E} = div\left(-\vec{\nabla} V - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = -\nabla^2 V - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} div\vec{A} \tag{3.209}$$

ovvero otteniamo l'equazione

$$\nabla^2 V = -4\pi\rho - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} div\vec{A} \tag{3.210}$$

Analogamente, dall'equazione per la rotazione di $\vec{B}$, ricaviamo che

$$\frac{4\pi}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = rot\vec{B} \quad \Rightarrow \quad \frac{4\pi}{c}\vec{J} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\vec{\nabla} V - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) + rot\; rot\vec{A} \tag{3.211}$$

D'altronde, per un qualunque campo vettoriale $\vec{a}$ risulta che

$$rot\; rot\,\vec{a} = -\nabla^2\vec{a} + \vec{\nabla}\,(div\,\vec{a}) \tag{3.212}$$

e dunque abbiamo che

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{c}\vec{J} &= \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla} V + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla^2\vec{A} + \vec{\nabla}\left(div\vec{A}\right) \\ \Rightarrow \quad \nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla} V + \vec{\nabla}\left(div\vec{A}\right) \end{aligned} \tag{3.213}$$

Usiamo adesso la libertà di gauge (3.206) per imporre che $div\vec{A} = 0$.
Partendo infatti da un qualunque potenziale vettore $\vec{\hat{A}}$ che riproduca, attraverso la sua rotazione il campo magnetico $\vec{B}$ assegnato, possiamo sommargli il gradiente della funzione Γ che soddisfa l'equazione

$$\nabla^2\Gamma = -div\,\vec{\hat{A}} \tag{3.214}$$

E' immediato allora che il nuovo potenziale $\vec{A} = \vec{\hat{A}} + \vec{\nabla}\Gamma$ ha divergenza nulla, infatti

$$div\vec{A} = div\left(\hat{A} + \vec{\nabla}\Gamma\right) = div\hat{A} + \nabla^2\Gamma \equiv 0 \tag{3.215}$$

Questa gauge è appunto la *gauge* di Coulomb, detta anche gauge di *radiazione* perché particolarmente utile per descrivere la radiazione elettromagnetica ovvero i campi elettromagnetici in assenza di cariche e correnti.
In questa gauge, essendo $div\vec{A} = 0$, i potenziali soddisfano le equazioni

$$\nabla^2 V = -4\pi\rho \tag{3.216}$$

$$\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla} V \tag{3.217}$$

lo risulta unicamente a meno di una trasformazione di gauge *ristretta* !

Il potenziale scalare appare propagarsi in modo istantaneo, cioè a velocità infinita, mentre questo non accade per il potenziale vettore che, in questa gauge, soddisfa l'equazione delle onde con un termine di sorgente che è $-\frac{4\pi}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}V$.
Data anche questa differenza di comportamento, nessuna meraviglia che la gauge di Coulomb non sia covariante per trasformazioni di Lorentz !
Comunque, riguardo alla propagazione istantanea del potenziale scalare, sia chiaro che essa non prefigura alcuna inconsistenza con la Relatività Ristretta perché, in effetti, ciò che determina il moto delle cariche sono i campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$ e non il quadripotenziale e questi campi sono evidentemente invarianti rispetto alla gauge !

Concludiamo infine con una osservazione circa il significato della sorgente del potenziale vettore (nella gauge di Coulomb). Abbiamo visto che

$$\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}V \tag{3.218}$$

Ricordiamo adesso che, come qualunque campo vettoriale, anche la corrente $\vec{J}$ può essere decomposta in modo univoco nella somma di una parte irrotazionale $\vec{J}_L$ e una parte a divergenza nulla $\vec{J}_T$

$$\vec{J} = \vec{J}_L + \vec{J}_T \qquad con \quad rot\vec{J}_L = 0 \quad e \quad div\vec{J}_T = 0 \tag{3.219}$$

Il potenziale $\vec{A}$ nella gauge scelta ha divergenza nulla per costruzione e dunque la sua sorgente di cui alla (3.218) deve essere la parte a divergenza nulla della corrente $\vec{J}$, infatti

$$\begin{aligned} &div\left(-\frac{4\pi}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}V\right) = -\frac{4\pi}{c}div\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2 V = -\frac{4\pi}{c}div\vec{J} - \frac{4\pi}{c}\frac{\partial}{\partial t}\rho = \\ &= -\frac{4\pi}{c}\left(div\vec{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t}\right) = 0 \end{aligned} \tag{3.220}$$

Essa può essere espressa in termini della sola corrente $\vec{J}$, infatti se partiamo dall'identità

$$rot(rot\vec{J}) = \vec{\nabla}(div\vec{J}) - \nabla^2\vec{J} \Rightarrow \nabla^2(\vec{J}_L + \vec{J}_T) = \vec{\nabla}(div\vec{J}_L) - rot(rot\vec{J}_T) \tag{3.221}$$

essendo, come ben noto, la funzione di Green del laplaciano data da $-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}$, i.e.

$$\nabla_x^2\left(-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}\right) = \delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \tag{3.222}$$

ecco che, per quanto detto sopra circa l'indipendenza di $\vec{J}_L$ e $\vec{J}_T$, risulta

$$\nabla^2\vec{J}_L = \vec{\nabla}(div\vec{J}_L) \equiv \vec{\nabla}(div\vec{J}) \Rightarrow \vec{J}_L(\vec{x},t) = -\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\int d^3y\frac{div\vec{J}(\vec{y},t)}{|\vec{x}-\vec{y}|} \tag{3.223}$$

$$\nabla^2\vec{J}_T = -rot(rot\vec{J}_T) \equiv -rot(rot\vec{J}) \Rightarrow \vec{J}_T(\vec{x},t) = \frac{1}{4\pi}rot\,rot\int d^3y\frac{\vec{J}(\vec{y},t)}{|\vec{x}-\vec{y}|} \tag{3.224}$$

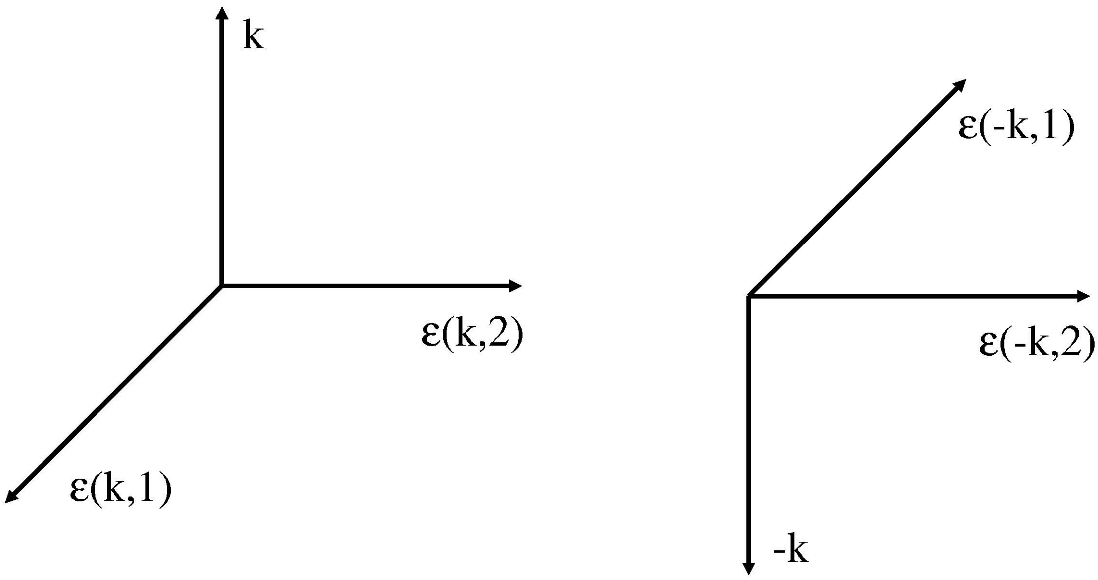


Figure 12: *Polarizzazioni lineari del fotone e sua direzione di propagazione*

Per un'onda che viaggia nella direzione $\vec{k}$ dell'asse z, possiamo scegliere

$$\begin{aligned} \vec{\epsilon}_z(1) &= (1,0,0) \quad (3.225) \\ \vec{\epsilon}_z(2) &= (0,1,0) \quad (3.226) \end{aligned}$$

e questo corrisponde a scegliere polarizzazioni lineari e reali, per cui, evidentemente risulta

$$\vec{\epsilon}_z(j)^* = \vec{\epsilon}_z(j), \quad j = 1,2 \tag{3.227}$$

Per ipotesi, i versori $\vec{\epsilon}_z(1)$, $\vec{\epsilon}_z(2)$ e $\vec{k}/|\vec{k}|$ formano una terna destrorsa, rispettivamente come gli assi cartesiani x, y, z: seguendo la convenzione usata da Bjorken e Drell[138] assumeremo che sia

$$\begin{aligned} \vec{\epsilon}_{-z}(1) &= -\vec{\epsilon}_z(1) \quad (3.228) \\ \vec{\epsilon}_{-z}(2) &= \vec{\epsilon}_z(2) \quad (3.229) \end{aligned}$$

Un'altra scelta equivalente è quella di usare polarizzazioni circolari, i.e., sempre per un fotone che viaggia lungo l'asse z

$$\vec{\epsilon}_z(+) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\vec{\epsilon}_z(1) - i\,\vec{\epsilon}_z(2)\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1,i,0) \quad elicita' \;\lambda = +1 \tag{3.230}$$

$$\vec{\epsilon}_z(-) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{\epsilon}_z(1) - i\,\vec{\epsilon}_z(2)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-i,0) \quad elicita' \;\lambda = -1 \tag{3.231}$$

[138]J.D. Bjorken, S.D. Drell: *Relativistic Quantum Fields*, McGraw-Hill 1965

e in questo caso, risulta evidentemente che

$$\vec{\epsilon}_z(\pm)^* = -\vec{\epsilon}_z(\mp) \tag{3.232}$$

Sempre nel caso di polarizzazioni circolari, date le (3.228) e (3.229), risulta altresì

$$\vec{\epsilon}_{-z}(+) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{\epsilon}_z(1) - i\vec{\epsilon}_z(2)\right) = \vec{\epsilon}_z(-) \tag{3.233}$$

$$\vec{\epsilon}_{-z}(-) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\vec{\epsilon}_z(1) - i\vec{\epsilon}_z(2)\right) = \vec{\epsilon}_z(+) \tag{3.234}$$

i.e.

$$\vec{\epsilon}_{-z}(\pm) = \vec{\epsilon}_z(\mp) \tag{3.235}$$

Fin qui si è sempre assunto che l'impulso sia diretto come l'asse z, nel suo verso oppure in verso opposto.
Vediamo ora che succede nel caso generico in cui abbiamo

$$k^\mu = (k, \vec{k}) \tag{3.236}$$

Posto che sia

$$\vec{k} = k\,(sin\theta\, cos\phi,\ sin\theta\, sin\phi,\ cos\theta) \tag{3.237}$$

allora iniziamo definendo la matrice di rotazione seguente:

$$R_{\vec{k}} = R_z(-\phi)\, R_y(-\theta)\, R_z^{-1}(-\phi) \equiv e^{-i\phi L_3}\, e^{-i\theta L_2}\, e^{i\phi L_3} \tag{3.238}$$

dove gli L_j sono i consueti generatori delle rotazioni in tre dimensioni, i.e. le matrici

$$(L_j)_{kl} = -i\,\epsilon_{jkl} \tag{3.239}$$

Questa rotazione gode della proprietà per cui[139]

$$R_{\vec{k}}\,(0,0,1) = (sin\theta\, cos\phi,\ sin\theta\, sin\phi,\ cos\theta) \Rightarrow R_{\vec{k}}\,(0,0,k) = \vec{k} \tag{3.244}$$

[139]Ricordiamo, per prima cosa, che una generica rotazione di riferimento R in tre dimensioni può essere sempre scritta come $R = e^{i\,\vec{\alpha}\cdot\vec{L}}$ dove $\vec{\alpha}/|\vec{\alpha}|$ è l'asse di rotazione (lasciato invariato dalla stessa ...) e $|\vec{\alpha}|$ è l'ampiezza della rotazione stessa (in senso antiorario, intorno all'asse di cui sopra): la rotazione (3.238) risulta essere una rotazione di $-\theta$ intorno all'asse $\vec{n} = R_z(-\phi)\vec{n}_0$, dove $\vec{n}_0 \equiv (0,1,0)$.
Per dimostarlo, partiamo dal fatto che, in generale, risulta che $R\,e^{i\vec{\alpha}\cdot\vec{L}}\,R^{-1} = e^{i(R\vec{\alpha})\cdot\vec{L}}$, ovvero la trasformazione in questione sulla generica rotazione $e^{i\vec{\alpha}\cdot\vec{L}}$ non altera l'ampiezza della rotazione ma solo l'asse intorno cui essa avviene che, invece di essere individuato dall'originale $\vec{\alpha}$, è individuato da $R\vec{\alpha}$.

Poniamo dunque, per definizione[140]

$$\vec{\epsilon}(s,\vec{k}) \equiv R_{\vec{k}}\;\vec{\epsilon}_z(s) \quad \Rightarrow \quad \epsilon^\mu(s,\vec{k}) \equiv (0,\vec{\epsilon}(s,\vec{k})) \tag{3.245}$$

Essendo R reale, ne segue in particolare che, per polarizzazioni circolari, risulta (si ricordi che le componenti delle polarizzazioni sono comunque solo spaziali...)

$$\vec{\epsilon}_z(\pm)^* = -\vec{\epsilon}_z(\mp) \quad \Rightarrow \quad \epsilon^*_\mu(\lambda,\vec{k}) = -\epsilon_\mu(-\lambda,\vec{k}) = \epsilon^\mu(-\lambda,\vec{k}) \tag{3.246}$$

$$\vec{\epsilon}_z(\pm) = \vec{\epsilon}_{-z}(\mp) \quad \Rightarrow \quad \epsilon^\mu(\lambda,\vec{k}) = \epsilon^\mu(-\lambda,-\vec{k}) = -\epsilon_\mu(-\lambda,-\vec{k}) \tag{3.247}$$

Riguardo allo sviluppo del campo elettromagnetico in termini di operatori di creazione e distruzione, questo è dato[141] da ($E_p \equiv |\vec{p}|$)

$$A^\mu(x) \;=\; \sum_{s=1}^{2}\int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\left[a(s,\vec{p})\,\epsilon^\mu(s,\vec{p})\,e^{-ipx} + a^\dagger(s,\vec{p})\,\epsilon^{*\mu}(s,\vec{p})\,e^{ipx}\right]$$

Essendo nel nostro caso

$$R_y(-\theta) \;=\; e^{-i\theta\,\vec{n}_0\cdot\vec{L}} \tag{3.240}$$

$$R_z(-\phi) \;\equiv\; e^{-i\phi\,L_3} = \begin{pmatrix} cos\phi & -\,sin\phi & 0 \\ sin\phi & cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.241}$$

è evidente che $R_z(-\phi)\vec{n}_0 = (-sin\phi, cos\phi, 0) \equiv \vec{n}$ è l'effettivo asse intorno a cui avviene la rotazione (3.238) e dunque che $R_z(-\phi)\,R_y(-\theta)\,R_z^{-1}(-\phi)$ descrive una rotazione di $-\theta$ intorno all'asse $\vec{n}$ che, su basi semplicemente geometriche, manda evidentemente il versore $(0,0,1)$ in $\vec{k}$.

Verifichiamolo adesso direttamente. Si ha infatti

$$\begin{aligned} R_z(-\phi)\,R_y(-\theta)\,R_z(\phi)\;(0,0,k) \;&=\; R_z(-\phi)\,R_y(-\theta)\;(0,0,k) = R_z(-\phi)\,(k\,sin\theta, 0, k\,cos\theta) = \\ &=\; k(sin\theta\,cos\phi, sin\theta\,sin\phi, cos\theta) \end{aligned}$$

che è quanto volevamo dimostrare. In forma esplicita, la matrice di rotazione in questione è data da

$$R_{\vec{k}} = \begin{pmatrix} sin^2\phi + cos^2\phi\;cos\theta & sin\phi\;cos\phi(cos\theta - 1) & sin\theta\;cos\phi \\ sin\phi\;cos\phi(cos\theta - 1) & cos^2\phi + sin^2\phi\;cos\theta & sin\theta\;sin\phi \\ -sin\theta\;cos\phi & -\,sin\theta\;sin\phi & cos\theta \end{pmatrix} \tag{3.242}$$

Per concludere, ricordiamo infine che

$$\left(e^{i\phi\,\vec{n}\cdot\vec{L}}\right)_{jk} = cos\phi\,\delta_{jk} + sin\phi\,\epsilon_{jkm}n_m + (1 - cos\phi)n_j n_k \tag{3.243}$$

[140]Ne segue, allora, per esempio, che la convenzione sopracitata di Bjorken e Drell (3.228) e (3.229) corrisponde, semplicemente, ad individuare il vettore $(0,0,-k)$ rispetto al vettore $(0,0,k)$ attraverso gli angoli di Eulero $\theta = \pi$, $\phi = 0$ ...

[141]cfr. J.D. Bjorkeen, S.D. Drell: *Relativistic Quantum Fields*, McGraw-Hill 1965, pag.74
Si faccia attenzione che, come vedremo fra breve, l'espressione (3.248) non conduce ad una legge di trasformazione del campo A^μ di tipo quadrivettoriale, come potrebbe apparentemente sembrare !

$$= \sum_{\lambda=\pm 1} \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \left[a(\lambda,\vec{p})\, \epsilon^\mu(\lambda,\vec{p})\, e^{-ipx} + a^\dagger(\lambda,\vec{p})\, \epsilon^{*\mu}(\lambda,\vec{p})\, e^{ipx} \right] \quad (3.248)$$

dove la somma è fatta solo sui due stati di polarizzazione fisici e $\epsilon^\mu(\lambda,\vec{p})$ descrive appunto lo stato[142] di polarizzazione del fotone generato dall'operatore di creazione $a^\dagger(\lambda,\vec{p})$, quando esso viene applicato al vuoto.
Si osservi che, per come è stato definito, il campo $A^\mu(x)$ risulta certamente autoaggiunto[143] !

Quanto poi all'algebra del campo, essa è definita attraverso le seguenti uniche regole di commutazione non banali

$$[a(s,\vec{p})\,,a^\dagger(r,\vec{q})] = 2E_p\,(2\pi)^3\,\delta(\vec{q}-\vec{p})\,\delta_{sr} \quad (3.254)$$

[142]Infatti la funzione d'onda del fotone individuato dallo stato $a^\dagger(\vec{p},\lambda)\,|\Omega>$ è data, per le ragioni già considerate per esempio nel caso del campo scalare, da

$$\begin{aligned} \psi^\mu_{p,\lambda}(x) &= <\Omega|\, A^\mu(x)\, a^\dagger(\vec{p},\lambda)\,|\Omega>= \\ &= \sum_{\lambda'} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3\, 2E_q} <\Omega|\, \left[a(\lambda',\vec{q})\, \epsilon^\mu(\lambda',\vec{q})\, e^{-iqx} + a^\dagger(\lambda',\vec{q})\, \epsilon^{*\mu}(\lambda',\vec{q})\, e^{iqx} \right]\, a^\dagger(\lambda,\vec{p})\,|\Omega>= \\ &= \sum_{\lambda'} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3\, 2E_q}\, \epsilon^\mu(\lambda',\vec{q})\; e^{-iqx}\; (2\pi)^3\, \delta_{\lambda\lambda'}\, \delta(\vec{q}-\vec{p})\, 2E_q \;=\; \epsilon^\mu(\lambda,\vec{p})\; e^{-ipx} \end{aligned} \quad (3.249)$$

[143]Essendo il campo A^μ autoaggiunto, la lagrangiana che ne descrive la dinamica non può essere invariante per trasformazioni di gauge di prima specie e dunque non può esistere una corrente legata ad una carica conservata ... che, del resto, il fotone non possiede.
Questo però non significa che non sia possibile associare alla funzione d'onda (3.249) una corrente di probabilità conservata dalla dinamica, che continueremo a chiamare $J^\mu(x)$, la cui componente temporale $J^0(x) \equiv \rho(x)$ fornisca la densità di fotoni per unità di volume associata alla funzione d'onda di cui sopra. Come nel caso massivo, risulta

$$J^\mu(x) = -i\,[(\partial^\mu\psi^\nu)\psi^*_\nu - (\partial^\mu\psi^*_\nu)\psi^\nu] \quad (3.250)$$

Questa corrente è conservata e gauge-invariante. Per la funzione d'onda (3.249) abbiamo

$$J^\mu(x) = -i\,[(-i)p^\mu\, \epsilon^\nu(\lambda,\vec{q})\, \epsilon^*_\nu(\lambda,\vec{q}) - i\, p^\mu\, \epsilon^*_\nu(\lambda,\vec{q})\, \epsilon^\nu(\lambda,\vec{q})] \quad (3.251)$$

e usando un risultato che dimostreremo fra breve, secondo cui

$$\epsilon^\nu(r,\vec{q})\, \epsilon^*_\nu(s,\vec{q}) = \delta_{rs} \quad (3.252)$$

ne segue che

$$J^\mu(x) = 2\,p^\mu \quad \to \quad J^0(x) \equiv \rho(x) = 2E \quad (3.253)$$

ovvero che anche questi stati rappresentano $2E$ particelle (fotoni) per unità di volume.

E veniamo adesso alla determinazione delle proprietà di trasformazione del campo $A^\mu(x)$ sotto il gruppo di Poincaré.
E' evidente, a questo riguardo, come sia fondamentale determinare per prima cosa le proprietà di trasformazione delle polarizzazioni ϵ^μ sotto il gruppo di Lorentz.

Procediamo per questo in modo strettamente simile a quanto fatto nel caso massivo e iniziamo fissando arbitrariamente un quadrimpulso "canonico" del fotone $\hat{k}$ così fatto

$$\hat{k}^\mu \equiv (\hat{k}, 0, 0, \hat{k}) \tag{3.255}$$

che, come vedremo, giocherà il ruolo del quadrimpulso $\hat{p} = (m, 0, 0, 0)$ per le particelle provviste di massa.
Come si è detto, per questo quadrimpulso $\hat{k}$, possiamo scegliere le due seguenti polarizzazioni indipendenti

$$\epsilon^\mu(+, \hat{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, -i, 0); \qquad \epsilon^\mu(-, \hat{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -i, 0) \tag{3.256}$$

E' immediato verificare che le polarizzazioni che noi abbiamo già definito nel caso di impulso spaziale di modulo qualsiasi k, *ma* comunque diretto lungo l'asse z si possono ottenere anche attraverso la legge di trasformazione

$$\epsilon^\mu(\pm, k) = \mathcal{B}(k)^\mu_{\cdot\nu}\, \epsilon^\nu(\pm, \hat{k}) \tag{3.257}$$

dove $\mathcal{B}(k)$ è il boost lungo l'asse z che trasforma il quadrivettore $\hat{k}^\mu = (\hat{k}, 0, 0, \hat{k})$ in $k^\mu = (k, 0, 0, k)$. Essendo infatti le componenti di $\epsilon^\mu(\pm, \hat{k})$ trasverse rispetto all'asse z, evidentemente questo boost non è in grado di modificarle, per cui, in accordo con la (3.257), risulta come deve essere che

$$\epsilon^\mu(\pm, k) = \epsilon^\mu(\pm, \hat{k}) \tag{3.258}$$

Nel caso in cui $\vec{k}$ non sia diretto lungo l'asse z, abbiamo poi stabilito che

$$\epsilon^\mu(\pm, \vec{k}) \equiv R(\vec{k})\, \epsilon^\mu(\pm, k) = R(\vec{k})\, \mathcal{B}(k)\, \epsilon^\mu(\pm, \hat{k}) \equiv L(\vec{k})\ \epsilon^\mu(\pm, \hat{k}) \tag{3.259}$$

dove $R(\vec{k})$ è definita dalla (3.242) e la matrice di Lorentz $L(\vec{k})$, funzione del quadrivettore $k = (|\vec{k}|, \vec{k})$, è definita quindi come

$$L(\vec{k}) \equiv R(\vec{k})\, \mathcal{B}(|\vec{k}|) \tag{3.260}$$

e dunque è evidentemente tale anche che

$$L(\vec{k})^\mu_{\cdot\nu} \hat{k}^\nu = \left(R(\vec{k})\, \mathcal{B}(|\vec{k}|)\right)^\mu_{\cdot\nu} \hat{k}^\nu = k^\mu \tag{3.261}$$

Si osservi adesso che le polarizzazioni $\epsilon^\mu(\pm, \vec{k})$, qualunque sia il quadrimpulso del fotone, hanno comunque sempre parte temporale nulla (oltre, naturalmente ad essere tali che $k_\mu \epsilon^\mu = 0$), sinonimo, questo, del fatto di operare nella gauge di Coulomb. Inoltre, per le ben note proprietà delle trasformazioni di Lorentz, risulta evidentemente che

$$\begin{aligned}\epsilon^\mu(r,\vec{k})\,\epsilon^*_\mu(s,\vec{k}) &= \left(L(\vec{k})^\mu_{\cdot\nu}\,\epsilon^\nu(r,\hat{k})\right)\left(L(\vec{k})_\mu^{\cdot\tau}\,\epsilon^*_\tau(r,\hat{k})\right) = \\ &= \epsilon^\nu(r,\hat{k})\,\epsilon^*_\nu(s,\hat{k}) = \delta_{rs}\end{aligned} \tag{3.262}$$

dove l'ultima uguaglianza consegue direttamente dalla definizione delle polarizzazioni nel sistema dove il quadrimpulso è proprio $k^\mu = \hat{k}(1,0,0,1)$ in cui esse sono ortogonali e space-like.
Osserviamo adesso che, data la (3.248), le componenti del campo A^μ sono direttamente legate a quelle della polarizzazione ϵ^μ, per cui, mancando in quest'ultima la componente temporale, ne segue che $A^0 \equiv 0$, e questo chiaramente pone un problema riguardo al modo di trasformarsi di A^μ sotto il gruppo di Lorentz !
Cerchiamo dunque di capire meglio questo aspetto della questione.
Supponiamo per questo di voler determinare la quantità $\Lambda\cdot\epsilon(\pm,\vec{k})$: abbiamo che

$$\Lambda\cdot\epsilon(\pm,\vec{k}) = \Lambda\cdot L(\vec{k})\cdot\epsilon(\pm,\hat{k}) = L(\vec{\Lambda k})\cdot L^{-1}(\vec{\Lambda k})\cdot\Lambda\cdot L(\vec{k})\cdot\epsilon(\pm,\hat{k}) \tag{3.263}$$

ma

$$L^{-1}(\vec{\Lambda k})\cdot\Lambda\cdot L(\vec{k})\cdot\hat{k} = \hat{k} \tag{3.264}$$

e dunque la matrice di Lorentz

$$\mathcal{P}(\Lambda,\vec{k}) \equiv L^{-1}(\vec{\Lambda k})\cdot\Lambda\cdot L(\vec{k}) \tag{3.265}$$

appartiene al piccolo gruppo del quadrivettore $\hat{k}$: si tratta dell'esatto analogo per la massa nulla della rotazione di Wigner, discussa nel caso del campo W^μ.
Sostituendo nella (3.263), ricaviamo

$$\Lambda\cdot\epsilon(\pm,\vec{k}) = L(\vec{\Lambda k})\cdot\mathcal{P}(\Lambda,\vec{k})\cdot\epsilon(\pm,\hat{k}) \tag{3.266}$$

la quale mostra come, in ultima analisi, per conoscere $\Lambda\cdot\epsilon(\pm,\vec{k})$ sia fondamentale esplicitare l'azione di $\mathcal{P}(\Lambda,\vec{k})$ su $\epsilon(\pm,\hat{k})$.
Siccome, come si è detto, $\mathcal{P}(\Lambda,\vec{k})$ appartiene al piccolo gruppo di $\hat{k}$, iniziamo con lo studiare questo sottogruppo del gruppo di Lorentz.
Si può dimostrare che esso è un gruppo di Lie a tre parametri i cui generatori, in termini dei consueti generatori del gruppo di Lorentz, sono i seguenti

$$X \equiv J_1 + K_2; \qquad Y \equiv J_2 - K_1; \qquad J_3 \tag{3.267}$$

e l'algebra di Lie del gruppo, di conseguenza, è definita dai commutatori[144]

$$[X, Y] = 0; \qquad [J_3, X] = i\, Y; \qquad [J_3, Y] = -i\, X \tag{3.271}$$

Come si vede, il piccolo gruppo di $\hat{k}$ è isomorfo al gruppo euclideo in due dimensioni $E(2)$, fatto dalle trasformazioni rigide del piano in sé (due traslazioni indipendenti e una rotazione ...).
Esplicitamente abbiamo

$$X = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad X^2 = - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad X^3 = 0 \tag{3.272}$$

per cui risulta che, per qualunque numero reale α, è

$$e^{i\alpha X} = I + i\alpha\, X - \frac{\alpha^2}{2}\, X^2 = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\alpha^2}{2} & 0 & -\alpha & -\frac{\alpha^2}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & 1 & \alpha \\ \frac{\alpha^2}{2} & 0 & -\alpha & 1 - \frac{\alpha^2}{2} \end{pmatrix} \tag{3.273}$$

Analogamente abbiamo

$$Y = i \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad Y^2 = - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad Y^3 = 0 \tag{3.274}$$

da cui ne segue che

$$e^{i\beta Y} = I + i\beta\, Y - \frac{\beta^2}{2}\, Y^2 = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\beta^2}{2} & \beta & 0 & -\frac{\beta^2}{2} \\ \beta & 1 & 0 & -\beta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\beta^2}{2} & \beta & 0 & 1 - \frac{\beta^2}{2} \end{pmatrix} \tag{3.275}$$

Ed infine risulta

$$J_3 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad e^{i\phi J_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos\phi & sin\phi & 0 \\ 0 & -sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.276}$$

[144]Infatti abbiamo

$$\begin{aligned} [X, Y] &= [J_1 + K_2,\, J_2 - K_1] = [J_1,\, J_2] - [K_2,\, K_1] = i\, J_3 - iJ_3 = 0 && (3.268) \\ [J_3,\, X] &= [J_3,\, J_1 + K_2] = i\, J_2 - iK_1 = i\, Y && (3.269) \\ [J_3,\, Y] &= [J_3,\, J_2 - K_1] = -i\, J_1 - iK_2 = -i\, X && (3.270) \end{aligned}$$

Il generico elemento del piccolo gruppo del quadrivettore $\hat{k}$ può dunque essere espresso sempre nella forma seguente[145]

$$\mathcal{P}(\alpha,\beta,\phi) = e^{i(\alpha X+\beta Y)}\, e^{i\phi J_3} \tag{3.283}$$

e, per ipotesi, esso lascia invariante il quadrivettore $\hat{k}$, come del resto è immediato provare direttamente dalle (3.273), (3.275) e (3.276) .
Nella (3.266), però, $\mathcal{P}(\Lambda,\vec{k})$ agisce sulla polarizzazione e non su $\hat{k}$!
Quale ne è l'effetto ? La novità rispetto al caso massivo, come vedremo fra breve, è che lo spazio vettoriale costruito con le polarizzazioni $\epsilon(\pm,\hat{k})$ non è stabile sotto le trasformazioni $\mathcal{P}(\alpha,\beta,\phi)$ del piccolo gruppo di $\hat{k}^\mu$.
A questo proposito, iniziamo osservando che dalla (3.273) ricaviamo, in generale, il seguente risultato

$$e^{i\alpha X}\, \epsilon^\mu(\pm,\hat{k}) = \epsilon^\mu(\pm,\hat{k}) + \frac{i\alpha}{\sqrt{2}}\,(1,0,0,1) = \epsilon^\mu(\pm,\hat{k}) + \frac{i\alpha}{\sqrt{2}\hat{k}}\,\hat{k}^\mu \tag{3.284}$$

e così pure, dalla (3.275), otteniamo che

$$e^{i\beta Y}\, \epsilon^\mu(\pm,\hat{k}) = \epsilon^\mu(\pm,\hat{k}) \mp \frac{\beta}{\sqrt{2}\hat{k}}\,\hat{k}^\mu \tag{3.285}$$

[145]Iniziamo osservando che, siccome X ed Y commutano tra loro, il termine $e^{i(\alpha X+\beta Y)}$ nella (3.283) non richiede particolari commenti. Quanto alla posizione della rotazione, si ricordi che $\vec{J}$ e $\vec{K}$ sono operatori vettoriali, per cui

$$R^{-1}\, J_l\, R = R_{lm}\, J_m; \qquad R^{-1}\, K_l\, R = R_{lm}\, K_m \tag{3.277}$$

e dunque, nel caso della rotazione $R = R(\phi) \equiv e^{i\phi J_3}$, abbiamo che

$$R^{-1}\, X\, R = X\, cos\phi + Y\, sin\phi; \qquad R^{-1}\, Y\, R = Y\, cos\phi - X\, sin\phi \tag{3.278}$$

D'altronde evidentemente risulta

$$e^{i(\alpha X+\beta Y)}\, R = R\, R^{-1}\, e^{i(\alpha X+\beta Y)}\, R \tag{3.279}$$

ma

$$R^{-1}\, e^{i(\alpha X+\beta Y)}\, R = e^{iR^{-1}(\alpha X+\beta Y)R} \tag{3.280}$$

mentre

$$\begin{aligned} R^{-1}(\alpha X+\beta Y)R &= \alpha(X\, cos\phi + Y\, sin\phi) + \beta(Y\, cos\phi - X\, sin\phi) = \\ &= X(\alpha\, cos\phi - \beta\, sin\phi) + Y(\beta\, cos\phi + \alpha\, sin\phi) \equiv \alpha_R\, X + \beta_R\, Y \end{aligned} \tag{3.281}$$

per cui possiamo concludere infine che vale comunque l'identità

$$e^{i(\alpha X+\beta Y)}\, R = R\, e^{i(\alpha_R X+\beta_R Y)} \tag{3.282}$$

per cui, ponendo

$$\frac{\alpha + i\beta}{\sqrt{2}\hat{k}} \equiv \rho\, e^{i\xi} \tag{3.286}$$

si ha

$$\begin{aligned} e^{i(\alpha X+\beta Y)}\, \epsilon^\mu(\pm,\hat{k}) &= \epsilon^\mu(\pm,\hat{k}) + i\frac{\alpha \pm i\beta}{\sqrt{2}\hat{k}}\, \hat{k}^\mu = \\ &= \epsilon^\mu(\pm,\hat{k}) + i\,\rho\, e^{\pm i\xi}\, \hat{k}^\mu \end{aligned} \tag{3.287}$$

mentre, evidentemente, risulta[146]

$$e^{i\phi J_3}\, \epsilon^\mu(\pm,\hat{k}) = e^{\pm i\phi}\, \epsilon^\mu(\pm,\hat{k}) \tag{3.290}$$

per cui si ha

$$\begin{aligned} \Big(\mathcal{P}(\alpha,\beta,\phi)\, \epsilon(\pm,\hat{k})\Big)^\mu &\equiv \Big(e^{i(\alpha X+\beta Y)}\, e^{i\phi J_3}\, \epsilon(\pm,\hat{k})\Big)^\mu = e^{\pm i\phi}\Big(e^{i(\alpha X+\beta Y)}\, \epsilon(\pm,\hat{k})\Big)^\mu = \\ &= e^{\pm i\phi}\left[\epsilon^\mu(\pm,\hat{k}) + i\rho\, e^{\pm i\xi}\, \hat{k}^\mu\right] \end{aligned} \tag{3.291}$$

Se poniamo allora

$$L^{-1}(\vec{\Lambda k})\, \Lambda\, L(\vec{k}) \equiv \mathcal{P}(\Lambda,\vec{k}) \equiv \mathcal{P}(\alpha,\beta,\phi) \tag{3.292}$$

dove α, β, ϕ saranno, evidentemente, funzioni opportune di Λ e k^μ, ecco che potremo concludere che

$$\begin{aligned} \Lambda\, \epsilon(\lambda,\vec{k}) &= L(\vec{\Lambda k})\, \mathcal{P}(\alpha,\beta,\phi)\, \epsilon(\lambda,\hat{k}) = \\ &= e^{i\lambda\phi}\left[\epsilon(\lambda,\vec{\Lambda k}) + i\,\rho\, e^{i\lambda\xi}(\Lambda k)\right] \end{aligned} \tag{3.293}$$

Come si vede, dunque, sotto l'azione di una trasformazione del gruppo di Lorentz, le polarizzazioni che, in un sistema di riferimento assegnato, abbiamo definito nella gauge di Coulomb acquistano, in generale, un termine proporzionale a k^μ, essendo ρ e ξ funzioni opportune di Λ e $\vec{k}$.

---

[146] La (3.287) e la (3.290) definiscono in ciascuno degli spazi lineari bidimensionali $\left\{\epsilon(+,\hat{k}),\hat{k}\right\}$ e $\left\{\epsilon(-,\hat{k}),\hat{k}\right\}$ una rappresentazione fedele del piccolo gruppo di $\hat{k}$.
E' del tutto evidente che entrambe le rappresentazioni sono irriducibili e quanto ai generatori X, Y, J_3, posto per comodità di notazione $\eta \equiv \frac{1}{\sqrt{2}\hat{k}}$, risulta:

$$\left\{\epsilon(+,\hat{k}),\hat{k}\right\} \;:\; X = \eta\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};\; Y = i\,\eta\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};\; J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.288}$$

$$\left\{\epsilon(-,\hat{k}),\hat{k}\right\} \;:\; X = \eta\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};\; Y = -i\,\eta\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};\; J_3 = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.289}$$

per cui le due rappresentazioni sono palesemente entrambe non unitarie.

Questo fatto è ineliminabile dal punto di vista algebrico ma, come vedremo fra breve, è senza conseguenze osservabili, data proprio l'arbitrarietà di gauge ristretta che abbiamo quanto al campo A^μ.
Ma procediamo con ordine.
Definiamo la legge di trasformazione degli operatori di creazione e distruzione associati al campo elettromagnetico, sotto l'azione della rappresentazione unitaria[147] del gruppo di Poincaré $U(a,\Lambda)$ definita nello spazio di Hilbert dei vettori di stato, nel modo seguente

$$U(a,\Lambda)\, a(\lambda,\vec{k})\, U^{-1}(a,\Lambda) = e^{-ia\cdot\Lambda k} a(\lambda,\vec{\Lambda k})\, e^{-i\lambda\phi} \tag{3.294}$$
$$U(a,\Lambda)\, a^\dagger(\lambda,\vec{k})\, U^{-1}(a,\Lambda) = e^{ia\cdot\Lambda k} a^\dagger(\lambda,\vec{\Lambda k})\, e^{i\lambda\phi} \tag{3.295}$$

dove ϕ è la fase definita dalla trasformazione

$$\mathcal{P}(\alpha,\beta,\phi) \equiv \mathcal{P}(\Lambda,\vec{k}) = L^{-1}(\vec{\Lambda k})\,\Lambda\, L(\vec{k}) \equiv e^{i(\alpha X+\beta Y)}\, e^{i\phi J_3} \tag{3.296}$$

Abbiamo allora che, posto per semplicità di notazione $U \equiv U(a,\Lambda)$, da quanto sopra risulta

$$\begin{aligned} U \quad A^\mu(x) \quad U^{-1} &= \sum_{\lambda=\pm1} \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \left[U\, a(\lambda,\vec{p})\, U^{-1}\, \epsilon^\mu(\lambda,\vec{p})\, e^{-ipx} + h.c.\right] = \\ &= \sum_{\lambda=\pm1} \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \left[a(\lambda,\vec{\Lambda p})\, e^{-ia\cdot\Lambda p}\, e^{-i\lambda\phi}\, \epsilon^\mu(\lambda,\vec{p})\, e^{-ipx} + h.c.\right] = \\ &= \sum_{\lambda=\pm1} \int \frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3} \left[a(\lambda,\vec{q})\, e^{-iaq}\, e^{-i\lambda\phi}\, \epsilon^\mu(\lambda,\vec{p})\, e^{-iq\cdot\Lambda x} + h.c.\right] \end{aligned} \tag{3.297}$$

dove, al solito, si è posto $q = \Lambda p$.
Riprendendo ora la (3.293)

$$\Lambda\, \epsilon(\lambda,\vec{k}) = e^{i\lambda\phi}\left(\epsilon(\lambda,\vec{\Lambda k}) + i\rho\, e^{i\lambda\xi}\cdot(\Lambda k)\right) \tag{3.298}$$

e moltiplicando per $e^{-i\lambda\phi}\,\Lambda^{-1}$ ambo i membri dell'equazione, si ha

$$e^{-i\lambda\phi}\,\epsilon(\lambda,\vec{p}) = \Lambda^{-1}\epsilon(\lambda,\vec{\Lambda p}) + i\rho\, e^{i\lambda\xi}\cdot p \tag{3.299}$$

[147]Anche nel caso di massa nulla, il piccolo gruppo è non abeliano, come nel caso massivo. La novità è che adesso esso è anche non-compatto e dunque non possiede rappresentazioni unitarie fedeli (isomorfismi) di dimensioni finita.
Le uniche rappresentazioni unitarie di dimensione finita che esistono mandano il sottogruppo generato da X ed Y nell'identità e quindi sono rappresentazioni del sottogruppo (compatto) $U(1)$ generato da J_3, e dunque, se irriducibili, sono unidimensionali.
Quanto ai quadrivettori di polarizzazione $\epsilon(\pm)$, gli elementi del piccolo gruppo agiscono su di essi mescolando ciascuno di loro con k^μ, per cui la rappresentazione del piccolo gruppo così indotta è definita necessariamente in uno spazio bidimensionale fatto da $\epsilon(+)$ o $\epsilon(-)$, ciascuno insieme a k.
Questa, in ultima analisi, è la ragione della impossibilità di mantenersi nella gauge di Coulomb.

Sostituendo allora nella (3.297), otteniamo

$$U\,A^\mu(x)\,U^{-1} = \sum_{\lambda=\pm1}\int \frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3}\left[a(\lambda,\vec{q})\,e^{-iaq}\,e^{-i\lambda\phi}\,\epsilon^\mu(\lambda,\vec{p})\,e^{-iq\cdot\Lambda x} + h.c.\right] =$$

$$= \sum_{\lambda=\pm1}\int \frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3}\left[a(\lambda,\vec{q})\,e^{-iaq}\,e^{-iq\cdot\Lambda x}\left((\Lambda^{-1})^\mu_{.\nu}\epsilon^\nu(\lambda,\vec{q}) + i\rho e^{i\lambda\xi}(\Lambda^{-1}q)^\mu\right) + h.c.\right] =$$

$$= (\Lambda^{-1})^\mu_{.\nu}\sum_{\lambda=\pm1}\int \frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3}\left[a(\lambda,\vec{q})\,e^{-iaq}\,e^{-iq\cdot\Lambda x}\epsilon^\nu(\lambda,\vec{q}) + h.c.\right] +$$

$$+ \sum_{\lambda=\pm1}\int \frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3}\left[a(\lambda,\vec{q})\,e^{-iaq}\,e^{-ip\cdot x}\rho e^{i\lambda\xi}\,i\,p^\mu + h.c.\right]$$

Evidentemente, quanto al primo addendo nell'espressione precedente, risulta

$$(\Lambda^{-1})^\mu_{.\nu}\sum_{\lambda=\pm1}\int \frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3}\left[a(\lambda,\vec{q})\,e^{-iaq}\,e^{-iq\cdot\Lambda x}\epsilon^\nu(\lambda,\vec{q}) + h.c.\right] \equiv$$
$$(\Lambda^{-1})^\mu_{.\nu}\,A^\nu(a+\Lambda x) \tag{3.300}$$

mentre, circa il secondo, esso può essere evidentemente espresso come

$$(\Lambda^{-1})^\mu_{.\nu}\sum_{\lambda=\pm1}\int \frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3}\left[a(\lambda,\vec{q})\,e^{-iaq}\,e^{-iq\cdot\Lambda x}\rho e^{i\lambda\xi}\,i\,q^\mu + h.c.\right] \tag{3.301}$$

Definiamo ora la funzione seguente

$$\Phi(x) \;\equiv\; \sum_{\lambda=\pm1}\int \frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3}\left[a(\vec{q},\lambda)\,e^{-iqx}\;\rho\,e^{i\lambda\xi} + h.c.\right] \tag{3.302}$$

dove ρ e ξ funzioni opportune di Λ e $\vec{q}$.
Dalla definizione è immediato che il campo Φ soddisfa l'equazione di Klein-Gordon a massa nulla e che la quantità (3.301) può essere espressa come

$$(\Lambda^{-1})^\mu_{.\nu}\sum_{\lambda=\pm1}\int \frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3}\left[a(\lambda,\vec{q})\,e^{-iq(a+\Lambda x)}\rho e^{i\lambda\xi}\,i\,q^\mu + h.c.\right] =$$
$$= -(\Lambda^{-1})^\mu_{.\nu}\,\frac{\partial}{\partial(\Lambda x)_\nu}\,\Phi(a+\Lambda x) \tag{3.303}$$

per cui abbiamno alla fine che

$$U(a,\Lambda)\,A^\mu(x)\,U^{-1}(a,\Lambda) = (\Lambda^{-1})^\mu_{.\nu}\left(A^\nu(a+\Lambda x) - \frac{\partial}{\partial(\Lambda x)_\nu}\,\Phi(a+\Lambda x)\right) \tag{3.304}$$

E' solo in questo senso[148], cioè a meno di una trasformazione di gauge (a sua volta intimamente legata alle rappresentazioni del piccolo gruppo di $\hat{k}$ negli spazi

[148]Precisiamo che la conclusione (3.304) è quella algebricamente corretta, ma proprio perché il termine aggiuntivo è un termine di gauge, la sua omissione non produce conseguenze osservabili.

$\left\{\epsilon(\pm,\hat{k}),\hat{k}\right\}$), che possiamo concludere che il campo elettromagnetico, definito attraverso la decomposizione spettrale (3.248) e le polarizzazioni (3.259), si trasforma come un campo quadrivettoriale, i.e. che risulta

$$U(a,\Lambda)A^\mu(x)\,U^{-1}(a,\Lambda) = (\Lambda^{-1})^\mu_{.\nu}\,A^\nu(a+\Lambda x) \tag{3.305}$$

Venendo infine all'azione delle simmetrie discrete C, P e T, usando stati di polarizzazione circolari, risulta che

$$C\,a(\lambda,\vec{k})\,C^{-1} = -a(\lambda,\vec{k}) \qquad \longleftrightarrow \quad C\,a^\dagger(\lambda,\vec{k})\,C^{-1} = -a^\dagger(\lambda,\vec{k}) \tag{3.306}$$
$$C\,A_\mu(x)\,C^{-1} = -A_\mu(x) \tag{3.307}$$

$$P\,a(\lambda,\vec{k})\,P^{-1} = -a(-\lambda,-\vec{k}) \;\longleftrightarrow P\,a^\dagger(\lambda,\vec{k})\,P^{-1} = -a^\dagger(-\lambda,-\vec{k}) \tag{3.308}$$
$$P\,A^\mu(x)\,P^{-1} = A_\mu(Px) \tag{3.309}$$

$$T\,a(\lambda,\vec{k})\,T^{-1} = a(\lambda,-\vec{k}) \qquad \longleftrightarrow \; T\,a^\dagger(\lambda,\vec{k})\,T^{-1} = a^\dagger(\lambda,-\vec{k}) \tag{3.310}$$
$$T\,A^\mu(x)\,T^{-1} = A_\mu(Tx) \tag{3.311}$$

Osserviamo adesso in particolare che, nel momento in cui richiediamo che

$$C\,a(\lambda,\vec{p})C^{-1} = -a(\lambda,\vec{p}); \qquad C\,a^\dagger(\lambda,\vec{p})C^{-1} = -a^\dagger(\lambda,\vec{p}) \tag{3.312}$$

stiamo dicendo che fotone e antifotone sono la stessa particella, cosa del resto ovvia visto che il campo è autoaggiunto ...
Come si vede, però, il fatto che particella e antiparticella in questo caso coincidano, non implica che C non abbia alcun effetto sullo stato di fotone, infatti dalla (3.312) segue immediatamente che

$$C\,|\,\vec{k},s> = -\,|\,\vec{k},s> \tag{3.313}$$

ovvero che su uno stato di n fotoni, risulta

$$C\,|\,n\;\;fotoni> = (-1)^n\,|\,n\;\;fotoni> \tag{3.314}$$

e poiché l'elettrodinamica (QED) è invariante sotto C, da questo segue in particolare che non possono esistere elementi di matrice, dovuti all'interazione elettromagnetica, fra stati iniziali C-dispari e stati finali fatti solo da un numero di fotoni pari, oppure fra stati iniziali C-pari e stati finali fatti solo da un numero di fotoni dispari: è il teorema di Furry[149].

[149]W.H. Furry: *A symmetry theorem in the positron theory*, Phys. Rev. 51, 125 (1937)

3.4 Il campo di Dirac libero

L'evoluzione del campo di Dirac[150] libero è retta dalla lagrangiana[151]

$$\mathcal{L} \;=\; \overline{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi \tag{3.333}$$

[150]Le matrici γ^μ sono matrici 4×4 che anticommutano fra di loro, risultando (si tratta della loro definizione costitutiva !)

$$\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\} = 2\,\delta^{\mu\nu} \tag{3.315}$$

Per quanto riguarda la loro forma esplicita, salvo diverso avviso, useremo la rappresentazione di Dirac-Pauli, i.e.

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \tag{3.316}$$

essendo $\vec{\sigma} \equiv (\sigma_i)$ le usuali matrici di Pauli, i.e.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3.317}$$

Le γ^μ sono quindi tutte reali, eccetto la γ^2 che è immaginaria pura.
Accanto alle matrici γ^μ, si definisce altresì la matrice reale γ_5 nel modo seguente

$$\gamma_5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad (\gamma_5)^2 = I \tag{3.318}$$

Essa anticommuta con tutte le γ^μ.
La matrice γ^0 (come pure la γ_5 ...) è hermitiana, mentre le γ^i sono antihermitiane (essendo le matrici di Pauli, invece, ovviamente hermitiane...).
Da questo e dalla (3.315) segue immediatamente che

$$\gamma^0\,(\gamma^\mu)^\dagger\,\gamma^0 = \gamma^\mu \tag{3.319}$$

Venendo adesso all'azione del gruppo di Poincaré sul campo di Dirac, se (a,Λ) è il generico elemento del gruppo, tale che

$$(a,\Lambda): \qquad x \to x' = a + \Lambda x \tag{3.320}$$

in termini delle trasformazioni unitarie $U(a,\Lambda)$ che costituiscono la rappresentazione del gruppo di Poincaré definita sullo spazio degli stati del sistema, risulta

$$U(a,\Lambda)\,\psi(x)\,U^{-1}(a,\Lambda) \;=\; S^{-1}(\Lambda)\,\psi(\Lambda x + a) \tag{3.321}$$

ovvero, equivalentemente, che

$$U^{-1}(a,\Lambda)\,\psi(x)\,U(a,\Lambda) = \psi'(x) = S(\Lambda)\,\psi(\Lambda^{-1}(x-a)) \tag{3.322}$$

La rappresentazione $S(\Lambda)$ del gruppo di Lorentz (ortocrono proprio) è la rappresentazione *spinoriale* ed è definita nel modo seguente

$$S(\Lambda) = e^{\frac{i}{4}\,\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}} \quad con \quad \sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2i}\,[\gamma^\mu,\,\gamma^\nu] \tag{3.323}$$

Sotto questa rappresentazione, le γ^μ si trasformano come un quadrivettore, ovvero risulta che

$$S^{-1}(\Lambda)\,\gamma^\mu\,S(\Lambda) = \Lambda^\mu_{\cdot\,\nu}\,\gamma^\nu \tag{3.324}$$

Dalla definizione (3.323) della rappresentazione $S(\Lambda)$ discende direttamente che

- siccome $(\sigma^{\mu\nu})^\dagger = -\frac{1}{2i}\,(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)^\dagger = \frac{1}{2i}[\gamma^{\mu\dagger}, \gamma^{\nu\dagger}]$ e $\gamma^0\gamma^{\mu\dagger}\gamma^0 = \gamma^\mu$, si ha

$$\gamma^0\, S(\Lambda)^\dagger\, \gamma^0 = S(\Lambda^{-1}) = S^{-1}(\Lambda) \tag{3.325}$$

  per cui la rappresentazione $S(\Lambda)$ non è unitaria (né potrebbe esserlo trattandosi di una rappresentazione non banale di dimensione finita di un gruppo non compatto ...).

  Dalla (3.325) segue in particolare che, prendendo l'hermitiana coniugata della (3.321) e ricordando che $(\gamma^0)^2 = I$, quanto al campo $\bar\psi$, risulta

$$\begin{aligned} & U(a,\Lambda)\,\psi^\dagger(x)\,U^{-1}(a,\Lambda) = \psi^\dagger(\Lambda x + a)\,S^\dagger(\Lambda^{-1}) \Rightarrow \\ \Rightarrow\quad & U(a,\Lambda)\,\psi^\dagger(x)\,U^{-1}(a,\Lambda)\gamma^0 = \psi^\dagger(\Lambda x + a)\,\gamma^0\gamma^0 S^\dagger(\Lambda^{-1})\gamma^0 \Rightarrow \\ \Rightarrow\quad & U(a,\Lambda)\,\bar\psi(x)\,U^{-1}(a,\Lambda) = \bar\psi(\Lambda x + a)\,S(\Lambda) \end{aligned} \tag{3.326}$$

- la generica rotazione $R(\vec\theta) = e^{i\theta\,\vec n\cdot\vec J}$, definita dal vettore di rotazione $\vec\theta \equiv \theta\,\vec n$, viene rappresentata da

$$S(\vec\theta) = e^{\frac{i}{2}\,\vec\theta\cdot\vec\Sigma} = cos(\theta/2)\,I + i(\vec n\cdot\vec\Sigma)\,sin(\theta/2) \tag{3.327}$$

  dove si è posto

$$\vec\Sigma \equiv \begin{pmatrix} \vec\sigma & 0 \\ 0 & \vec\sigma \end{pmatrix} \tag{3.328}$$

- il generico boost $\mathcal{B}(\vec v) = e^{i\eta\,\vec n\cdot\vec K}$, definito dalla velocità $v\,\vec n$, risulta rappresentato da

$$S(\vec v) = e^{-\frac{1}{2}\,\eta\,\vec n\cdot\vec\alpha} = ch(\eta/2)\,I - (\vec n\cdot\vec\alpha)\,sh(\eta/2) \tag{3.329}$$

  dove abbiamo definito la rapidità al solito modo, i.e. $\eta \equiv th^{-1}(v)$ e si è posto

$$\vec\alpha \equiv \begin{pmatrix} 0 & \vec\sigma \\ \vec\sigma & 0 \end{pmatrix} \tag{3.330}$$

- siccome la matrice γ_5 anticommuta con tutte del γ^μ, essa commuta con $\sigma^{\mu\nu}$ ed è quindi scalare sotto $S(\Lambda)$, ovvero risulta

$$S^{-1}(\Lambda)\,\gamma_5\,S(\Lambda) = \gamma_5$$

  Si osservi che, poiché γ_5 non è multipla dell'identità, questo implica che $S(\Lambda)$ *non* è una rappresentazione irriducibile del gruppo di Lorentz !

[151]Al posto della lagrangiana (3.333) viene talvolta usata la forma hermitiana seguente

$$\mathcal{L} \;=\; \frac{i}{2}[\overline{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu\psi) \;-\; (\partial_\mu\overline{\psi})\gamma^\mu\psi] \;-\; m\,\overline{\psi}\psi \tag{3.331}$$

da cui si ricava appunto l'equazione[152] di Dirac per ψ e per $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0$, così espressa

$$(i\,\gamma^\mu \partial_\mu \,-\, m)\,\psi \;=\; 0; \qquad i\,\partial_\mu\,\overline{\psi}\,\gamma^\mu \,+\, m\,\overline{\psi} \;=\; 0 \tag{3.334}$$

In prima quantizzazione, posto $E_p \equiv \sqrt{p^2+m^2}$, le soluzioni piane dell'equazione di Dirac hanno la forma

$$u(\vec{p})\,e^{-ip\cdot x}; \qquad v(\vec{p})\,e^{ip\cdot x} \tag{3.335}$$

dove gli spinori $u(\vec{p})$ e $v(\vec{p})$ soddisfano, rispettivamente, alle seguenti equazioni[153]

$$(\not{p} - m)u(\vec{p}) \;=\; 0 \tag{3.336}$$
$$(\not{p} + m)v(\vec{p}) \;=\; 0 \tag{3.337}$$

dove $p \equiv (E_p\,,\vec{p})$ e abbiamo definito[154] $\not{p} \equiv p_\mu \gamma^\mu$.

E' immediato dimostrare che le due lagrangiane conducono alle stesse equazioni di moto, visto che la loro differenza è una quadridivergenza

$$\Delta\mathcal{L} \;=\; \frac{i}{2}[\overline{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu\psi) \;+\; (\partial_\mu\overline{\psi})\gamma^\mu\psi] = \frac{i}{2}\partial_\mu[\bar{\psi}\gamma^\mu\psi] \tag{3.332}$$

che, nel caso attuale, date le equazioni del moto, è anche identicamente nulla.

[152] Osserviamo che, moltiplicando, per esempio, l'equazione di Dirac per la ψ a sinistra per l'operatore $i\,\partial_\mu\,\gamma^\mu \,+\, m$ otteniamo

$$(i^2\,\gamma^\mu\gamma^\nu\partial_\mu\partial_\nu - m^2)\psi = 0$$

La condizione $\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\} = 2\,\delta^{\mu\nu}$ è *costitutiva* della definzione delle γ proprio perché essa assicura che la ψ (come pure la $\overline{\psi}$ ...) descrive una particella libera di massa m, i.e. soddisfa l'equazione di Klein-Gordon

$$(\Box + m^2)\psi = 0$$

Si osservi che questa equazione di K-G, comunque, avrebbe quattro soluzioni ad energia positiva e quattro ad energia negativa, cioè il doppio di quelle dell'equazione di Dirac !
La cosa non deve stupire visto che è stata ottenuta "iterando" in un certo senso l'equazione di Dirac di partenza, passando da un'equazione alle derivate prime a una alle derivate seconde ...

[153] Chiaramente, le equazioni (3.336) e (3.337) sono le equazioni algebriche in cui prende forma l'equazione di Dirac quando si vada in rappresentazione dell'impulso !

[154] Ricordiamo alcune proprietà algebriche degli operatori che stiamo trattando. Risulta

$$\begin{aligned}(\not{p} \pm m)(\not{p} \pm m) \;&=\; (m\pm \not{p})(m\pm \not{p}) = \\ &=\; (p_\mu\gamma^\mu \pm m)(p_\nu\gamma^\nu \pm m) = p_\mu p_\nu\,\gamma^\mu\gamma^\nu \pm 2m\,\not{p} + m^2 \\ &=\; \frac{1}{2}p_\mu p_\nu\,\{\gamma^\mu\gamma^\nu\} \pm 2m\,\not{p} + m^2 = p^2 \pm 2m\,\not{p} + m^2 = \\ &=\; 2m^2 \pm 2m\,\not{p} = 2m(m\pm \not{p})\end{aligned} \tag{3.338}$$

mentre è

$$(\not{p} \pm m)(\not{p} \mp m) \;=\; p_\mu p_\nu\,\gamma^\mu\gamma^\nu - m^2 = 0 \tag{3.339}$$

Per quanto riguarda, poi, gli spinori $\bar{u}$ e $\bar{v}$, essi soddisfano le stesse equazioni degli spinori u e v, con la sola differenza che adesso l'operatore agisce sullo spinore a destra, invece che a sinistra, i.e. risulta[155]

$$
\begin{aligned}
\bar{u}(\vec{p})(\not p - m) &= 0 && (3.344)\\
\bar{v}(\vec{p})(\not p + m) &= 0 && (3.345)
\end{aligned}
$$

Gli spinori $u(\vec{p})$ individuano soluzioni ad energia positiva, infatti

$$
i\frac{\partial}{\partial t}\left[u(\vec{p})\, e^{-i\,p\cdot x}\right] = E_p\, u(\vec{p})\, e^{-i\,p\cdot x} \qquad (3.346)
$$

a differenza degli spinori $v(\vec{p})$ che, invece, per la stessa ragione, individuano soluzioni ad energia negativa: per entrambi i tipi di soluzione, poi, esistono due componenti indipendenti dei relativi spinori, i quali, da ora in poi, saranno quindi individuati anche con un indice r opportuno, i.e.

$$
u(\vec{p}) \to u^{(r)}(\vec{p}); \qquad v(\vec{p}) \to v^{(r)}(\vec{p}) \qquad r = 1, 2
$$

La definizione esplicita degli spinori u e v che noi adotteremo è la seguente[156]

$$
\begin{aligned}
u^{(r)}(\vec{p}) &\equiv \frac{m+\not p}{\sqrt{m+E_p}}\, u_0^{(r)} \quad\Leftrightarrow\quad \bar{u}^{(r)}(\vec{p}) = \bar{u}_0^{(r)}\, \frac{m+\not p}{\sqrt{m+E_p}} && (3.347)\\
v^{(r)}(\vec{p}) &\equiv \frac{m-\not p}{\sqrt{m+E_p}}\, v_0^{(r)} \quad\Leftrightarrow\quad \bar{v}^{(r)}(\vec{p}) = \bar{v}_0^{(r)}\, \frac{m-\not p}{\sqrt{m+E_p}} && (3.348)
\end{aligned}
$$

---

[155] Dimostriamo, per esempio, la (3.344). Prendiamo dunque l'hermitiana coniugata della (3.336) e moltiplichiamola a destra per γ^0.
Evidentemente si ha

$$
\left[(\not p - m)u(\vec{p})\right]^+ \gamma^0 = 0 \qquad (3.340)
$$

ovvero

$$
0 = u(\vec{p})^+(\not p - m)^+\gamma^0 = u(\vec{p})^+\gamma^0\gamma^0\,(\not p - m)^+\gamma^0 = \bar{u}(\vec{p})\,\gamma^0(\not p - m)^+\,\gamma^0 \qquad (3.341)
$$

e siccome le γ^i sono antiermitiane e anticommutano con γ^0, che, invece, è hermitiana e il suo quadrato è pari all'identità, abbiamo

$$
\gamma^0(\not p - m)^+\,\gamma^0 = (\not p - m) \qquad (3.342)
$$

per cui risulta infine che l'equazione per $\bar{u}$ ha la forma seguente

$$
\left[(\not p - m)u(\vec{p})\right]^+ \gamma^0 = 0 \quad\Rightarrow\quad \bar{u}(\vec{p})\,(\not p - m) = 0 \qquad (3.343)
$$

[156] Data la relazione (3.339), è evidente che gli spinori u e v definiti rispettivamente dalle (3.347) e (3.348) soddisfano le equazioni (3.336), (3.337), i.e. l'equazione di Dirac. In più, occorre osservare che le definizioni in questione servono a fissare la normalizzazione delle soluzioni.

dove abbiamo posto[157]

$$u_0^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \; ; \; u_0^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad v_0^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \; ; \; v_0^{(2)} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.349}$$

per cui, definendo per comodità

$$w^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad w^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.350}$$

si ha[158]

$$u^{(r)}(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{m+E_p}} \begin{pmatrix} (m+E_p)\, w^{(r)} \\ (\vec{p}\cdot\vec{\sigma})\, w^{(r)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{E_p+m}\; w^{(r)} \\ \sqrt{E_p-m}\,(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})\; w^{(r)} \end{pmatrix} \tag{3.352}$$

dove si è usato il fatto che $\vec{p} = \sqrt{E_p^2 - m^2}\; \vec{n}$.
Per quanto riguarda, poi, gli spinori $v^{(r)}$, ponendo adesso, in analogia con la (3.350)

$$\tilde{w}^{(1)} = w^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \tilde{w}^{(2)} = -w^{(1)} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.353}$$

dalla loro definizione[159] risulta che

$$v^{(r)}(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{m+E_p}} \begin{pmatrix} (\vec{p}\cdot\vec{\sigma})\, \tilde{w}^{(r)} \\ (m+E_p)\, \tilde{w}^{(r)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{E_p-m}\,(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})\; \tilde{w}^{(r)} \\ \sqrt{E_p+m}\; \tilde{w}^{(r)} \end{pmatrix} \tag{3.355}$$

---

[157] Può sembrare che la scelta (3.349) per quanto concerne le v sia quantomeno bizzarra. La ragione è che, come vedremo è proprio lo spinore associato a $v_0^{(1)}$ che è associato all'operatore di creazione di una antiparticella con $s_z = 1/2$, mentre quello associato a $v_0^{(2)}$ si riferisce a $s_z = -1/2$.

[158] Risulta infatti che, indicando con I l'identità in due dimensioni, esplicitamente risulta

$$(m + \not{p}) = \begin{pmatrix} (m+E_p)I & -\vec{\sigma}\cdot\vec{p} \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{p} & (m-E_p)I \end{pmatrix} \; ; \quad (m - \not{p}) = \begin{pmatrix} (m-E_p)I & \vec{\sigma}\cdot\vec{p} \\ -\vec{\sigma}\cdot\vec{p} & (m+E_p)I \end{pmatrix} \tag{3.351}$$

e usando queste espressioni, le (3.352) e (3.355) seguono immediatamente dalle definizioni (3.347) e (3.348), rispettivamente di $u^{(r)}(\vec{p})$ e $v^{(r)}(\vec{p})$.

[159] Quanto agli spinori bidimensionali $w^{(i)}$ e $\tilde{w}^{(i)}$, risulta

$$\tilde{w}^{(i)} = (i\,\sigma_2)_{ij}\, w^{(j)} \quad \Longleftrightarrow \quad w^{(i)} = (-i\,\sigma_2)_{ij}\, \tilde{w}^{(j)} \tag{3.354}$$

dove σ_2 è la matrice di Pauli, generatore in $SU(2)$ delle rotazioni intorno all'asse y.
La scelta è fatta in modo che la stessa rappresentazione di spin 1/2 sia rappresentata nelle basi $w^{(i)}$ e $\tilde{w}^{(j)}$ da matrici complesse coniugate.

e queste due relazioni (3.352) e (3.355) mostrano chiaramente come, nel limite di bassa energia, le *piccole* e le *grandi* componenti degli spinori u e v si separino in modo opposto.

Vediamo adesso quali sono le proprietà di trasformazione degli spinori[160] sotto la rappresentazione $S(\Lambda)$.
Iniziamo dimostrando che, se $\mathcal{B}(\vec{p})$ è il boost di Lorentz definito dalla (3.129), tale per cui, posto $\hat{p} \equiv (m, 0, 0, 0)$, allora $\mathcal{B}(\vec{p})\ \hat{p} = p$, risulta semplicemente

$$u^{(s)}(\vec{p}) = S(\mathcal{B}(\vec{p}))\, u^{(s)}(\vec{0}); \qquad v^{(s)}(\vec{p}) = S(\mathcal{B}(\vec{p}))\, v^{(s)}(\vec{0}) \tag{3.356}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{u}^{(s)}(\vec{p}) = \bar{u}^{(s)}(\vec{0})\, S^{-1}(\mathcal{B}(\vec{p})); \qquad \bar{v}^{(s)}(\vec{p}) = \bar{v}^{(s)}(\vec{0})\, S^{-1}(\mathcal{B}(\vec{p})) \tag{3.357}$$

Ricordiamo intanto che, per quanto si è già visto, per i boosts di Lorentz puri (che agiscono, cioè, senza ruotare gli assi) vale la (3.329).
Nel nostro caso, poiché il boost, per sua stessa definizione, avviene con velocità opposta a quella definita dall'impulso $\vec{p}$ della particella stessa, ecco che se poniamo

$$\vec{v} = \frac{\vec{p}}{E} \equiv v\,\vec{n} \quad ed \quad \eta = th^{-1}(v) \tag{3.358}$$

ne segue che

$$S(\mathcal{B}(\vec{p})) = ch\,\frac{\eta}{2}\, I + (\vec{n} \cdot \vec{\alpha})\, sh\,\frac{\eta}{2} \tag{3.359}$$

dove le matrici $\vec{\alpha}$ sono definite dalla (3.330). Risulta dunque

$$S(\mathcal{B}(\vec{p})) = \begin{pmatrix} ch\,\frac{\eta}{2} & sh\,\frac{\eta}{2}\,(\vec{n}\cdot\vec{\sigma}) \\ sh\,\frac{\eta}{2}\,(\vec{n}\cdot\vec{\sigma}) & ch\,\frac{\eta}{2} \end{pmatrix} \tag{3.360}$$

per cui, in termini dei vettori a due dimensioni $w^{(r)}$ definiti dalla (3.350), per quanto concerne gli spinori u, abbiamo

$$S(\mathcal{B}(\vec{p}))\, u^{(r)}(\vec{0}) = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} ch\,\frac{\eta}{2}\; w^{(r)} \\ sh\,\frac{\eta}{2}\,(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})\, w^{(r)} \end{pmatrix} \tag{3.361}$$

D'altronde

$$ch\,\alpha = 2\,ch^2\frac{\alpha}{2} - 1 \;\Rightarrow\; ch^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + ch\,\alpha}{2} \;\Rightarrow\; ch\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + ch\,\alpha}{2}} \tag{3.362}$$

e si ha anche

$$1 - th^2\alpha = \frac{1}{ch^2\alpha} \;\Rightarrow\; ch^2\alpha = \frac{1}{1 - th^2\alpha} \tag{3.363}$$

[160] Gli spinori u descrivono direttamente lo stato di spin della particella mentre gli spinori v descrivono, nel modo che vedremo, quelli dell'antiparticella ed entrambi giocano, in buona sostanza, lo stesso ruolo giocato, per esempio, dalla funzione di polarizzazione $\epsilon^\mu(\vec{p})$ del campo vettoriale W^μ e A^μ.

Da quest'ultima relazione, essendo, evidentemente, nel nostro caso $th\,\eta = v$, segue che

$$ch\,\eta = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} = \gamma \;\;\Rightarrow\;\; ch\frac{\eta}{2} = \sqrt{\frac{1+\gamma}{2}} = \sqrt{\frac{1+E/m}{2}} = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \tag{3.364}$$

Analogamente abbiamo

$$sh\frac{\eta}{2} = \sqrt{ch^2\frac{\eta}{2} - 1} = \sqrt{\frac{E+m}{2m} - 1} = \sqrt{\frac{E-m}{2m}} \tag{3.365}$$

per cui risulta infine che

$$S(\mathcal{B}(\vec{p}))\, u^{(r)}(\vec{0}) = \begin{pmatrix} \sqrt{E+m}\; w^{(r)} \\ \sqrt{E-m}\; (\vec{n}\cdot\vec{\sigma})\, w^{(r)} \end{pmatrix} = u^{(r)}(\vec{p}) \tag{3.366}$$

in accordo con la la (3.356).
Per lo spinore v risulta analogamente che

$$S(\mathcal{B}(\vec{p}))\, v^{(r)}(\vec{0}) = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} sh\,\frac{\eta}{2}\,(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})\,\tilde{w}^{(r)} \\ ch\,\frac{\eta}{2}\;\tilde{w}^{(r)}) \end{pmatrix} = v^{(r)}(\vec{p}) \tag{3.367}$$

Esplicitiamo adesso, in generale, l'azione delle trasformazioni $S(\Lambda)$ sugli spinori. Iniziamo dagli spinori u: abbiamo

$$\begin{aligned} S(\Lambda)\, u^{(s)}(\vec{p}) &= S(\Lambda)\, S(\mathcal{B}(\vec{p}))\, u^{(s)}(\vec{0}) = \\ &= S(\mathcal{B}(\vec{\Lambda p}))\, S(\mathcal{B}^{-1}(\vec{\Lambda p}))\, S(\Lambda)\, S(\mathcal{B}(\vec{p}))\, u^{(s)}(\vec{0}) = \\ &= S(\mathcal{B}(\vec{\Lambda p}))\, S(\mathcal{B}^{-1}(\Lambda p)\, \Lambda\, \mathcal{B}(\vec{p}))\, u^{(s)}(\vec{0}) \end{aligned} \tag{3.368}$$

ma la matrice di Lorentz $\mathcal{B}^{-1}(\vec{\Lambda p})\;\Lambda\;\mathcal{B}(\vec{p}) \;\equiv\; \mathcal{R}(\Lambda, \vec{p})$ è una rotazione poiché manda evidentemente $\hat{p}$ in sé: si tratta della rotazione di Wigner (cfr. (3.161)) individuata da $\vec{p}$ e Λ.
Come ogni rotazione, essa sarà individuata da un opportuno vettore $\vec{\theta} \equiv \theta\,\vec{n}$, e avremo allora, per la (3.327), che, in termini di questo vettore, risulterà

$$S(\mathcal{R}(\Lambda,\vec{p})) = cos(\theta/2)\, I + i\, sin(\theta/2)\, (\vec{n}\cdot\vec{\Sigma}) \tag{3.369}$$

dove le matrici $\vec{\Sigma}$ sono definite dalla (3.328).
Siccome $S(\mathcal{R})$, come qualunque rotazione, è diagonale rispetto alle grandi/piccole componenti, possiamo definire in modo ovvio la matrice $R(\theta,\vec{n})$ di $SU(2)$, corrispondente alla rotazione $\mathcal{R}(\Lambda,\vec{p})$, nel modo seguente

$$R(\theta,\vec{n}) = cos(\theta/2)\, I + i\, sin(\theta/2)(\vec{n}\cdot\vec{\sigma}) \equiv R(\Lambda,\vec{p}) \tag{3.370}$$

e risulta allora immediato che

$$S(\mathcal{R}(\Lambda,\vec{p}))u^{(s)}(\vec{0}) = R(\Lambda,\vec{p})_{ks}\, u^{(k)}(\vec{0}) \tag{3.371}$$

per cui, sostituendo nella (3.368), si ha finalmente che

$$S(\Lambda)\, u^{(s)}(\vec{p}) \quad = \quad R(\Lambda, \vec{p})_{ks}\, u^{(k)}(\vec{\Lambda p}) \tag{3.372}$$

Per quanto riguarda poi lo spinore v, siccome le rotazioni sono diagonali rispetto alle piccole e grandi componenti e agiscono su di loro nello stesso modo, la conclusione sarebbe esattamente la stessa di quella tratta per lo spinore u se, nella definizione di $v^{(s)}(p)$, fosse stato scelto il vettore $w^{(s)}$ di cui alla (3.350), invece del vettore $\tilde{w}^{(s)}$ di cui alla (3.353), legati fra loro da una rotazione di 180^0 intorno all'asse y, essendo infatti

$$\tilde{w}^{(r)} = (-i\,\sigma_2)_{sr}\, w^{(s)} \qquad \Longleftrightarrow \qquad w^{(s)} = (i\,\sigma_2)_{rs}\, \tilde{w}^{(r)} \tag{3.373}$$

Si dimostra[161] allora che, in termini della stessa matrice $R(\Lambda, \vec{p})$ che compare nella (3.372), cioè dell'elemento $R(\Lambda, \vec{p})$ di $SU(2)$ definito dalla rotazione di Wigner

$$\mathcal{R}(\Lambda, \vec{p}) \equiv \mathcal{B}^{-1}(\vec{\Lambda p})\, \Lambda\, \mathcal{B}(\vec{p}) \tag{3.384}$$

[161] Dimostriamo direttamente la (3.385).
Applicando le stesse considerazioni svolte per $u^{(s)}(p)$, giungiamo evidentemente alla conclusione per cui

$$S(\Lambda)\, v^{(s)}(\vec{p}) = S(\mathcal{B}(\vec{\Lambda p}))\, S(\mathcal{R}(\Lambda, \vec{p}))\, v^{(s)}(\vec{0}) \tag{3.374}$$

Ma, essendo $\mathcal{R}$ una rotazione, data la sua struttura (3.327), potrà solo rimescolare gli spinori $v^{(k)}(\vec{0}),\ k = 1, 2$ fra di loro, i.e. necessariamente dovrà risultare

$$S(\mathcal{R}(\Lambda, \vec{p}))\, v^{(s)}(\vec{0}) = M_{rs}\, v^{(r)}(\vec{0}) \Rightarrow S(\Lambda)\, v^{(s)}(\vec{p}) = M_{rs}\, v^{(r)}(\vec{\Lambda p}) \tag{3.375}$$

dove M sarà una matrice 2×2 opportuna, che adesso vogliamo determinare.
A questo scopo, osserviamo che, ponendo

$$(i\,\sigma_2)_{sa}\, v^{(s)}(\vec{0}) \equiv \hat{v}^{(a)}(\vec{0}) \tag{3.376}$$

data la (3.373), risulta che lo spinore $\hat{v}^{(a)}(\vec{0})$ è definito in termini del vettore $w^{(a)}$ esattamente come $u^{(a)}(\vec{0})$ (a parte l'inversione grandi/piccole componenti, irrilevante per le considerazioni che stiamo svolgendo vista la struttura "diagonale" di $S(\mathcal{R})$), per cui possiamo senz'altro concludere che

$$S(\mathcal{R}(\Lambda, \vec{p}))\, \hat{v}^{(a)}(\vec{0}) = R_{ba}\, \hat{v}^{(b)}(\vec{0}) \tag{3.377}$$

ovvero che

$$(i\,\sigma_2)_{sa}\, S(\mathcal{R}(\Lambda, \vec{p}))\, v^{(s)}(\vec{0}) \equiv S(\mathcal{R}(\Lambda, \vec{p}))\, \hat{v}^{(a)}(\vec{0}) = R_{ba}\, \hat{v}^{(b)}(\vec{0}) \equiv R_{ba}\, (i\,\sigma_2)_{tb}\, v^{(t)}(\vec{0}) \tag{3.378}$$

Moltiplicando allora ambo i membri dell'espressione precedente per $(-i\sigma_2)_{ak}$ e sommando sull'indice a, ricaviamo $(\sigma^2) = I$ che

$$S(\mathcal{R}(\Lambda, \vec{p}))\, v^{(k)}(\vec{0}) = (\sigma_2\, R\, \sigma_2)_{tk}\, v^{(t)}(\vec{0}) \ \ \Rightarrow \ \ M = \sigma_2\, R\, \sigma_2 \tag{3.379}$$

D'altronde, la rotazione $R \equiv R(\Lambda, \vec{p})$ di $SU(2)$ avrà la struttura usuale di una rotazione, i.e. se $\vec{n}$ individua l'asse di rotazione intorno a cui si procede per un angolo θ, sarà

$$R = e^{\frac{i}{2}\theta\, \vec{n}\cdot\vec{\sigma}} = I \cdot cos(\theta/2) + i(\vec{n}\cdot\vec{\sigma}) sin(\theta/2) \tag{3.380}$$

risulta adesso

$$S(\Lambda)\, v^{(s)}(\vec{p}) \;\; = \;\; R^*(\Lambda, \vec{p})_{ks}\, v^{(k)}(\vec{\Lambda p}) \tag{3.385}$$

Quanto infine agli spinori $\bar{u}$ e $\bar{v}$, siccome vale l'identità $\gamma^0 S^\dagger(\Lambda)\gamma^0 = S^{-1}(\Lambda)$, è facile dimostrare da quanto precede che risulta

$$\bar{u}^{(s)}(\vec{p})\, S^{-1}(\Lambda) \;\; = \;\; R(\Lambda, p)^*_{ks}\, \bar{u}^{(k)}(\vec{\Lambda p}) \tag{3.386}$$

$$\bar{v}^{(s)}(\vec{p})\, S^{-1}(\Lambda) \;\; = \;\; R(\Lambda, p)_{ks}\, \bar{v}^{(k)}(\vec{\Lambda p}) \tag{3.387}$$

---

per cui

$$\sigma_2\, R\, \sigma_2 = I \cdot cos(\theta/2) + i[\vec{n} \cdot (\sigma_2 \vec{\sigma} \sigma_2)] sin(\theta/2) \tag{3.381}$$

D'altronde è facile verificare che

$$-\sigma_i^* = \sigma_2 \sigma_i \sigma_2 \tag{3.382}$$

visto che σ_2 e l'unica matrice di Pauli immaginaria pura e che le altre due anticommutano con essa. Dunque

$$M = \sigma_2\, R\, \sigma_2 = e^{-\frac{i}{2}\vec{\theta}\cdot\vec{\sigma}^*} = R^* \tag{3.383}$$

che dimostra, appunto, la (3.385).

Ricordiamo a questo riguardo quanto già visto nel Corso precedente, ovvero che, dato un gruppo G e una sua rappresentazione matriciale $g \to M(g)$, possiamo definire in modo canonico altre tre rappresentazioni del gruppo G nello stesso insieme di matrici, nel modo seguente:

- $g \to M(g)^*$
- $g \to (M(g)^t)^{-1}$
- $g \to \left(M(g)^\dagger\right)^{-1}$

Nel caso di rappresentazioni unitarie, evidentemente $(M(g)^t)^{-1} = (M(g)^t)^\dagger = M(g)^*$ e analogamente $\left(M(g)^\dagger\right)^{-1} = M(g)$ per cui le rappresentazioni inequivalenti, in questo caso, sono al massimo solo due.
Nel caso particolare di $SU(2)$ queste due rappresentazioni sono in realtà una sola, risultando legate dalla trasformazione di verosimiglianza $U^* = \sigma_2\, U\, \sigma_2$ e dunque essendo equivalenti tra loro.

Ritornando alle proprietà degli spinori u e v, dalle definizioni (3.347) e (3.348) segue[162] inoltre che essi soddisfano le relazioni algebriche seguenti

$$\bar{u}^{(s)}(\vec{p})\, u^{(r)}(\vec{p}) = 2m\, \delta_{sr} \tag{3.388}$$
$$u^{\dagger(s)}(\vec{p})\, u^{(r)}(\vec{p}) = 2E_p\, \delta_{sr} \tag{3.389}$$
$$\bar{v}^{(s)}(\vec{p})\, v^{(r)}(\vec{p}) = -2m\, \delta_{sr} \tag{3.390}$$
$$v^{\dagger(s)}(\vec{p})\, v^{(r)}(\vec{p}) = 2E_p\, \delta_{sr} \tag{3.391}$$

dove la δ è quella di Kronecker.

Passiamo adesso a definire i proiettori $\Lambda_\pm$ sugli stati di energia positiva e negativa. Dalla definizioni delle u e delle v, unitamente alle (3.338) e (3.339),

[162]Dalla definizione (3.347), usando la (3.338) e la (3.352), segue immediatamente che

$$\begin{aligned}\bar{u}^{(s)}(p)\, u^{(r)}(p) &= \bar{u}_0^{(s)} \frac{(\not{p}+m)\,(\not{p}+m)}{m+E_p}\, u_0^{(r)} = \\ &= \frac{2m}{m+E_p} \bar{u}_0^{(s)}\, (\not{p}+m)\; u_0^{(r)} = 2m\, \delta_{rs}\end{aligned}$$

la quale dimostra appunto la (3.388).
Un altro modo per arrivare alla stessa conclusione è quello di osservare che, date la (3.356) e la (3.357), $\bar{u}\, u$ è scalare per trasformazioni di Lorentz e dunque basta valutarlo nel sistema del centro di massa dove, evidentemente, esso vale proprio $2m\, \delta_{rs}$
Veniamo ora alla dimostrazione della (3.389). Abbiamo

$$\bar{u}^{(s)}(p)\gamma^\mu u^{(r)}(p) = \bar{u}^{(s)}(\vec{0})\, S^{-1}(\mathcal{B}(\vec{p}))\, \gamma^\mu\, S(\mathcal{B}(\vec{p}))\, u^{(r)}(\vec{0}) = (\mathcal{B}(\vec{p}))^\mu_{\cdot\nu}\, \bar{u}^{(s)}(\vec{0})\gamma^\nu u^{(r)}(\vec{0})$$

D'altronde, per come sono definiti, $\bar{u}^{(s)}(\vec{0})\gamma^\nu u^{(r)}(\vec{0}) = (2m, 0, 0, 0)\delta_{sr} = 2\hat{p}\; \delta_{rs}$ e dunque, per le proprietà di $\mathcal{B}(\vec{p})$, risulta così provata la relazione

$$\bar{u}^{(s)}(p)\gamma^\mu u^{(r)}(p) = 2p^\mu\, \delta_{sr}$$

Riguardo agli spinori di tipo v, osserviamo che è naturalmente ancora vero che

$$\bar{v}^{(s)}(p)\, v^{(r)}(p) = \bar{v}^{(s)}(\vec{0})\, v^{(r)}(\vec{0})$$

ma adesso accade che l'azione della γ^0 conduce ad un cambiamento di segno rispetto al caso degli spinori di tipo u, infatti

$$\bar{v}^{(s)}(\vec{0})\, v^{(r)}(\vec{0}) = v^{\dagger(s)}(\vec{0})\, \gamma^0\, v^{(r)}(\vec{0}) = -v^{\dagger(s)}(\vec{0})\, v^{(r)}(\vec{0}) = -2m\, \delta_{sr}$$

Questo non accade nel caso di $\bar{v}^{(s)}(p)\gamma^\mu v^{(r)}(p)$ per cui abbiamo

$$\bar{v}^{(s)}(p)\gamma^\mu v^{(r)}(p) = \bar{v}^{(s)}(\vec{0})\gamma^\mu v^{(r)}(\vec{0}) = (\mathcal{B}(\vec{p}))^\mu_{\cdot\nu}\, \bar{v}^{(s)}(\vec{0})\gamma^\nu v^{(r)}(\vec{0})$$

essendo in questo caso ancora vero che

$$\bar{v}^{(s)}(\vec{0})\gamma^\nu v^{(s)}(\vec{0}) = v^{\dagger(s)}(\vec{0})\gamma^\nu v^{(r)}(\vec{0}) = 2\delta_{sr}(m, 0, 0, 0) = 2\hat{p}\, \delta_{rs}$$

risulta evidente che questi proiettori, una volta fissato il quadrimpulso p^μ, non possono che essere i seguenti

$$\Lambda_\pm \equiv \Lambda_\pm(\vec{p}) = \frac{m \pm \not{p}}{2m} \tag{3.392}$$

Infatti[163]

$$\begin{aligned}
\Lambda_+ + \Lambda_- &= I && (3.395)\\
(\Lambda_\pm)^2 &= \Lambda_\pm && (3.396)\\
\Lambda_+ \Lambda_- &= 0 && (3.397)\\
\Lambda_+ u &= u; \qquad \Lambda_+ v = 0 && (3.398)\\
\Lambda_- u &= 0; \qquad \Lambda_- v = v && (3.399)
\end{aligned}$$

ovvero essi proiettano rispettivamente sugli stati individuati dagli spinori $u(\vec{p})$ (il proiettore $\Lambda_+(\vec{p})$), che descrivono, in prima quantizzazione, stati con energia positiva e su quelli individuati dagli spinori $v(\vec{p})$ (il proiettore $\Lambda_-(\vec{p})$), che, sempre in prima quantizzazione, sono associati agli stati con energia negativa.

Un altro modo estremamente utile per rappresentare questi proiettori (teorema di Casimir) passa attraverso le definizioni seguenti[164]

$$\begin{aligned}
(\Gamma_+)_{\alpha\beta} &\equiv \sum_r u_\alpha^{(r)}(\vec{p})\bar{u}_\beta^{(r)}(\vec{p}) = \sum_r \left(u^{(r)}(\vec{p})\,\bar{u}^{(r)}(\vec{p})\right)_{\alpha\beta} && (3.400)\\
(\Gamma_-)_{\alpha\beta} &\equiv \sum_r v_\alpha^{(r)}(\vec{p})\bar{v}_\beta^{(r)}(\vec{p}) = \sum_r \left(v^{(r)}(\vec{p})\,\bar{v}^{(r)}(\vec{p})\right)_{\alpha\beta} && (3.401)
\end{aligned}$$

Iniziamo esplicitando Γ_+: dalla definizione, risulta

$$\begin{aligned}
(\Gamma_+)_{\alpha\beta} &= \frac{1}{m+E_p}\left\{\sum_r (\not{p}+m)u_0^{(r)}\bar{u}_0^{(r)}(\not{p}+m)\right\}_{\alpha\beta} = \\
&= \frac{1}{m+E_p}\left\{(\not{p}+m)\left[\sum_r u_0^{(r)}\bar{u}_0^{(r)}\right](\not{p}+m)\right\}_{\alpha\beta} && (3.402)
\end{aligned}$$

ma in rappresentazione di Dirac-Pauli risulta (gli u_0 sono reali ...)

$$\sum_r u_0^{(r)}\bar{u}_0^{(r)} = \frac{1+\gamma^0}{2} \equiv \sum_r u_0^{(r)} u_0^{\dagger(r)} \tag{3.403}$$

---

[163]Si osservi che, poiché per la (A.11) risulta che $(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$, ne segue che ($\gamma^0\gamma^0 = 1$ ...)

$$(\Lambda_\pm)^\dagger = \gamma^0\,\Lambda_\pm\,\gamma^0 \tag{3.393}$$

e dunque, data comunque una soluzione ψ, se definiamo $\psi_\pm \equiv \Lambda_\pm\psi$, risulta che

$$\bar{\psi}_\pm \equiv (\psi_\pm)^\dagger\,\gamma^0 = \psi^\dagger\,(\Lambda_\pm)^\dagger\,\gamma^0 = \psi^\dagger\gamma^0\,\Lambda_\pm\,\gamma^0\,\gamma^0 = \bar{\psi}\Lambda_\pm \tag{3.394}$$

ovvero i proiettori $\Lambda_\pm$ agiscono nella stessa forma sia sulla ψ che sulla $\bar{\psi}$.

[164]La sommatoria sull'indice r è estesa, ovviamente, da 1 a 2.

dunque

$$
\begin{aligned}
\Gamma_+ &= \frac{1}{m+E_p}(\not p+m)\frac{1+\gamma^0}{2}(\not p+m) = \\
&= \frac{1}{m+E_p}\left[\frac{1}{2}(\not p+m)(\not p+m)+\frac{1}{2}(\not p+m)\gamma^0(\not p+m)\right]
\end{aligned}
\tag{3.404}
$$

D'altronde, tenendo conto delle proprietà di anticommutazione delle matrici gamma, risulta

$$
\begin{aligned}
\gamma^0(\not p+m) &= m\gamma^0+p_0\gamma^0\gamma^0+p_i\gamma^0\gamma^i = m\gamma^0+p_0\gamma^0\gamma^0-p_i\gamma^i\gamma^0 = \\
&= m\gamma^0+2p_0\gamma^0\gamma^0-\not p\gamma^0 = 2E_p+(m-\not p)\gamma^0
\end{aligned}
\tag{3.405}
$$

quindi, usando anche la (3.338), si ha infine che

$$
\begin{aligned}
\Gamma_+ &= \frac{1}{m+E_p}\left\{m(\not p+m)+\frac{1}{2}(\not p+m)\left[2E_p+(m-\not p)\gamma^0\right]\right\} = \\
&= \frac{1}{m+E_p}\left\{m(\not p+m)+E_p(\not p+m)\right\} = \not p+m \;\Rightarrow\; \Lambda_+ = \frac{1}{2m}\Gamma_+
\end{aligned}
\tag{3.406}
$$

Analogamente si dimostra che risulta altresì[165]

$$
\Gamma_- = \not p-m \;\Rightarrow\; \Lambda_- = \frac{-1}{2m}\Gamma_-
\tag{3.408}
$$

Torniamo adesso alle soluzioni dell'equazione di Dirac. Noi sappiamo che, fissato un impulso spaziale qualunque $\vec{p}$, esse sono quattro, per cui è ragionevole aspettarci che possano esistere altri operatori di proiezione i quali

- commutano con $\Lambda_\pm$;
- separano le soluzioni con $r = 1, 2$.

D'altronde, queste soluzioni, distinte dall'indice r, hanno a che fare con i due possibili stati di spin, per cui ci dobbiamo attendere che questi operatori $\Pi_\pm$ siano una sorta di generalizzazione del proiettore non relativistico dello spin che, nella direzione del generico versore $\vec{n}$, come è noto, è dato, a seconda che il verso sia quello di $\vec{n}$ oppure il suo opposto, da

$$
P_\pm(\vec{n}) \equiv \frac{1\pm\vec{n}\cdot\vec{\sigma}}{2}
\tag{3.409}
$$

[165] Si ricordi che, pur essendo anche in questo caso gli spinori v_0 reali, risulta però

$$
\sum_r v_0^{(r)}\bar{v}_0^{(r)} = -\frac{1-\gamma^0}{2} \equiv -\sum_r v_0^{(r)}v_0^{\dagger(r)}
\tag{3.407}
$$

Il primo problema da risolvere, ovviamente, riguarda il modo di descrivere la direzione $\vec{n}$ in cui effettuare la proiezione: se vogliamo rendere la definizione compatibile con la Relatività Ristretta, occorre che questa sia definita tramite un quadrivettore[166] che, nel sistema del centro di massa individui una direzione spaziale, ovvero sia della forma $(0, \vec{n})$. Questa richiesta è praticamente già sufficiente allo scopo, infatti ci dice che il quadrivettore n^μ che stiamo cercando dovrà essere tale che

$$n^\mu\, n_\mu = -1; \qquad n^\mu\, p_\mu = 0 \tag{3.410}$$

Queste condizioni restringono i gradi di libertà su n^μ solo a due, e questo è appunto il numero di gradi di libertà che ci aspettiamo per n^μ, visto che una direzione nello spazio è fissata in termini di soli due angoli. Osserviamo altresì che le condizioni (3.410) non possono fissare il segno del quadrivettore n, e questa ambiguità di segno corrisponde ai due versi possibili associati alla direzione data. Proviamo, tentativamente, a definire i proiettori di spin nel modo seguente

$$\Pi_\pm \equiv \Pi_\pm(n) = \frac{1}{2}\,(1 \pm \gamma_5\ \not{n}) \tag{3.411}$$

dove γ_5, come si è già detto, è definita dalla (3.318). Risulta[167] allora quanto segue

$$\begin{aligned} [\Pi_\pm\,, \Lambda_\pm] &= 0 & (3.419)\\ (\Pi_\pm)^2 &= \Pi_\pm & (3.420)\\ \Pi_+ + \Pi_- &= I & (3.421)\\ \Pi_+\Pi_- &= 0 & (3.422) \end{aligned}$$

[166] Su questo aspetto particolare, dovremo tornarci sopra ...

[167] Iniziamo dimostrando la (3.419).
Si ha (l'arbitrarietà di segno è presente in entrambi i proiettori ...)

$$\left[\frac{1 \pm \gamma_5\ \not{n}}{2}\,, \frac{m \pm \not{p}}{2m}\right] = \frac{\pm 1}{4m}\,[\gamma_5\ \not{n}, \not{p}] \tag{3.412}$$

ma

$$[\gamma_5\ \not{n}, \not{p}] = n_\mu\, p_\nu(\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma_5\gamma^\mu) \tag{3.413}$$

e poiché γ_5 anticommuta con le γ^μ, ne segue che

$$[\gamma_5\ \not{n}, \not{p}] = n_\mu\, p_\nu\gamma_5(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu) = n_\mu p_\nu\gamma_5\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\,\gamma_5\, n_\mu p^\mu = 0 \tag{3.414}$$

che prova quindi la (3.419).

Gli operatori[168] $\Pi_\pm(n)$ così definiti hanno quindi le caratteristiche di proiettori che commutano con le $\Lambda_\pm(\vec{p})$.
Ma che proiezione descrivono ?
Per capirlo, vediamo che forma essi assumono nel riferimento del CM, dove conosciamo la forma che dovrebbero assumere i proiettori di spin.
Iniziamo assumendo che la particella abbia, nel nostro riferimento (Laboratorio), impulso spaziale $\vec{p}$ e consideriamo, per esempio, il proiettore $\Pi_+(n) \equiv \Pi_+$. Essendo un proiettore, i suoi possibili autovalori sono $\lambda = 0$ e $\lambda = 1$ e i suoi

Passiamo adesso a dimostrare la (3.420). Risulta

$$\frac{1 \pm \gamma_5 \not{n}}{2} \cdot \frac{1 \pm \gamma_5 \not{n}}{2} = \frac{1 \pm 2\gamma_5 \not{n} + \gamma_5 \not{n} \gamma_5 \not{n}}{4} \tag{3.415}$$

ma

$$\gamma_5 \not{n} \gamma_5 \not{n} = n_\mu n_\nu \gamma_5 \gamma^\mu \gamma_5 \gamma^\nu = -n_\mu n_\nu (\gamma_5)^2 \gamma^\mu \gamma^\nu = -n_\mu n_\nu \frac{1}{2}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = -n_\mu n^\mu = 1 \tag{3.416}$$

per cui

$$\frac{1 \pm \gamma_5 \not{n}}{2} \cdot \frac{1 \pm \gamma_5 \not{n}}{2} = \frac{2 \pm 2\gamma_5 \not{n}}{4} = \frac{1 \pm \gamma_5 \not{n}}{2} \tag{3.417}$$

che prova appunto la (3.420).
Quanto poi alla (3.421), essa è evidente. Passando quindi alla (3.422), essa segue dalla (3.416), infatti

$$\frac{1 \pm \gamma_5 \not{n}}{2} \cdot \frac{1 \mp \gamma_5 \not{n}}{2} = \frac{1 - \gamma_5 \not{n} \gamma_5 \not{n}}{4} = 0 \tag{3.418}$$

[168]Anche per i proiettori $\Pi_\pm$ vale la stessa conclusione già tratta per i proiettori $\Lambda_\pm$ ovvero che essi agiscono nella stessa forma sia sulle ψ che sulle $\bar{\psi}$. Infatti

$$(\Pi_\pm)^\dagger = \left(\frac{1 \pm \gamma_5 \not{n}}{2}\right)^\dagger = \left(\frac{1 \pm \not{n}^\dagger \gamma_5^\dagger}{2}\right) \tag{3.423}$$

ma, sia per il fatto che $\gamma_5^\dagger = \gamma_5$ che per il fatto che (cfr. (3.319)) $(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$, unitamente al fatto che γ^5 anticommuta con le γ^μ, ne segue che

$$\not{n}^\dagger \gamma_5^\dagger = n_\mu (\gamma^\mu)^\dagger \gamma_5 = n_\mu \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \gamma_5 = n_\mu \gamma^0 \gamma_5 \gamma^\mu \gamma^0 = \gamma^0 \gamma_5 \not{n} \gamma^0 \tag{3.424}$$

e dunque, essendo $\gamma^0 \gamma^0 = 1$, risulta che

$$(\Pi_\pm)^\dagger = \left(\frac{1 \pm \not{n}^\dagger \gamma_5^\dagger}{2}\right) = \gamma^0 \Pi_\pm \gamma^0 \tag{3.425}$$

per cui, assegnata comunque una soluzione ψ, se definiamo $\psi_\pm \equiv \Pi_\pm \psi$, risulta appunto che

$$\bar{\psi}_\pm \equiv (\psi_\pm)^\dagger \gamma^0 = \psi^\dagger (\Pi_\pm)^\dagger \gamma^0 = \psi^\dagger \gamma^0 \Pi_\pm \gamma^0 \gamma^0 = \bar{\psi} \Pi_\pm \tag{3.426}$$

autovettori costituiscono una base.
Consideriamo allora un generico spinore $u(\vec{p})$

$$u(\vec{p}) \equiv \alpha_s\, u^{(s)}(\vec{p}) \tag{3.427}$$

e supponiamo che esso sia un autovettore di $\Pi_+(n)$ per l'autovalore λ, i.e.

$$\Pi_+(n)\, u(\vec{p}) = \lambda\ u(\vec{p}) \tag{3.428}$$

Ponendo

$$u(\vec{0}) \equiv \alpha_s\, u^{(s)}(\vec{0}) \tag{3.429}$$

ecco che il secondo membro dell'equazione (3.428) può scriversi anche come

$$\begin{aligned} \lambda\, u(\vec{p}) &= \lambda \left(\alpha_s\, u^{(s)}(\vec{p})\right) = \lambda \left(\alpha_s\, S(\mathcal{B}(\vec{p}))\, u^{(s)}(\vec{0})\right) = \\ &= \lambda \cdot S(\mathcal{B}(\vec{p}))u(\vec{0}) \end{aligned} \tag{3.430}$$

mentre, per quanto riguarda il primo membro, abbiamo

$$\Pi_+(n)\, u(\vec{p}) \;=\; \Pi_+(n) S(\mathcal{B}(\vec{p}))u(\vec{0}) \tag{3.431}$$

Moltiplicando per $S^{-1}(\mathcal{B}(\vec{p}))$ abbiamo dunque che

$$\lambda \cdot u(\vec{0}) = S^{-1}(\mathcal{B}(\vec{p}))\, \Pi_+(n)\, S(\mathcal{B}(\vec{p}))u(\vec{0}) = \Pi_+ \left(\mathcal{B}^{-1}(\vec{p})n\right)\, u(\vec{0}) \tag{3.432}$$

dove abbiamo usato le proprietà di trasformazione delle matrici γ^μ e γ_5 sotto la rappresentazione spinoriale, le quali dicono che

$$S^{-1}(\Lambda)\gamma_5 n_\mu \gamma^\mu S(\Lambda) = n_\mu \gamma_5 S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda) = \gamma_5\, \Lambda^\mu_{\cdot\nu} n_\mu \gamma^\nu = \gamma_5 (\Lambda^{-1} n)_\nu \gamma^\nu \tag{3.433}$$

Se definiamo allora

$$n' = \left(\mathcal{B}^{-1}(\vec{p})n\right)\, n \tag{3.434}$$

possiamo concludere che $\Pi_+ (\mathcal{B}^{-1}(\vec{p})n) = \Pi_+(n')$ descrive nel CM la stessa proiezione descritta nel sistema del Laboratorio dal proiettore $\Pi_+(n)$.

Poiché questo vale, naturalmente, anche nello spazio degli spinori di tipo v, così come per i proiettori Π_-, possiamo concludere che il passaggio $Lab \rightarrow CM$ si manifesta sul proiettore $\Pi_\pm(n)$ semplicemente attraverso la trasformazione $n \rightarrow n' \equiv \mathcal{B}(\vec{p})^{-1} n$, la stessa trasformazione che manda p^μ in $\hat{p}^\mu$, essendo infatti $\mathcal{B}(\vec{p})^{-1}\, p \equiv \hat{p}$.

Vediamo adesso che i proiettori $\Pi_\pm$ nel CM coincidono proprio con proiettori di

spin non relativistici $P_\pm(\vec{n})$ di cui alla (3.409) !
Infatti, nel riferimento di quiete, evidentemente, deve essere

$$n^\mu = (0, \vec{n}) \qquad con \qquad |\vec{n}|^2 = 1 \tag{3.435}$$

e dunque

$$\not{n} = n_i \gamma^i = -n^i \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\,\vec{n}\cdot\vec{\sigma} \\ \vec{n}\cdot\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \tag{3.436}$$

ovvero risulta

$$\frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5 \not{n}) = \begin{pmatrix} \frac{1\pm\vec{n}\cdot\vec{\sigma}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1\mp\vec{n}\cdot\vec{\sigma}}{2} \end{pmatrix} \tag{3.437}$$

da cui segue, in particolare, per esempio che, posto $\vec{n} = (0, 0, 1)$, risulta

$$\Pi_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \Pi_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.438}$$

e dunque[169] gli stati $u_0^{(1)}$ e $v_0^{(1)}$ sono proiettati in se stessi da Π_+ mentre sono annichilati da Π_- e, viceversa, gli stati $u_0^{(2)}$ e $v_0^{(2)}$ sono proiettati in se stessi da Π_- mentre sono annichilati da Π_+, coerentemente con il fatto che, sia per gli stati di particella che di antiparticella, $r = 1$ individua l'autostato della componente z dello spin con autovalore $+1/2$ e $r = 2$ quello con autovalore $-1/2$, i.e.

$$u^{(1)} \;\rightarrow\; s_z = +1/2; \qquad u^{(2)} \rightarrow s_z = -1/2 \tag{3.439}$$

$$v^{(1)} \;\rightarrow\; s_z = +1/2; \qquad v^{(2)} \rightarrow s_z = -1/2 \tag{3.440}$$

L'interesse nell'aver scritto il proiettore di spin $\Pi_\pm$ nella forma (3.411) sta nel fatto che, per esempio, esso è covariante per boosts di Lorentz $Lab \leftrightarrow CM$ e quindi l'effetto del proiettore può essere valutato facilmente in ogni riferimento inerziale, riportandoci, con il boost relativo, al sistema del CM dove il proiettore coincide con quello ben noto in MQ non relativistica.

---

[169]Come mostra la (3.437), la forma dei proiettori di spin $\Pi_\pm$ sulle grandi e sulle piccole componenti degli spinori è "*opposta*": questa è la ragione delle scelte apparentemente anomale di $v_0^{(1)}$ e $v_0^{(2)}$, ottenuti per rotazione di 180^0 intorno all'asse y (i.e. attraverso la rotazione $-i\,\sigma_y$) degli spinori a due componenti che definiscono, rispettivamente, $u_0^{(1)}$ e $u_0^{(2)}$.
L'opportunità della definizione delle $v_0^{(r)}$ sarà ancora più evidente allorché considereremo, tra breve, la forma che assume la simmetria di coniugazione di carica sulle soluzioni dell'equazione di Dirac.

Ma che succede, in generale, per quanto riguarda la forma del proiettore, nel passaggio da un riferimento inerziale ad un altro, che non sia quello del CM ?
Potrebbe sembrare che, di nuovo, basti trasformare n^μ usando la trasformazione di Lorentz che connette i due riferimenti ... e questo sarebbe corretto se n^μ si trasformasse sempre come un vero quadrivettore, ma purtroppo non è così !
Supponiamo di partire dunque da un sistema di riferimento inerziale dove il quadrimpulso della particella è p^μ e il quadrivettore (continuiamo a chiamarlo così ...) di spin che ci interessa è n^μ. Se effettuiamo una trasformazione di Lorentz Λ, per cui il quadrimpulso della particella diventa $p' = \Lambda p$, quale deve essere il quadrivettore n' che individua lo stesso proiettore di spin già individuato da n nel riferimento di partenza ?
Come abbiamo visto, la prescrizione è che i boosts inversi definiscano nel CM lo stesso quadrivettore, i.e.

$$\mathcal{B}(\vec{\Lambda p})^{-1}\, n' = \mathcal{B}(\vec{p})^{-1}\, n \Leftrightarrow n' = \mathcal{B}(\vec{\Lambda p}) \cdot \mathcal{B}(\vec{p})^{-1}\, n \tag{3.441}$$

La trasformazione che dovevamo individuare è dunque proprio $\mathcal{B}(\vec{\Lambda p}) \cdot \mathcal{B}(\vec{p})^{-1}$!
Ma come è fatta ?
Iniziamo ricordando che la rotazione di Wigner $\mathcal{R}(\Lambda, \vec{p})$ è definita come

$$\mathcal{R}(\Lambda, \vec{p}) \equiv \mathcal{B}(\vec{\Lambda p})^{-1}\, \Lambda\; \mathcal{B}(\vec{p}) \tag{3.442}$$

e dunque risulta

$$\mathcal{B}(\vec{\Lambda p}) = \Lambda\, \mathcal{B}(\vec{p})\, \mathcal{R}(\Lambda, \vec{p})^{-1} \tag{3.443}$$

per cui abbiamo che

$$\mathcal{B}(\vec{\Lambda p}) \cdot \mathcal{B}(\vec{p})^{-1} = \Lambda \cdot \left(\mathcal{B}(\vec{p}) \cdot \mathcal{R}(\Lambda, \vec{p})^{-1} \cdot \mathcal{B}(\vec{p})^{-1} \right) \tag{3.444}$$

la quale coincide quindi con Λ se e solo se la rotazione di Wigner che compare nella sua definizione è la rotazione identica, ovvero se Λ è esso stesso un boost che avviene nella direzione di $\vec{p}$, senza ruotare gli assi[170].

Procediamo adesso a definire una rappresentazione parametrica significativa del quadrivettore di spin n^μ.
Iniziamo dimostrando che se p^μ è il quadrimpulso di una particella di massa m e k^μ è un *qualunque* quadrivettore light-like, allora possiamo sempre trovare uno e un solo (a parte il segno) quadrivettore *di polarizzazione* n^μ della forma seguente

$$n^\mu = \alpha\, p^\mu \;+\; \beta\, k^\mu \tag{3.445}$$

[170]Si osservi che la matrice di Lorentz $\mathcal{B}(\vec{p}) \cdot \mathcal{R}(\Lambda, \vec{p})^{-1} \cdot \mathcal{B}(\vec{p})^{-1}$ manda il quadrimpulso p in se stesso e dunque è un elemento del piccolo gruppo di p, isomorfo a quello di $\hat{p}$, cioè, per quanto abbiamo visto, al gruppo delle rotazioni.

che soddisfa, quindi, le condizioni di cui alla (3.410).
Cominciamo a imporre la condizione di ortogonalità con il quadrimpulso: si ha

$$np = 0 \Rightarrow \alpha\, m^2 \,+\, \beta\,(pk) = 0 \Rightarrow \beta = -\frac{\alpha\, m^2}{(pk)} \tag{3.446}$$

D'altronde, dalla condizione di normalizzazione di n, si ricava che deve anche essere

$$nn = -1 \Rightarrow \alpha^2\, m^2 \,+\, 2\alpha\beta\,(pk) = -1 \tag{3.447}$$

e sostituendo allora la (3.446) nella (3.447), si ha

$$\alpha^2\, m^2 \,=\, 1 \Rightarrow \alpha = \pm\frac{1}{m} \tag{3.448}$$

e, di conseguenza[171]

$$\beta \,=\, \mp\frac{m}{(pk)} \tag{3.449}$$

Abbiamo così trovato che il problema che ci eravamo posti ha soluzione, anzi ne ha due opposte[172], che sono

$$n^\mu = \mp\,\frac{1}{m}\left(\frac{m^2}{(pk)}k^\mu - p^\mu\right) \tag{3.450}$$

Volendo usare questi quadrivettori per definire il proiettore di spin, il fatto di averne trovati due opposti non amplia il numero delle soluzioni indipendenti perché, evidentemente, si ha

$$\Pi_\pm(n^\mu) = \Pi_\mp(-n^\mu)$$

Dati p^μ e k^μ in un riferimento assegnato, possiamo dunque, senza perdita alcuna di generalità, limitarci a considerare i soli quadrivettori di spin n^μ di cui alla (3.450), corrispondenti alla sola scelta di $\alpha = -1/m$, i.e.

$$n^\mu = \,\frac{1}{m}\left(\frac{m^2}{(pk)}k^\mu - p^\mu\right) \tag{3.451}$$

[171]Si noti che il prodotto scalare (pk) non può, in nessun caso, essere nullo. Esso è infatti un invariante di Lorentz e nel riferimento in cui la particella è ferma (riferimento del CM) esso vale $m\,\hat{k}^0$, dove abbiamo indicato con $(\hat{k}^0, \vec{\hat{k}})$ la forma assunta dal quadrivettore k^μ nel riferimento del CM. Si noti altresì che k^μ oppure $\lambda\, k^\mu$ definiscono lo stesso quadrivettore di spin, qualunque sia il numero reale $\lambda \neq 0$.

[172]Il fatto di aver trovato due soluzioni opposte è già scritto nelle equazioni (3.410) che definiscono il quadrivettore n^μ: esse non possono distinguerne il segno, quindi se n^μ è soluzione, allora anche $-n^\mu$ lo è.
Su questo punto ritorneremo, comunque, più avanti.

anche se, come vedremo, può essere più comodo mantenere comunque entrambe le scelte possibili di α, ovvero entrambi i segni come dalla (3.450).
Per conoscere, in generale, quale direzione di polarizzazione è individuata da questa soluzione, occorrerà riportarsi nel centro di massa senza ruotare gli assi, ovvero sarà necessario applicare a n^μ l'inversa della trasformazione di Lorentz definita dalla (3.129), cioè il boost $\mathcal{B}(\vec{p})^{-1}$ tale che $\mathcal{B}(\vec{p})^{-1}\, p = (m,0,0,0) \equiv \hat{p}$.
Come abbiamo appreso a suo tempo, la matrice $\mathcal{B}(\vec{p})^{-1}$ è così definita

$$\mathcal{B}(\vec{p})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{E}{m} & -\frac{p_x}{m} & -\frac{p_y}{m} & -\frac{p_z}{m} \\ -\frac{p_x}{m} & 1+\frac{p_x\, p_x}{m(E+m)} & \frac{p_x\, p_y}{m(E+m)} & \frac{p_x\, p_z}{m(E+m)} \\ -\frac{p_y}{m} & \frac{p_y\, p_x}{m(E+m)} & 1+\frac{p_y\, p_y}{m(E+m)} & \frac{p_y\, p_z}{m(E+m)} \\ -\frac{p_z}{m} & \frac{p_z\, p_x}{m(E+m)} & \frac{p_z\, p_y}{m(E+m)} & 1+\frac{p_z\, p_z}{m(E+m)} \end{pmatrix} \tag{3.452}$$

In questo modo, evidentemente

$$-\frac{1}{m}\, p^\mu \to (-1,0,0,0) \tag{3.453}$$

mentre, indicando con $\hat{k}^\mu$ l'espressione assunta dal quadrivettore k nel riferimento del CM definito a partire dal riferimento del Laboratorio attraverso la trasformazione $\mathcal{B}(p)^{-1}$, avremo

$$\frac{m^2}{m(pk)}\, k^\mu \to \frac{1}{\hat{k}^0}\, \hat{k}^\mu = (1, \frac{\vec{\hat{k}}}{\hat{k}^0}) \tag{3.454}$$

e dunque risulta che, nel CM, il quadrivettore n^μ che descrive la direzione di polarizzazione (3.451) diventa

$$n^\mu \to (0, \vec{\eta}), \qquad\qquad dove \qquad\qquad \vec{\eta} \equiv \frac{\vec{\hat{k}}}{\hat{k}^0} \tag{3.455}$$

per cui, in conclusione, avendo scelto n^μ nella forma (3.451), è unicamente la parte spaziale $\vec{\eta}$ del quadrivettore k^μ vista nel sistema di riferimento del CM a definire la *direzione e il verso* nel quale viene effettuata la proiezione[173] dello spin dagli operatori (Π_+ nel verso di $\vec{\eta}$)

$$\Pi_\pm = \frac{1 \pm \gamma_5\, \not{n}}{2}$$

[173] Si può anche scegliere di limitarsi ad usare solo il segno positivo nella (3.450), perché, come abbiamo già osservato, questo non conduce a nessuna limitazione sui possibili valori di $\vec{\eta}$ e quindi essa è in grado, a priori, di descrivere la proiezione dello spin in qualunque direzione.
L'arbitrarietà nella scelta del segno nella (3.450) è dunque una specie di ridondanza...
Cerchiamo di vederne meglio la ragione per la quale è comunque meglio mantenerla !
Immaginiamo dunque di aver fissato in modo arbitrario la direzione del versore $\vec{\eta}$ nel riferimento del CM. Costruiamo dunque il quadrivettore light-like

$$\hat{k}^\mu \equiv (1, \vec{\eta}) \tag{3.456}$$

Un proiettore di spin molto interessante è certamente quello che proietta su stati di elicità definita, ovvero nella direzione del moto della particella.
Per quanto abbiamo detto, evidentemente, fissato comunque il quadrimpulso della particella $p^\mu = (E, \vec{p})$, occorrerà cercare un quadrivettore space-like di modulo unitario n^μ che, nel riferimento del CM, punti proprio nella direzione di $\vec{p}$.
Cerchiamolo del tipo (3.445), avendo posto

$$k^\mu \equiv (p, \vec{p}) \tag{3.468}$$

Per quanto detto sopra, dalla (3.451), segue che la soluzione del tipo cercato sarà

$$n^\mu = \frac{1}{m}\left(\frac{m^2}{(pk)}k^\mu - p^\mu\right) \tag{3.469}$$

Vediamo se questa soluzione risolve il nostro problema ... .

---

e quindi poniamo

$$k = \mathcal{B}(\vec{p})\,\hat{k} \tag{3.457}$$

dove $\mathcal{B}(\vec{p}) = \mathcal{B}(-\vec{p})^{-1}$ essendo $\mathcal{B}(\vec{p})^{-1}$ il boost definito dalla (3.452).
Evidentemente allora (si ricordi che, per definizione $p \cdot k = \hat{p} \cdot \hat{k} = m$)

$$n^\mu = \frac{1}{m}\left(\frac{m^2}{(pk)}k^\mu - p^\mu\right) = k^\mu - \frac{p^\mu}{m} \tag{3.458}$$

individua la polarizzazione lungo $\vec{\eta}$ nel riferimento dove il quadrimpulso della particella è p^μ.
Ma noi sappiamo anche che $-n^\mu$ (segno negativo nella (3.450)) individua la polarizzazizone opposta, i.e.

$$\vec{\eta} \quad \leftrightarrow \quad k^\mu - \frac{p^\mu}{m} \tag{3.459}$$

$$-\vec{\eta} \quad \leftrightarrow \quad \frac{p^\mu}{m} - k^\mu \tag{3.460}$$

Però il proiettore nella direzione $-\vec{\eta}$, secondo la definizione di cui sopra, dovrebbe essere costruito a partire dal quadrivettore light-like (che ovviamente non è l'opposto del quadrivettore $\hat{k}$ definito dalla (3.456 !)

$$\hat{k}'^\mu \equiv (1, -\vec{\eta}) \tag{3.461}$$

definendo poi, analogamente a quanto sopra,

$$k' = \mathcal{B}(\vec{p})\,\hat{k}' \tag{3.462}$$

e quindi ponendo (segno positivo nella (3.450))

$$n'^\mu = \hat{k}'^\mu - \frac{p^\mu}{m} \tag{3.463}$$

Quale è dunque il legame fra i due quadrivettori $\frac{p^\mu}{m} - k^\mu$ e $\hat{k}'^\mu - \frac{p^\mu}{m}$?

Intanto osserviamo che

$$(kp) = Ep - p^2 = p(E-p) = p(E-p)\frac{E+p}{E+p} = \frac{m^2 p}{E+p} \tag{3.470}$$

e quindi risulta[174]

$$n^\mu = \frac{1}{m}\left(\frac{E+p}{p}\,k^\mu - p^\mu\right) = \frac{1}{m}\,(p\,,E\,\vec{n}) \tag{3.472}$$

dove

$$\vec{n} \equiv \frac{\vec{p}}{p} \tag{3.473}$$

Applichiamogli ora il boost di Lorentz (3.452) per vedere che forma esso assume nel riferimento del CM in modo da determinare la direzione in cui agisce il

---

La risposta è che essi coincidono.
Possiamo vedere questo in vari modi, per esempio applicando loro il boost $\mathcal{B}(\vec{p})^{-1}$, abbiamo

$$\mathcal{B}(\vec{p})^{-1}\left(\frac{p^\mu}{m} - k^\mu\right) = (1,\vec{0}) - (1,\vec{\eta}) = (0,-\vec{\eta}) \tag{3.464}$$

$$\mathcal{B}(\vec{p})^{-1}\left(\hat{k}'^\mu - \frac{p^\mu}{m}\right) = (1,-\vec{\eta}) - (1,\vec{0}) = (0,-\vec{\eta}) \tag{3.465}$$

Siccome il boost è una trasformazione invertibile, è provato che $\frac{p^\mu}{m} - k^\mu = \hat{k}'^\mu - \frac{p^\mu}{m}$.
Un altro modo per dimostrare la stessa cosa fa uso del fatto che, dalla loro definizione, risulta

$$k'^\mu + k^\mu = \mathcal{B}(\vec{p})(2,\vec{0}) = \frac{2}{m}\,\mathcal{B}(\vec{p})\,\hat{p} = \frac{2}{m}p^\mu \tag{3.466}$$

e quindi abbiamo che

$$\begin{aligned} n^\mu(-\vec{\eta}) &= k'^\mu - \frac{p^\mu}{m} = (k'^\mu + k^\mu) - k^\mu - \frac{p^\mu}{m} = \\ &= \frac{2}{m}p^\mu - k^\mu - \frac{p^\mu}{m} = \frac{p^\mu}{m} - k^\mu = -n^\mu(\vec{\eta}) \end{aligned} \tag{3.467}$$

Concludendo, se è vero che nella (3.450) potremmo certamente limitarci a un solo segno, mantenendo il doppio segno questo, pur non ampliando le soluzioni possibili, facilita, per esempio, l'individuazione del quadrivettore $n^\mu(-\vec{\eta})$ che proietta lo spin nella direzione opposta a quello in cui lo proietta $n^\mu(\vec{\eta})$, potendo porre, semplicemente $n^\mu(-\vec{\eta}) = -n^\mu(\vec{\eta})$.

[174] Infatti si ha

$$\begin{aligned} n^\mu &= \frac{1}{m}\left(\frac{E+p}{p}\,k^\mu - p^\mu\right) = \frac{1}{m}\frac{E+p}{p}\,(p,\vec{p}) - \frac{1}{m}p^\mu = \\ &= \frac{1}{m}\,(E+p,\,(E+p)\vec{n}) - \frac{1}{m}\,(E,\,\vec{p}) = \frac{1}{m}\,(p,\,E\,\vec{n}) \end{aligned} \tag{3.471}$$

proiettore di spin: si ha[175]

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{m}\,p^\mu \quad &\to \quad (-1,0,0,0) \\
\frac{E+p}{mp}\,k^\mu \quad &\to \quad \frac{E+p}{mp}\,\frac{E-p}{m}\,k^\mu = \frac{1}{p}\,(p,\vec{p}) \equiv (1,\vec{n}) \qquad \mathit{dove} \qquad \vec{n} \equiv \frac{\vec{p}}{p}
\end{aligned}
$$

per cui

$$\mathcal{B}(\vec{p})^{-1}\,n^\mu = (0,\vec{n}) \tag{3.476}$$

e dunque n^μ è proprio il quadrivettore che cercavamo per individuare i proiettori di elicità $\Sigma_\pm(\vec{p})$.

Ma vediamo adesso qual è l'azione di questi proiettori di elicità sugli spinori di Dirac. Osserviamo che

$$k^\mu = p^\mu \;-\; (E-p,0,0,0) \tag{3.477}$$

e quindi risulta

$$
\begin{aligned}
n^\mu \quad &= \quad \frac{1}{m}\left[\frac{E+p}{p}\;p^\mu - p^\mu\right] \;-\; \frac{E+p}{mp}\,(E-p)\,(1,0,0,0) = \\
&= \quad \frac{1}{m}\;\frac{E+p-p}{p}\,p^\mu \;-\; \frac{m^2}{mp}\,(1,0,0,0) = \frac{E}{mp}\,p^\mu \;-\; \frac{m}{p}\,(1,\vec{0})
\end{aligned}
\tag{3.478}
$$

Evidentemente si ha allora che

$$\not{n} \equiv n_\mu\gamma^\mu = \frac{E}{mp}\;\not{p} \;-\; \frac{m}{p}\,\gamma^0 \tag{3.479}$$

[175]Si dimostra infatti facilmente che, se k è dato dalla (3.468) e $\mathcal{B}(\vec{p})^{-1}$ dalla (3.452), allora risulta

$$\mathcal{B}(\vec{p})^{-1}\,k = \frac{E-p}{m}\,k$$

Infatti, data la (3.477) e vista la prima colonna della (3.452), abbiamo che

$$\mathcal{B}(\vec{p})^{-1}\,k = \hat{p} - (E-p)\,\frac{1}{m}\,(E,-\vec{p}) = (m - E\cdot\frac{E-p}{m},\frac{E-p}{m}\,\vec{p}) \tag{3.474}$$

ma

$$m - \frac{E(E-p)}{m} = \frac{m^2-E^2+Ep}{m} = \frac{m^2-m^2-p^2+Ep}{m} = \frac{E-p}{m}\,p$$

per cui è così dimostrato che effettivamente risulta

$$\mathcal{B}(\vec{p})^{-1}\,k = \frac{E-p}{m}(p,\vec{p}) = \frac{E-p}{m}\,k \tag{3.475}$$

Ne segue quindi che, quando questo operatore viene applicato, per esempio, alla soluzione $u(\vec{p})$ dell'equazione di Dirac, essendo

$$\not{p}\, u(\vec{p}) = m\, u(\vec{p}) \tag{3.480}$$

risulta

$$\not{\eta}\, u(\vec{p}) = \frac{E}{mp}\, m\, u(\vec{p}) \; - \; \frac{m}{p}\,\gamma^0\, u(\vec{p}) = \frac{E}{p}\, u(\vec{p}) \; - \; \frac{m}{p}\,\gamma^0\, u(\vec{p}) \tag{3.481}$$

per cui abbiamo

$$\Sigma_\pm(\vec{p})\, u(\vec{p}) \quad \equiv \quad \frac{1 \pm \gamma_5 \;\; \not{\eta}}{2}\; u(\vec{p}) = \frac{1}{2}\left[1 \pm \gamma_5 \left(\frac{E}{p} - \frac{m}{p}\gamma^0\right)\right] u(\vec{p}) \tag{3.482}$$

Come si vede, quindi, nel limite ultrarelativistico in cui $E \to +\infty$ (e conseguentemente $E/p \to 1$), i.e. nel limite in cui la massa m diventa trascurabile rispetto all'energia E della particella, si ha che i proiettori $\Sigma_\pm(\vec{p})$, sugli spinori $u(\vec{p})$, diventano[176] tali per cui

$$\Sigma_\pm(\vec{p})\, u(\vec{p}) \to \frac{1 \pm \gamma_5}{2}\, u(\vec{p}) \tag{3.504}$$

---

[176] E' istruttivo vedere più da vicino le implicazioni della (3.504).
Supponiamo, infatti, di considerare uno stato $u(\hat{p}) = \alpha_s\, u^{(s)}(\hat{p})$ con $|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 = 1$, ovvero il generico stato di una particella di Dirac vista nel suo riferimento di quiete.
Usando i proiettori $\chi_\pm$ definiti dalla (3.512), possiamo scomporre lo stato in questione nelle sue componenti chirali, ponendo

$$u(\hat{p}) = \chi_+\, u(\hat{p}) + \chi_-\, u(\hat{p}) \equiv u_+(\hat{p}) + u_-(\hat{p}) \tag{3.483}$$

e i due vettori $u_\pm(\hat{p})$ sono evidentemente tali che

$$u_\pm(\hat{p}) = \alpha_s\, u_\pm^{(s)}(\hat{p}) \tag{3.484}$$

dove

$$u_\pm^{(s)}(\hat{p}) \equiv \chi_\pm\, u^{(s)}(\hat{p}) = \frac{1}{2}\left[u^{(s)}(\hat{p}) \pm (i\sigma_2)_{rs}\, v^{(r)}(\hat{p})\right] \tag{3.485}$$

I vettori $u_\pm(\hat{p})$ risultano avere entrambi la stessa norma, infatti

$$\begin{aligned} u_\pm^\dagger(\hat{p}) \cdot u_\pm(\hat{p}) \quad &= \quad u^\dagger(\hat{p}) \cdot \chi_\pm^\dagger \cdot \chi_\pm \cdot u(\hat{p}) = u^\dagger(\hat{p}) \cdot \chi_\pm^2 \cdot u(\hat{p}) = u^\dagger(\hat{p}) \cdot \chi_\pm \cdot u(\hat{p}) = \\ &= \quad \frac{1}{2} u^\dagger(\hat{p}) \cdot u(\hat{p}) = m \end{aligned} \tag{3.486}$$

essendo $u^\dagger(\hat{p})\,\gamma_5\, u(\hat{p}) = 0$.

Immaginiamo ora di applicare a $u(\hat{p})$ un boost generico $\mathcal{B}(\vec{p})$: risulta

$$u^{(s)}(\vec{p}) = S(\mathcal{B}(\vec{p}))\, u^{(s)}(\hat{p}) \tag{3.487}$$

e si ha ancora, evidentemente, che

$$u(\vec{p}) = \chi_+\, u(\vec{p}) + \chi_-\, u(\vec{p}) \equiv u_+(\vec{p}) + u_-(\vec{p}) \tag{3.488}$$

Siccome γ_5 commuta con le $S(\Lambda)$, ne segue che

$$\chi_\pm\, u(\vec{p}) \equiv \chi_\pm S(\mathcal{B}(\vec{p}))\, u(\hat{p}) = S(\mathcal{B}(\vec{p}))\chi_\pm\, u(\hat{p}) = S(\mathcal{B}(\vec{p}))\, u_\pm(\hat{p}) \tag{3.489}$$

e dunque risulta

$$u(\vec{p}) = S(\mathcal{B}(\vec{p}))\, u_+(\hat{p}) + S(\mathcal{B}(\vec{p}))\, u_-(\hat{p}) \tag{3.490}$$

Ammettiamo ora che lo stato $u(\hat{p})$ rappresenti una particella di Dirac con lo spin allineato nella direzione $\vec{n}$ e che il boost $\mathcal{B}(\vec{p})$ avvenga nella stessa direzione della polarizzazione, conferendo quindi alla particella un impulso spaziale $p\,\vec{n}$. Evidentemente sarà

$$\Sigma_+(\vec{p})\, u(\vec{p}) = u(\vec{p}) \tag{3.491}$$

Ma abbiamo detto che, per gli spinori di tipo u, quando $E >> m$, $\Sigma_+(\vec{p}) \to \chi_+$ e dunque, nel limite di alta energia, quanto sopra implica che

$$u(\vec{p}) = \Sigma_+(\vec{p})\, u(\vec{p}) \to \chi_+\, u(\vec{p}) = u_+(\vec{p}) \tag{3.492}$$

Vista però la (3.488), che ne è di $u_-(\vec{p})$?
Il punto è che la rappresentazione del gruppo di Lorentz $S(\Lambda)$ *non* è unitaria e quindi non conserva la norma dei vettori a cui vengono applicati i suoi operatori. I vettori $u_\pm(\hat{p})$ hanno la stessa norma, ma questo non resta vero per i vettori $u_\pm(\vec{p})$!
Accade, in particolare, che, nel limite di alta energia, se l'impulso spaziale punta nella direzione dello spin relativo allo stato $u_+(\hat{p})$, allora il vettore $u_-(\vec{p})$ tende a zero. Abbiamo infatti

$$\begin{aligned} u_-(\vec{p}) &= S(\mathcal{B}(\vec{p}))\, u_-(\hat{p}) = S(\mathcal{B}(\vec{p}))\left[\alpha_s\, u_-^{(s)}(\hat{p})\right] = \frac{1}{2}\alpha_s\, S(\mathcal{B}(\vec{p}))\left[u^{(s)}(\hat{p}) - (i\sigma_2)_{rs} v^r(\hat{p})\right] = \\ &= \frac{1}{2}\alpha_s\left[u^{(s)}(\vec{p}) - (i\sigma_2)_{rs} v^r(\vec{p})\right] \end{aligned} \tag{3.493}$$

Ma essendo u_-, per definizione, autostato di γ_5 per l'autovalore -1, le sue grandi componenti sono necessariamente uguali e opposte alle sue piccole componenti: occupiamoci dunque delle prime, che indicheremo, per semplicità, con $w_-(\vec{p})$. Avendo già definito con $\vec{n}$ la direzione dell'impulso spaziale, dalle definizioni (3.352) e (3.355) degli spinori u e v, abbiamo che

$$w_-(\vec{p}) = \frac{1}{2}\alpha_s\left[\sqrt{E+m}\; w^{(s)} - (i\sigma_2)_{rs}\sqrt{E-m}\,(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})\;\tilde{w}^{(r)}\right] \tag{3.494}$$

ma, come osservato nella (3.373), risulta che $(i\sigma_2)_{rs}\;\tilde{w}^{(r)} = w^{(s)}$ e dunque

$$w_-(\vec{p}) = \frac{1}{2}\alpha_s\left[\sqrt{E+m}\; w^{(s)} - \sqrt{E-m}\,(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})\; w^{(s)}\right] \tag{3.495}$$

D'altronde, per ipotesi lo spinore $u(\hat{p})$ descrive uno stato di spin allineato proprio con la direzione $\vec{n}$, per cui, data la struttura di $u(\hat{p})$ in termini dei vettori bidimensionali $w^{(s)}$, deve essere necessariamente che

$$(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})\cdot\left(\alpha_s\, w^{(s)}\right) = \alpha_s\, w^{(s)} \tag{3.496}$$

e dunque risulta

$$\begin{aligned} w_-(\vec{p}) &= \frac{1}{2}\left[\sqrt{E+m} - \sqrt{E-m}\right]\left(\alpha_s\, w^{(s)}\right) \approx \frac{1}{2}\left[\sqrt{E} + \sqrt{E}\frac{m}{2E} - \sqrt{E} + \sqrt{E}\frac{m}{2E}\right]\left(\alpha_s\, w^{(s)}\right) = \\ &= \frac{m}{2E}\sqrt{E}\left(\alpha_s\, w^{(s)}\right) \end{aligned} \tag{3.497}$$

Per quanto riguarda, invece, l'azione di $\Sigma_\pm(\vec{p})$ sugli spinori $v(\vec{p})$, partendo dal fatto che adesso l'equazione di Dirac fornisce

$$\not{p}\, v(\vec{p}) = -m\, v(\vec{p}) \tag{3.505}$$

ne risulta che

$$\not{\eta}\, v(\vec{p}) = -\frac{E}{mp}\, m\, v(\vec{p}) \; - \; \frac{m}{p}\,\gamma^0\, v(\vec{p}) = -\frac{E}{p}\, v(\vec{p}) \; - \; \frac{m}{p}\,\gamma^0\, v(\vec{p}) \tag{3.506}$$

e dunque si ha

$$\Sigma_\pm(\vec{p})\, v(\vec{p}) \;\; \equiv \;\; \frac{1 \pm \gamma_5 \;\not{\eta}}{2}\; v(\vec{p}) = \frac{1}{2}\left[1 \mp \gamma_5 \left(\frac{E}{p} + \frac{m}{p}\gamma^0\right)\right]\, v(\vec{p}) \tag{3.507}$$

---

il quale, evidentemente, tende a zero nel limite in cui $E \to \infty$.
Per completezza, vediamo adesso che cosa succede, invece, a $u_+(\vec{p})$. Si ha

$$\begin{aligned} u_+(\vec{p}) \;&=\; S(\mathcal{B}(\vec{p}))\, u_+(\hat{p}) = S(\mathcal{B}(\vec{p}))\left[\alpha_s\, u_+^{(s)}(\hat{p})\right] = \frac{1}{2}\alpha_s\, S(\mathcal{B}(p))\left[u^{(s)}(\hat{p}) + (i\sigma_2)_{rs} v^r(\hat{p})\right] = \\ &=\; \frac{1}{2}\alpha_s\left[u^{(s)}(\vec{p}) + (i\sigma_2)_{rs} v^r(\vec{p})\right] \end{aligned} \tag{3.498}$$

Stavolta u_+ è autovettore di γ_5 per l'autovalore +1 e dunque le sue grandi componenti coincidono con le piccole: indichiamole con $w_+(\vec{p})$. Risulta

$$w_+(\vec{p}) = \frac{1}{2}\alpha_s\left[\sqrt{E+m}\; w^{(s)} + (i\sigma_2)_{rs}\sqrt{E-m}\,(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})\;\tilde{w}^{(r)}\right] \tag{3.499}$$

e quindi, ripetendo le stesse considerazioni di cui sopra, possiamo concludere che

$$\begin{aligned} w_+(\vec{p}) \;&=\; \frac{1}{2}\left[\sqrt{E+m} + \sqrt{E-m}\right]\left(\alpha_s\, w^{(s)}\right) \approx \frac{1}{2}\left[\sqrt{E} + \sqrt{E}\frac{m}{2E} + \sqrt{E} - \sqrt{E}\frac{m}{2E}\right]\left(\alpha_s\, w^{(s)}\right) = \\ &=\; \sqrt{E}\,\left(\alpha_s\, w^{(s)}\right) \end{aligned} \tag{3.500}$$

il cui confronto con la (3.497) mostra in particolare che

$$w_-(\vec{p}) \approx \frac{m}{2E}\, w_+(\vec{p}) \tag{3.501}$$

ovvero che la componente di elicità *sbagliata* si riduce, ad alta energia, proporzionalemte a $\frac{m}{2E}$.
Concludiamo infine l'argomento, occupandoci di $u(\vec{p})$ stesso: dalla definizione risulta che

$$u(\vec{p}) = \alpha_r \begin{pmatrix} \sqrt{E+m}\; w^{(r)} \\ \sqrt{E-m}\,(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})\; w^{(r)} \end{pmatrix} \tag{3.502}$$

ovvero, vista la polarizzazione concorde con la direzione dell'impulso, per quanto già osservato

$$u(\vec{p}) = \alpha_r \begin{pmatrix} \sqrt{E+m}\; w^{(r)} \\ \sqrt{E-m}\; w^{(r)} \end{pmatrix} \approx \sqrt{E}\begin{pmatrix} \alpha_r\, w^{(r)} \\ \alpha_r\, w^{(r)} \end{pmatrix} + \frac{m}{2\sqrt{E}}\begin{pmatrix} \alpha_r\, w^{(r)} \\ -\alpha_r\, w^{(r)} \end{pmatrix} \tag{3.503}$$

la quale mostra direttamente, in modo evidente, la separazione di $u(\vec{p})$ nelle due componenti $u_+(\vec{p})$ e $u_-(\vec{p})$, unitamente al fatto che, per $E >> m$, $\Sigma_+(\vec{p})u(\vec{p}) \to \chi_+ u(\vec{p})$.

ovvero, nel limite ultrarelativistico in cui $E >> m$, abbiamo che adesso risulta

$$\Sigma_\pm(\vec{p})\, v(\vec{p}) \to \frac{1 \mp \gamma_5}{2}\, v(\vec{p}) \tag{3.508}$$

Essendo

$$\Sigma_\pm^\dagger = \gamma^0\, \Sigma_\pm\, \gamma^0; \qquad (\chi_\pm)^\dagger = \chi_\pm \tag{3.509}$$

Riguardo poi agli spinori barrati, è facile concludere da quanto sopra che risulta

$$\Sigma_\pm(\vec{p})\, u(\vec{p}) \to \frac{1 \pm \gamma_5}{2}\, u(\vec{p}) \quad \Leftrightarrow \quad \bar{u}(\vec{p})\Sigma_\pm(\vec{p}) \to \bar{u}(\vec{p})\frac{1 \mp \gamma_5}{2} \tag{3.510}$$

$$\Sigma_\pm(\vec{p})\, v(\vec{p}) \to \frac{1 \mp \gamma_5}{2}\, v(\vec{p}) \quad \Leftrightarrow \quad \bar{v}(\vec{p})\Sigma_\pm(\vec{p}) \to \bar{v}(\vec{p})\frac{1 \pm \gamma_5}{2} \tag{3.511}$$

E' opportuno a questo punto ricordare che, indipendentemente dai proiettori di elicità, sono comunque definiti gli operatori[177] *scalari* seguenti

$$\chi_\pm \equiv \frac{1 \pm \gamma_5}{2} \tag{3.512}$$

---

[177]Occorre mettere in evidenza una differenza importante che esiste fra i proiettori $\Lambda_\pm$ e $\Pi_\pm$ con quelli di chiralità $\chi_\pm$, definiti dalla (3.512), almeno nel caso di massa non nulla.
Evidentemente, essendo infatti

$$[\Lambda_\pm, \not{p} \pm m] = 0 = [\Pi_\pm, \not{p} \pm m]$$

ne segue che se $\psi(p)$ è soluzione dell'equazione di Dirac per energie positive/negative, allora anche $\Lambda_\pm\, \psi$ e $\Pi_\pm\, \psi$ lo sono (essendo, eventualmente nulle ...).
Questo, se $m \neq 0$, non è vero per $\chi_\pm$ proprio perché

$$[\chi_\pm, \not{p} \pm m] \neq 0$$

Supponiamo infatti, per esempio, che $\psi(p)$ soddisfi l'equazione

$$(\not{p} - m)\, \psi(p) = 0$$

ovvero sia una soluzione dell'equazione di Dirac per energie positive e dunque uno spinore di tipo u: siccome γ_5 anticommuta con le γ^μ, ecco che per $\gamma_5\psi$ vale piuttosto l'equazione

$$(\not{p} + m)\, \gamma_5\, \psi(p) = 0$$

ovvero, si tratta di uno spinore di tipo v. Evidentemente, se la massa è nulla, l'argomento cade perché in quel caso $\not{p} \pm m \to \not{p}$; ma nel caso di massa non nulla possiamo concludere, per quanto riguarda gli stati $\psi_\pm \equiv \chi_\pm\psi$, che essi *non* sono soluzioni dell'equazione di Dirac.

i quali proiettano su stati di *chiralità*[178] definita[179]: l'operatore χ_- entra direttamente nella definizione della corrente debole carica ed è proprio a causa della sua presenza che le interazioni deboli violano[180] la parità !

Come abbiamo osservato sopra, il proiettore chirale è scalare per trasformazioni di Lorentz e dunque stati di chiralità definita restano tali anche al cambiare del sistema di riferimento.
Abbiamo invece visto che quanto al proiettore di spin, per selezionare la stessa direzione al cambiare del riferimento, si deve modificare in modo ben preciso il quadrivettore n^μ (attraverso, appunto, la trasformazione di Lorentz (3.444)).
Ma che dire del proiettore di elicità ? Potrebbe sembrare che, poichè i proiettori $\Sigma_\pm(\vec{p})$ sono definiti come degli *opportuni* proiettori di spin, anche questi mutino al cambiare del riferimento nello stesso modo dei primi.
Questo però non è vero.
La ragione è che, fissato un sistema di riferimento, $\Sigma_\pm(\vec{p})$ viene definito attraverso il quadrivettore n^μ dato dalla (3.472) e quest'ultima definizione *non* coincide con quella che ha condotto alla trasformazione (3.444) nel caso di un proiettore di spin, perché, mentre in questo caso vogliamo mantenere la stessa direzione nel CM, nel caso dell'elicità vogliamo che la direzione nel CM sia allineata con la direzione di moto della particella nel riferimento dato, e quindi, a meno di un boost in questa stessa direzione, in generale avremo direzioni differenti.

In altre parole, mentre $\Lambda_\pm$ e $\Pi_\pm$ sono proiettori compatibili con la dinamica libera della particella di Dirac, il proiettore di chiralità, se la massa della particella è diversa da zero, non gode di questa proprietà: esso va inteso come un semplice proiettore *cinematico*.

Per esempio, se ψ è il campo del neutrino e questo non ha massa nulla, allora non è corretto dire che esso è descritto da $\frac{1-\gamma_5}{2}\,\psi$ e quindi che lo stato di neutrino è autostato della chiralità per l'autovalore -1. Ciò che è corretto è che la presenza del proiettore di chiralità nell'espressione della corrente debole e quindi nel vertice dell'interazione favorisce lo stato di neutrino di elicità negativa (dato che, usualmente, la massa del neutrino risulta molto minore della sua energia nel sistema del laboratorio). Detto altrimenti, in un processo del tipo

$$e^- + A \to B + \nu$$

con A e B anch'essi particelle di Dirac massive, il neutrino, nel sistema del CM del processo, avrà prevalentemente elicità negativa, con una piccola contaminazione di elicità positiva dell'ordine di m/E e, in ogni caso, sarà descritto da uno spinore di tipo u !

[178] La parola *chiralità* deriva dal greco $\chi\epsilon\iota\rho\ \ \chi\epsilon\iota\rho o\varsigma$ che significa *mano*. Indica la proprietà di avere un'immagine speculare non sovrapponibile a sé, come avviene, appunto, nel caso di una mano. Per parità, abbiamo infatti che $\chi_+ \longleftrightarrow \chi_-$.

[179] Solo nel caso in cui $E >> m$, come abbiamo visto, questi stati possono essere identificati con quelli di *elicità* definita !

[180] Intuitivamente possiamo già rendercene conto fin da ora in quanto, per esempio, nel caso ultrarelativistico, a causa di χ_- verrà selezionato nella dinamica del processo, per la particella, lo stato di elicità -1 e per l'antiparticella quello con l'elicità $+1$. Ed è proprio il fatto che i due stati di elicità non entrano nella dinamica nello stesso modo che è all'origine della violazione della simmetria di parità ...

Come abbiamo osservato, se in un dato sistema di riferimento è

$$p^\mu \equiv (E,\, p\,\vec{n}) \tag{3.513}$$

allora ne segue che, in questo riferimento, il quadrivettore che definisce il proiettore di elicità è il seguente

$$n^\mu = \frac{1}{m}(p,\, E\,\vec{n}) \tag{3.514}$$

Dunque, se il quadrimpulso della particella diventa

$$p'^\mu = (E',\, p'\,\vec{n}\,') \tag{3.515}$$

dovremo usare semplicemente il nuovo quadrivettore

$$n'^\mu = \frac{1}{m}(p',\, E'\,\vec{n}\,') \tag{3.516}$$

Volendo esplicitare la trasformazione di Lorentz che fa passare da n^μ a n'^μ, possiamo osservare che questi "quadrivettori" di spin sono definiti in modo tale che risulti

$$\mathcal{B}(\vec{p})^{-1}\, n^\mu = (0,\, \vec{n}); \qquad \mathcal{B}(\vec{\Lambda p})^{-1}\, n'^\mu = (0,\, \vec{n'}) \tag{3.517}$$

essendo, per definizione

$$p^\mu = (E,\, p\,\vec{n}); \qquad \Lambda p \equiv p'^\mu = (E',\, p'\vec{n'}) \tag{3.518}$$

Dunque, se R è una qualsiasi rotazione[181] tale che

$$R\,\vec{n} = \vec{n'} \tag{3.519}$$

allora abbiamo che, come quadrivettori, risulta

$$n' = \mathcal{B}(\vec{\Lambda p})\, R\, \mathcal{B}(\vec{p})^{-1}\, n \tag{3.520}$$

da confrontare con la (3.441) in cui R manca perché, in quel caso, la direzione di proiezione riportata nel CM restava fissa, mentre, nel caso dell'elicità, essendo questa direzione legata a quella dell'impulso nel sistema del Laboratorio, essa non resta, in generale, fissa al cambiare dello stesso.

[181] Per esempio R può essere la rotazione definita dal versore individuato dal prodotto vettoriale di $\vec{n}$ e $\vec{n'}$ e dall'angolo il cui seno è l'ampiezza del prodotto vettore citato ...

E veniamo adesso alla quantizzazione del campo di Dirac.
L'espansione del campo in termini di operatori di creazione/distruzione di particella/antiparticella è la seguente[182]

$$\psi(x) = \sum_{r=1}^{2} \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \{a^{(r)}(\vec{p})\, u^{(r)}(\vec{p})\, e^{-ipx} + b^{\dagger(r)}(\vec{p})\, v^{(r)}(\vec{p})\, e^{ipx}\} \quad (3.521)$$

$$\bar{\psi}(x) = \sum_{r=1}^{2} \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \{b^{(r)}(\vec{p})\, \bar{v}^{(r)}(\vec{p})\, e^{-ipx} + a^{\dagger(r)}(\vec{p})\, \bar{u}^{(r)}(\vec{p})\, e^{ipx}\} \quad (3.522)$$

dove, al solito[183]

- $a^{(r)}(\vec{p})$ annichila la particella di quadrimpulso $(E_p\,, \vec{p}) = (\sqrt{m^2 + |\vec{p}|^2}, \vec{p})$ e di stato di spin r;
- $a^{\dagger(r)}(\vec{p})$ crea la particella di quadrimpulso $(E_p\,, \vec{p})$ e di stato di spin r;
- $b^{(r)}(\vec{p})$ annichila l'antiparticella di quadrimpulso $(E_p\,, \vec{p})$ e di spin r;
- $b^{\dagger(r)}(\vec{p})$ crea l'antiparticella di quadrimpulso $(E_p\,, \vec{p})$ e di stato di spin r

e questi operatori soddisfano le regole di *anticommutazione* (tutte le altre sono nulle ...) seguenti

$$\{a^{(r)}(\vec{p}), a^{\dagger(s)}(\vec{p'})\} = \{b^{(r)}(\vec{p}), b^{\dagger(s)}(\vec{p'})\} = 2\, E_p\, (2\pi)^3\, \delta_{rs}\, \delta^3(\vec{p} - \vec{p'}) \quad (3.523)$$

Sotto il gruppo di Poincaré, essi si trasformano secondo la legge seguente[184]

$$U(a,\Lambda)\, a^{(s)}(p)\, U^{-1}(a,\Lambda) = e^{-ia\cdot\Lambda p}\, R_{sr}\, a^{(r)}(\Lambda p) \quad (3.533)$$

$$U(a,\Lambda)\, b^{(s)}(p)\, U^{-1}(a,\Lambda) = e^{-ia\cdot\Lambda p}\, R_{sr}\, b^{(r)}(\Lambda p) \quad (3.534)$$

[182] Dato un quadrimpulso p qualsiasi, quando non c'è possibilità di confusione, per comodità useremo equivalentemente i simboli $a^{(r)}(p)$ e $u^{(r)}(p)$ al posto di $a^{(r)}(\vec{p})$ e $u^{(r)}(\vec{p})$!

[183] Si osservi che, come nel caso del campo scalare e vettoriale, quelle che nel gergo della prima quantizzazione abbiamo chiamato *soluzioni a energia negativa*, cioe le soluzioni che, nel caso in esame, sono associate agli spinori di tipo v, si riferiscono semplicemente alle antiparticelle !

[184] Questa legge di trasformazione discende direttamente dalle leggi di trasformazione (3.372) e (3.385) degli spinori u e v sotto il gruppo di Lorentz, assunto che vogliamo che, per il campo $\psi(x)$, valga appunto la legge di trasformazione (3.321).

Dimostriamo dunque che le leggi di trasformazione (3.533) e (3.534) conducono alla (3.321). Per fare questo, partiamo dalla definizione della decomposizione spettrale del campo, i.e. dalla relazione

$$\psi(x) = \sum_{r=1}^{2} \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \{a^{(r)}(p)\, u^{(r)}(p)\, e^{-ipx} + b^{\dagger(r)}(p)\, v^{(r)}(p)\, e^{ipx}\} \quad (3.524)$$

dove R è la matrice di $SU(2)$ individuata dalla rotazione di Wigner $\mathcal{R}(\Lambda^{-1}, \Lambda\, p) \equiv \mathcal{R}^{-1}(\Lambda, p)$ definita per una generica trasformazione $\Gamma \in \mathcal{L}_+^\uparrow$, come si ricorderà, nel modo seguente[185]

$$\mathcal{R}(\Gamma, q) \equiv \mathcal{B}(\Gamma q)^{-1}\ \Gamma\ \mathcal{B}(q) \tag{3.537}$$

---

ne segue che

$$\begin{aligned} U(a,\Lambda)\,\psi(x)\,U^{-1}(a,\Lambda) \;&=\; \sum_{r=1}^{2}\int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\{U(a,\Lambda)\,a^{(r)}(p)\,U^{-1}(a,\Lambda)\,u^{(r)}(p)\,e^{-ipx}\;+\\ &+\;\; U(a,\Lambda)\,b^{\dagger(r)}(p)\,U^{-1}(a,\Lambda)\,v^{(r)}(p)\,e^{ipx}\} \end{aligned} \tag{3.525}$$

e dunque, imponendo la (3.533) e la (3.534), ne segue che

$$\begin{aligned} U(a,\Lambda)\,\psi(x)\,U^{-1}(a,\Lambda) \;&=\; \sum_{r=1}^{2}\int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\{e^{-ia\cdot\Lambda p}\,R_{rs}\,a^{(s)}(\Lambda p)\,u^{(r)}(p)\,e^{-ipx}\;+\\ &+\;\; e^{ia\cdot\Lambda p}\,R^*_{rs}\,b^{\dagger(s)}(\Lambda p)\,v^{(r)}(p)\,e^{ipx}\} \end{aligned} \tag{3.526}$$

e ponendo $\Lambda p = q$, essendo $(px) = \Lambda p \cdot \Lambda x = q \cdot \Lambda x$, risulta

$$\begin{aligned} U(a,\Lambda)\,\psi(x)\,U^{-1}(a,\Lambda) \;&=\; \sum_{r=1}^{2}\int \frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3}\{e^{-iaq}\,R_{rs}\,a^{(s)}(q)\,u^{(r)}(\Lambda^{-1}q)\,e^{-iq\cdot\Lambda x}\;+\\ &+\;\; e^{iaq}\,R^*_{rs}\,b^{\dagger(s)}(q)\,v^{(r)}(\Lambda^{-1}q)\,e^{iq\cdot\Lambda x}\} \end{aligned} \tag{3.527}$$

Ma abbiamo visto (cfr. (3.372) e (3.385)) che, in generale, risulta

$$S(\Gamma)\,u^{(s)}(q) \;=\; R(\Gamma,q)_{ks}\,u^{(k)}(\Gamma q) \tag{3.528}$$

$$S(\Gamma)\,v^{(s)}(q) \;=\; R^*(\Gamma,q)_{ks}\,v^{(k)}(\Gamma q) \tag{3.529}$$

dove la matrice R che compare nella (3.528) e (3.529) è la matrice di $SU(2)$ individuata dalla rotazione di Wigner $\mathcal{R}(\Gamma, q)$. Facendo allora $\Gamma = \Lambda^{-1}$, si ha

$$S(\Lambda^{-1})\,u^{(s)}(q) \;=\; R_{ks}\,u^{(k)}(\Lambda^{-1}q) \tag{3.530}$$

$$S(\Lambda^{-1})\,v^{(s)}(q) \;=\; R^*_{ks}\,v^{(k)}(\Lambda^{-1}q) \tag{3.531}$$

da cui, sostituendo nella (3.527), si ottiene appunto che

$$U(a,\Lambda)\,\psi(x)\,U^{-1}(a,\Lambda) = S^{-1}(\Lambda)\,\psi(a+\Lambda x) \tag{3.532}$$

[185] Si osservi che se partiamo dal sistema del CM, i.e. se il quadrimpulso di partenza è $\hat{p} \equiv (m,0,0,0)$ mentre $\Gamma = \mathcal{B}(p)$, allora la rotazione di Wigner $\mathcal{R}(\mathcal{B}(p), \hat{p})$ coincide semplicemente con l'indentità, infatti essendo $\mathcal{B}(\hat{p}) = I$, $\mathcal{B}(p)\,\hat{p} \equiv p$, $\mathcal{B}(\Gamma\hat{p})^{-1} = \mathcal{B}(p)^{-1}$ si ha $\mathcal{B}(\Gamma p)^{-1}\ \Gamma\ \mathcal{B}(p) = \mathcal{B}(\Gamma\hat{p})^{-1}\ \Gamma\ I \equiv I$ e quindi risulta in particolare che

$$U(a,\mathcal{B}(p))\,a^{(r)}(\hat{p})\,U^{-1}(a,\mathcal{B}(p)) \;=\; e^{-iap}\ a^{(r)}(p) \tag{3.535}$$

$$U(a,\mathcal{B}(p))\,b^{(r)}(\hat{p})\,U^{-1}(a,\mathcal{B}(p)) \;=\; e^{-iap}\ b^{(r)}(p) \tag{3.536}$$

Occupiamoci ora della questione della normalizzazione dei campi ψ e $\bar{\psi}$. Anche in questo caso, evidentemente, abbiamo libertà di normalizzazione, essendo l'equazione di Dirac una equazione differenziale lineare e omogenea.

Questa normalizzazione viene fissata a partire dalla funzione[186] d'onda $\Psi^{(s)}_{\vec{q}}(x)$ associata in rappresentazione delle coordinate allo stato di particella libera con impulso $\vec{q}$ e stato di spin s, i.e. $|\vec{q}, s> \equiv a^{\dagger(s)}(\vec{q})|\Omega>$, data da

$$\Psi^{(s)}_{\vec{q}}(x) = u^{(s)}(\vec{q})\; e^{-iqx} \tag{3.555}$$

La densità di corrente associata a questo stato, via il teorema di Noethër per l'invarianza in forma della Lagrangiana sotto una trasformazione di gauge di prima specie, è data da

$$j^\mu(x) = \bar{\Psi}^{(s)}_q(x)\,\gamma^\mu\,\Psi^{(s)}_q(x) = \bar{u}^{(s)}(\vec{q})\,\gamma^\mu\,u^{(s)}(\vec{q})$$

da cui ne segue che la componente temporale, che fornisce la densità di particelle per unità di volume è pari a

$$\rho(x) = j^0(x) = \bar{u}^{(s)}(\vec{q})\,\gamma^0\,u^{(s)}(\vec{q}) = u^{+(s)}(\vec{q})\,u^{(s)}(\vec{q}) = 2E \tag{3.556}$$

Lo stesso accade per l'antiparticella.

---

[186] Anche in questo caso la funzione d'onda della particella si può determinare in termini del campo $\psi(x)$, nel modo seguente

$$\begin{aligned}
\Psi^{(s)}_{\vec{q}}(x) &= <\Omega|\psi(x)a^{\dagger(s)}(\vec{q})|\Omega>= \\
&= \sum_{r=1}^{2}\int\frac{d^3p}{2E(2\pi)^3} <\Omega|\{a^{(r)}(\vec{p})\,u^{(r)}(\vec{p})\,e^{-ipx} \;+\; b^{\dagger(r)}(\vec{p})\,v^{(r)}(\vec{p})\,e^{ipx}\}a^{\dagger(s)}(\vec{q})|\Omega>= \\
&= \sum_{r=1}^{2}\int\frac{d^3p}{2E(2\pi)^3}u^{(r)}(\vec{p})\,e^{-ipx}\; <\Omega|\{a^{(r)}(\vec{p})\,,a^{\dagger(s)}(\vec{q})\}|\Omega>= u^{(s)}(\vec{q})\,e^{-iqx} \qquad (3.538)
\end{aligned}$$

Lo stesso risultato finale vale anche per la funzione d'onda dell'antiparticella, anche se questo è meno immediato.
Per convincercene, iniziamo ricordando che se $\Psi(x)$ è soluzione dell'equazione di Dirac libera, allora anche

$$\Psi_C(x) \equiv \mathcal{C}^{-1}\,\bar{\Psi}(x)^t \quad con \quad \mathcal{C} \equiv i\gamma^0\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\mathcal{C}^{-1} \tag{3.539}$$

lo è, e Ψ_C è detta *la soluzione coniugata di carica* della Ψ.

La ragione di questo nome risiede nel fatto che, in presenza di interazione elettromagnetica, usando l'accoppiamento canonico minimale, i.e. ($\hbar = c = 1$)

$$p^\mu \to p^\mu - \frac{e}{c} A^\mu \quad \Leftrightarrow \quad i\,\partial^\mu \to i\,\partial^\mu - \frac{e}{c} A^\mu \tag{3.540}$$

allora se Ψ è soluzione dell'equazione di Dirac in presenza di un dato campo elettromagnetico A^μ, ovvero se accade che

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - e\,A_\mu\,\gamma^\mu)\,\Psi - m\,\Psi = 0 \tag{3.541}$$

ne segue che la Ψ_C definita sopra risolve l'equazione di Dirac nello stesso campo esterno ma per una particella di carica opposta (e stessa massa), i.e. risulta

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu + e\,A_\mu\,\gamma^\mu)\,\Psi_C - m\,\Psi_C = 0 \tag{3.542}$$

Infatti, prendendo l'hermitiana coniugata dell'equazione di partenza (ricordiamo che A^μ è reale), abbiamo

$$\begin{aligned} & (i\gamma^\mu \partial_\mu - e\,A_\mu\,\gamma^\mu)\,\Psi - m\,\Psi = 0 \Rightarrow \partial_\mu \Psi^\dagger(-i\gamma^{\mu\dagger}) - e\,A_\mu\,\Psi^\dagger(\gamma^\mu)^\dagger - m\,\Psi^\dagger = 0 \\ \Rightarrow\quad & -i\partial_\mu \Psi^\dagger \gamma^{\mu\dagger}\gamma^0 - e\,A_\mu\,\Psi^\dagger \gamma_\mu^\dagger \gamma^0 - m\,\Psi^\dagger \gamma^0 = 0 \\ \Rightarrow\quad & -i\partial_\mu \Psi^\dagger \gamma^0\gamma^0\gamma^{\mu\dagger}\gamma^0 - e\,A_\mu \Psi^\dagger \gamma^0\gamma^0\gamma_\mu^\dagger \gamma^0 - m\,\Psi^\dagger\gamma^0 = 0 \end{aligned} \tag{3.543}$$

dove abbiamo usato il fatto che $(\gamma^0)^2 = I$.
D'altronde $\Psi^\dagger\gamma^0 = \bar\Psi$ e $\gamma^0\gamma^{\mu\dagger}\gamma^0 = \gamma^\mu$, dunque otteniamo che vale l'equazione

$$-i\partial_\mu \bar\Psi\gamma^\mu - eA_\mu\bar\Psi\gamma^\mu - m\,\bar\Psi = 0 \tag{3.544}$$

per cui trasponendo, si ha

$$-i\partial_\mu(\gamma^\mu)^t\,\bar\Psi^t - eA_\mu(\gamma^\mu)^t\,\bar\Psi^t - m\,\bar\Psi^t = 0 \tag{3.545}$$

e se moltiplichiamo a sinistra per la matrice $\mathcal{C}^{-1}$, che gode delle proprietà per cui

$$\mathcal{C}\,(\gamma^\mu)^t = -\gamma^\mu\,\mathcal{C}\,; \quad \mathcal{C}^{-1} = -\mathcal{C} = \mathcal{C}^t \tag{3.546}$$

ecco che risulta

$$\begin{aligned} & -i\partial_\mu \mathcal{C}^{-1}(\gamma^\mu)^t\bar\Psi^t - eA_\mu\,\mathcal{C}^{-1}(\gamma^\mu)^t\bar\Psi^t - m\,\mathcal{C}^{-1}\,\bar\Psi^t = 0 \\ \Rightarrow\quad & i\partial_\mu\gamma^\mu\,\mathcal{C}^{-1}\bar\Psi^t + eA_\mu\gamma^\mu\,\mathcal{C}^{-1}\bar\Psi^t - m\,\mathcal{C}^{-1}\,\bar\Psi^t = 0 \end{aligned} \tag{3.547}$$

per cui, ponendo appunto $\mathcal{C}^{-1}\bar\Psi^t \equiv \Psi_C$, otteniamo infine l'equazione

$$i\partial_\mu\gamma^\mu\Psi_C + eA_\mu\gamma^\mu\Psi_C - m\,\Psi_C = 0 \tag{3.548}$$

che prova appunto la (3.542).
In assenza di campo elettromagnetico Ψ e Ψ_c diventano soluzioni libere e se Ψ è una soluzione a energia positiva, allora Ψ_C è, evidentemente (data la coniugazione complessa) una soluzione a energia negativa e viceversa.

In prima quantizzazione, l'associazione degli stati di antiparticella con le soluzioni a energia negativa procede attraverso l'identificazione degli *stati di antiparticella* con le soluzioni coniugate di carica delle soluzioni a energia negativa; per cui, se prendiamo la generica soluzione piana a energia negativa $\Psi = v^{(s)}(\vec p)\,e^{ipx}$, essa individua uno stato di antiparticella libera avente funzione d'onda

$$\Psi_C = \mathcal{C}^{-1}\,\bar v^{(s)}(\vec p)^t\,e^{-ipx} \tag{3.549}$$

Per quanto riguarda, poi, l'algebra del campo, essa è definita dalle regole di *anticommutazione* (3.523) fra gli operatori di creazione e distruzione.
Quanto ai campi ψ e $\bar{\psi}$, il loro anticommutatori si possono evidentemente ottenere a partire dalle decomposizioni (3.521) e (3.522) degli stessi.
Risulta che

$$\{\psi_\alpha(x),\, \psi_\beta(y)\} = 0 = \left\{\psi^\dagger_\alpha(x),\, \psi^\dagger_\beta(y)\right\} \tag{3.557}$$

mentre, a tempi uguali, si ha

$$\left\{\psi_\alpha(x),\, \psi^\dagger_\beta(y)\right\}_{x^0=y^0} = \delta_{\alpha\beta}\; \delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \tag{3.558}$$

---

che è evidentemente una soluzione a energia positiva, quindi esprimibile mediante gli spinori di tipo u. Abbiamo infatti che (i v_0 sono reali ...)

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^{-1}\, \bar{v}^{(s)}(\vec{p})^t &= \mathcal{C}^{-1} \left(\bar{v}^{(s)}_0 \frac{m-\not{p}}{\sqrt{E_p+m}}\right)^t = \mathcal{C}^{-1}\, \frac{m-\not{p}^t}{\sqrt{E_p+m}} \gamma^0\, v^{*(s)}_0 = \\ &= \frac{m+\not{p}}{\sqrt{E_p+m}}\, \mathcal{C}^{-1}\, \gamma^0\, v^{(s)}_0 \end{aligned} \tag{3.550}$$

Poiché è immediato, dalla definizione, provare che

$$\mathcal{C}^{-1}\, \gamma^0\, v^{(s)}_0 = u^{(s)}_0 \tag{3.551}$$

ecco che, a quadrimpulso fissato, anche per l'antiparticella, la funzione d'onda ha la stessa forma di quella per la particella, ovvero (in realtá, come vedremo, é ancora possibile un fattore di fase arbitrario ...)

$$\Psi_C = \mathcal{C}^{-1}\, \bar{v}^{(s)}(\vec{p})^t\, e^{-ipx} = u^{(s)}(\vec{p})\, e^{-ipx} \tag{3.552}$$

E' ragionevole ? Sì perché sia la particella che l'antiparticella, da un punto di vista puramente cinematico, hanno esattamente le stesse proprietà.
Possiamo quindi concludere, nel caso, per esempio, di elettrone e positrone, che

$$\textit{elettrone} \quad : \quad \Psi^{(s)}_{\vec{q}}(x) = <\Omega|\, \psi(x)\, a^{\dagger(s)}(\vec{q})\, |\Omega> = u^{(s)}(\vec{q})\, e^{-iqx} \tag{3.553}$$

$$\begin{aligned} \textit{positrone} \quad : \quad & \Psi^{(s)}_{\vec{q}}(x) = <\Omega|\, \psi_C(x)\, b^{\dagger(s)}(\vec{q})\, |\Omega> = \\ = \quad & <\Omega|\mathcal{C}^{-1} \sum_r \int \frac{d^3p}{2E(2\pi)^3} \left\{ b^{(r)}(\vec{p})\bar{v}^{(r)t}(\vec{p}) e^{-ipx} + a^{\dagger(r)}(\vec{p})\bar{u}^{(r)t}(\vec{p}) e^{ipx}\right\}\, b^{\dagger(s)}(\vec{q})\, |\Omega> = \\ = \quad & \mathcal{C}^{-1} \sum_r \int \frac{d^3p}{2E(2\pi)^3} \bar{v}^{(r)t}(\vec{p}) e^{-ipx} <\Omega| b^{(r)}(\vec{p})\, b^{\dagger(s)}(\vec{q})\, |\Omega> = \\ = \quad & \mathcal{C}^{-1} \sum_r \int \frac{d^3p}{2E(2\pi)^3} \bar{v}^{(r)t}(\vec{p}) e^{-ipx} <\Omega| \left\{ b^{(r)}(\vec{p})\,,\, b^{\dagger(s)}(\vec{q})\right\}\, |\Omega> = \\ = \quad & \mathcal{C}^{-1} \bar{v}^{(s)t}(\vec{q}) e^{-iqx} = u^{(s)}(\vec{q})\, e^{-iqx} \end{aligned} \tag{3.554}$$

Dimostriamo quest'ultima relazione[187]. Si ha

$$\left\{\psi_\alpha(x),\, \psi^\dagger_\beta(y)\right\}_{x^0=y^0} = \left\{\int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \sum_r \left[a^{(r)}(\vec p)\, u^{(r)}_\alpha(\vec p)\, e^{-ipx} + b^{\dagger(r)}(\vec p)\, v^{(r)}_\alpha(\vec p)\, e^{ipx}\right],\right.$$
$$\left.\int \frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3} \sum_s \left[b^{(s)}(\vec q)\, v^{+(s)}_\beta(\vec q)\, e^{-iqy} + a^{\dagger(s)}(\vec q)\, u^{+(s)}_\beta(\vec q)\, e^{iqy}\right]\right\} =$$
$$= \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\, \frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3} \left[\sum_{r,s} u^{(r)}_\alpha(\vec p) u^{+(s)}_\beta(\vec q)\, e^{-ipx}\, e^{iqy} \left\{a^{(r)}(\vec p),\, a^{\dagger(s)}(\vec q)\right\} + \right.$$
$$\left. + \sum_{r,s} v^{(r)}_\alpha(\vec p) v^{+(s)}_\beta(\vec q)\, e^{ipx}\, e^{-iqy} \left\{b^{\dagger(r)}(\vec p),\, b^{(s)}(\vec q)\right\}\right] =$$
$$= \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\, \frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3}\, 2E_q\, (2\pi)^3\, \delta^3(\vec p - \vec q)$$
$$\left[\sum_r u^{(r)}_\alpha(\vec p) u^{+(r)}_\beta(\vec q)\, e^{-ipx}\, e^{iqy} + \sum_s v^{(s)}_\alpha(\vec p) v^{+(s)}_\beta(\vec q)\, e^{ipx}\, e^{-iqy}\right] \qquad (3.561)$$

Integrando su $\vec q$, otteniamo quindi

$$\left\{\psi_\alpha(x),\, \psi^\dagger_\beta(y)\right\}_{x^0=y^0} = \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \left[e^{-ip(x-y)} \sum_r u^{(r)}_\alpha(\vec p) u^{+(r)}_\beta(\vec p) + e^{ip(x-y)} \sum_s v^{(s)}_\alpha(\vec p) v^{+(s)}_\beta(\vec p)\right]$$

ma, per ipotesi, $x^0 = y^0$, quindi risulta

$$p(x-y) = -\vec p \cdot (\vec x - \vec y) \qquad (3.562)$$

poi, quanto al prodotto fra gli spinori, essendo $\bar u \equiv u^+ \gamma^0$, si ha evidentemente che

$$\sum_r u^{(r)}_\alpha(\vec p) u^{+(r)}_\beta(\vec p) = \sum_r u^{(r)}_\alpha(\vec p) \bar u^{(r)}_\tau(\vec p)\, \gamma^0_{\tau\beta} \qquad (3.563)$$

e usando la (3.400) e la (3.406), abbiamo quindi che

$$\sum_r u^{(r)}_\alpha(\vec p) u^{+(r)}_\beta(\vec p) = 2m\, (\Lambda_+)_{\alpha\tau}\, \gamma^0_{\tau\beta} = \left[(\not p + m)\gamma^0\right]_{\alpha\beta} \qquad (3.564)$$

---

[187] Osserviamo che, dalla densità lagrangiana (3.333) si ricava che il momento coniugato al campo ψ vale

$$\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi)} = i\, \bar\psi \gamma^0 = i\psi^+ \qquad (3.559)$$

dunque ci aspetteremmo, a priori, che

$$[\psi_\alpha(x),\, i\psi^+_\beta(y)]_{x_0=y_0} = i\, \delta_{\alpha\beta}\, \delta(\vec p - \vec q) \qquad (3.560)$$

Questo però, come mostra la derivazione che conduce alla (3.569), richiederebbe che i commutatori fra gli operatori a e $a^\dagger$ siano opposti a quelli fra b e $b^\dagger$. Ma nel vuoto non c'è differenza fra cosa definiamo particella e cosa chiamiamo antiparticella e dunque gli operatori di creazione e distruzione a loro associati devono ragionevolmente soddisfare la stessa algebra e questo richiede l'anticommutatore !

Analogamente, per la (3.401) e (3.408), si ha

$$\begin{aligned}\sum_s v_\alpha^{(s)}(\vec{p})v_\beta^{+(s)}(\vec{p}) &= \sum_s v_\alpha^{(s)}(\vec{p})\overline{v}_\tau^{(s)}(\vec{p})\gamma^0_{\tau\beta} = -2m\,(\Lambda_-)_{\alpha\tau}\,\gamma^0_{\tau\beta} = \\ &= \left[(\not{p}-m)\gamma^0\right]_{\alpha\beta} \end{aligned} \tag{3.565}$$

Sostituendo, si ha quindi

$$\begin{aligned}\left\{\psi_\alpha(x),\,\psi_\beta^\dagger(y)\right\}_{x^0=y^0} &= \int\frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})}\left[(\not{p}+m)\gamma^0\right]_{\alpha\beta} + \\ &+ \int\frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}e^{-i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})}\left[(\not{p}-m)\gamma^0\right]_{\alpha\beta} \end{aligned} \tag{3.566}$$

D'altronde, il secondo integrale, se poniamo $\vec{p}\to-\vec{p}$, diventa

$$\int\frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})}\left[(E_p\,\gamma^0+\vec{p}\cdot\vec{\gamma}-m)\gamma^0\right]_{\alpha\beta} \tag{3.567}$$

da sommare al primo integrale che esplicitamente vale

$$\int\frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})}\left[(E_p\,\gamma^0-\vec{p}\cdot\vec{\gamma}+m)\gamma^0\right]_{\alpha\beta} \tag{3.568}$$

per cui, in definitiva, essendo $(\gamma^0)^2=I$, risulta appunto che

$$\left\{\psi_\alpha(x),\,\psi_\beta^\dagger(y)\right\}_{x^0=y^0} = \int\frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\,e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})}\,2E_p\;\delta_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}\;\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \tag{3.569}$$

A tempi non uguali, procedendo in modo del tutto simile a quanto sopra, troviamo che l'unico anticommutatore non nullo vale

$$\begin{aligned}\left\{\psi_\alpha(x),\,\overline{\psi}_\beta(y)\right\} &= (i\gamma^\mu\partial_\mu+m)_{\alpha\beta}\;i\Delta(x-y,m) \\ &\equiv i\,S_{\alpha\beta}(x-y,m) \end{aligned} \tag{3.570}$$

dove la funzione Δ è già stata definita attraverso la (3.50) e si è posto

$$S_{\alpha\beta}(x-y,m)\equiv(i\gamma^\mu\partial_\mu+m)_{\alpha\beta}\;\Delta(x-y,m) \tag{3.571}$$

Risulta infatti

$$\begin{aligned}\left\{\psi_\alpha(x),\,\overline{\psi}_\beta(y)\right\} &= \left\{\int\frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\sum_r\left[a^{(r)}(\vec{p})\,u_\alpha^{(r)}(\vec{p})\,e^{-ipx}+b^{\dagger(r)}(\vec{p})\,v_\alpha^{(r)}(\vec{p})\,e^{ipx}\right],\right. \\ &\left.\int\frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3}\sum_s\left[b^{(s)}(\vec{q})\,\overline{v}_\beta^{(r)}(\vec{q})\,e^{-iqy}+a^{\dagger(s)}(\vec{q})\,\overline{u}_\beta^{(r)}(\vec{q})\,e^{iqy}\right]\right\} = \\ = \int\frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}&\frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3}\left[\sum_{r,s}u_\alpha^{(r)}(\vec{p})\overline{u}_\beta^{(s)}(\vec{q})\,e^{-ipx}\,e^{iqy}\,\left\{a^{(r)}(\vec{p}),\,a^{\dagger(s)}(\vec{q})\right\}+\right.\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{r,s} v_\alpha^{(r)}(\vec{p})\overline{v}_\beta^{(s)}(\vec{q})\, e^{ipx}\, e^{-iqy} \left\{b^{\dagger(r)}(\vec{p}),\, b^{(s)}(\vec{q})\right\}\Bigg] = \\
&= \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\, \frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3}\, 2E_q\,(2\pi)^3\, \delta^3(\vec{p}-\vec{q}) \\
&\left[\sum_r u_\alpha^{(r)}(\vec{p})\overline{u}_\beta^{(r)}(\vec{q})\, e^{-ipx}\, e^{iqy} + \sum_s v_\alpha^{(s)}(\vec{p})\overline{v}_\beta^{(s)}(\vec{q})\, e^{ipx}\, e^{-iqy}\right]
\end{aligned}
\tag{3.572}
$$

e integrando su d^3q otteniamo dunque

$$
\begin{aligned}
\left\{\psi_\alpha(x),\, \overline{\psi}_\beta(y)\right\} &= \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\left[e^{-ip(x-y)}\sum_r u_\alpha^{(r)}(\vec{p})\,\overline{u}_\beta^{(r)}(\vec{p}) + e^{ip(x-y)}\sum_s v_\alpha^{(s)}(\vec{p})\,\overline{v}_\beta^{(s)}(\vec{p})\right] = \\
&= \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\left[e^{-ip(x-y)}(m+\not{p}) - e^{ip(x-y)}(m-\not{p})\right]_{\alpha\beta} = \\
&= (i\gamma^\mu\partial_\mu + m)_{\alpha\beta}\int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\left[e^{-ip(x-y)} - e^{ip(x-y)}\right]
\end{aligned}
\tag{3.573}
$$

ovvero, date la (3.42) e la (3.49), abbiamo appunto che

$$
\left\{\psi_\alpha(x),\, \overline{\psi}_\beta(y)\right\} = (i\gamma^\mu\partial_\mu + m)_{\alpha\beta}\; i\Delta(x-y;m) \tag{3.574}
$$

Per le note proprietà della funzione $\Delta(z;m)$, evidentemente l'anticommutatore che stiamo considerando soddisfa la causalità, essendo comunque nullo quando il quadrivettore $z = x - y$ è $space - like$.

Per quanto riguarda poi il propagatore di Feynman $S_F(x-y)_{\alpha\beta}$, il quale è definito in modo che

$$
(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)_{\alpha\beta}\;\; S_F(x-y)_{\beta\rho} = \delta_{\alpha\rho}\,\delta^4(x-y) \tag{3.575}
$$

procedendo in tutta analogia si dimostra che esso può essere scritto come[188]

$$
S_F(x-y)_{\alpha\beta} = (i\gamma^\mu\partial_\mu + m)_{\alpha\beta}\;\Delta_F(x-y;m) \tag{3.577}
$$

dove $\Delta_F(x-y;m)$ à definito dalla (3.91). Si dimostra altresì che risulta

$$
iS_F(x-y)_{\alpha\beta} =<\Omega|\mathcal{T}\left(\psi(x)_\alpha\;\bar{\phi}_\beta(y)\right)|\Omega> \tag{3.578}
$$

dove, adesso, però, il prodotto T-ordinato per due componenti qualsiasi di campi di Dirac è definito in modo tale che[189]

$$
\mathcal{T}\left(A(x)\,B(y)\right) = A(x)B(y)\Theta(x^0-y^0) - B(y)A(x)\Theta(y^0-x^0) \tag{3.579}
$$

[188]Si osservi che dalla definizione segue infatti che

$$
\begin{aligned}
&(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)_{\alpha\beta}\;\; S_F(x-y)_{\beta\rho} = (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)_{\alpha\beta}\,(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)_{\beta\rho}\;\;\Delta_F(x-y;m)\; = \\
&= -(\Box + m^2)\;\Delta_F(x-y;m)\;\delta_{\alpha\rho} = \delta_{\alpha\rho}\;\delta^4(x-y)
\end{aligned}
\tag{3.576}
$$

[189]cfr. J.D. Bjorken, S.D. Drell "Relativistic quantum fields", pag.65.

Venendo infine all'azione delle simmetrie discrete C P e T, iniziamo dimostrando che, per quanto riguarda la coniugazione di carica[190], risulta

$$C\, a^{(r)}(\vec{p})\, C^{-1} = e^{-i\eta_c}\, b^{(r)}(\vec{p}) \quad \longleftrightarrow \quad C\, a^{\dagger(r)}(\vec{p})\, C^{-1} = e^{i\eta_c}\, b^{\dagger(r)}(\vec{p}) \tag{3.587}$$

$$C\, b^{(r)}(\vec{p})\, C^{-1} = e^{i\eta_c}\, a^{(r)}(\vec{p}) \quad \longleftrightarrow \quad C\, b^{\dagger(r)}(\vec{p})\, C^{-1} = e^{-i\eta_c}\, a^{\dagger(r)}(\vec{p}) \tag{3.588}$$

$$C\, \psi(x)\, C^{-1} = e^{-i\eta_c}\, \mathcal{C}^{-1}\, \bar{\psi}^t(x) \quad \longleftrightarrow \quad C\, \bar{\psi}(x)\, C^{-1} = e^{i\eta_c}\, \psi^t(x)\, \mathcal{C}^{-1} \tag{3.589}$$

$$\mathcal{C} = i\gamma^0\gamma^2; \qquad \mathcal{C}^t = -\mathcal{C} = \mathcal{C}^{-1} \tag{3.590}$$

[190] Partendo dalle definizioni (3.587) e (3.588) possiamo dedurre la legge di trasformazione relativa al campo. Si ha

$$\begin{aligned} C\, \psi(x)\, C^{-1} &= \sum_{r=1}^{2} \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \left\{ C\, a^{(r)}(p)\, C^{-1}\, u^{(r)}(p)\, e^{-ipx} \;+\; C\, b^{\dagger(r)}(p)\, C^{-1}\, v^{(r)}(p)\, e^{ipx} \right\} = \\ &= e^{-i\eta_c} \sum_{r=1}^{2} \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \left\{ b^{(r)}(p)\, u^{(r)}(p)\, e^{-ipx} \;+\; a^{\dagger(r)}(p)\, v^{(r)}(p)\, e^{ipx} \right\} \equiv \psi_C(x) \end{aligned} \tag{3.580}$$

D'altronde si è già visto che, posto $\mathcal{C} = i\gamma^0\gamma^2$, questa matrice è tale per cui

$$\mathcal{C} = i\gamma^0\gamma^2 \;\Rightarrow\; \mathcal{C} = -\mathcal{C}^t = -\mathcal{C}^{-1} = -\mathcal{C}^\dagger \;\Leftrightarrow\; \mathcal{C}^{-1} \left(\bar{v}^{(s)}(\vec{p}) \right)^t = u^{(s)}(\vec{p}) \tag{3.581}$$

da cui, essendo $\mathcal{C}^{-1} = \mathcal{C}^\dagger$, ricaviamo che

$$\begin{aligned} u^{(s)}(\vec{p}) &= \mathcal{C}^\dagger \left(\bar{v}^{(s)}(\vec{p}) \right)^t = \mathcal{C}^\dagger\, \gamma^0 \left[\left(v^{(s)}(\vec{p}) \right)^t \right]^\dagger \\ &\Rightarrow\; u^{(s)}(\vec{p})^\dagger = \left(v^{(s)}(\vec{p}) \right)^t \gamma^0\, \mathcal{C} \Rightarrow \bar{u}^{(s)} = \left(v^{(s)}(\vec{p}) \right)^t \gamma^0\, \mathcal{C}\, \gamma^0 \end{aligned} \tag{3.582}$$

ma $\mathcal{C}$ anticommuta con la γ^0 e dunque $\gamma^0\, \mathcal{C}\, \gamma^0 = -\mathcal{C} = \mathcal{C}^t$ perciò

$$\bar{u}^{(s)} = \left(v^{(s)}(\vec{p}) \right)^t \mathcal{C}^t = \left(\mathcal{C}\, v^{(s)}(\vec{p}) \right)^t \Rightarrow \left(\bar{u}^{(s)} \right)^t = \mathcal{C}\, v^{(s)}(\vec{p}) \Rightarrow \mathcal{C}^{-1} \left(\bar{u}^{(s)} \right)^t = v^{(s)}(\vec{p}) \tag{3.583}$$

Sostituendo allora la (3.581) e la (3.582) nella (3.580), abbiamo infine che

$$\begin{aligned} \psi_C(x) = C\, \psi(x)\, C^{-1} &= e^{-i\eta_c} \mathcal{C}^{-1} \sum_{r=1}^{2} \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \left\{ b^{(r)}(p) \left(\bar{v}^{(s)}(\vec{p}) \right)^t e^{-ipx} \;+\; a^{\dagger(r)}(p) \left(\bar{u}^{(s)} \right)^t e^{ipx} \right\} \\ &= e^{-i\eta_c} \mathcal{C}^{-1}\, \bar{\psi}^t(x) \end{aligned} \tag{3.584}$$

e, analogamente si dimostra che

$$\bar{\psi}_C(x) \equiv C\, \bar{\psi}(x)\, C^{-1} = e^{i\eta_c}\, \psi^t(x)\, \mathcal{C}^{-1} \tag{3.585}$$

infatti, tenendo conto che $\gamma^0 \left(\mathcal{C}^{-1} \right)^\dagger \gamma^0 = \mathcal{C}^{-1}$, risulta che

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_C(x) = C\, \bar{\psi}(x)\, C^{-1} &= \left(C\, \psi(x)\, C^{-1} \right)^\dagger \gamma^0 = e^{i\eta_c} \left(\mathcal{C}^{-1}\, \bar{\psi}^t(x) \right)^\dagger \gamma^0 = e^{i\eta_c} \left(\mathcal{C}^{-1}\, \gamma^0 \left(\psi^t(x) \right)^\dagger \right)^\dagger \gamma^0 = \\ &= e^{i\eta_c}\, \psi^t(x)\, \gamma^0 \left(\mathcal{C}^{-1} \right)^\dagger \gamma^0 = e^{i\eta_c}\, \psi^t(x)\, \mathcal{C}^{-1} \end{aligned} \tag{3.586}$$

Analogamente, per quanto riguarda la simmetria di parità[191] risulta che

$$P\, a^{(r)}(\vec{p})\, P^{-1} = e^{-i\eta_p}\, a^{(r)}(-\vec{p}) \;\longleftrightarrow\; P\, a^{\dagger(r)}(\vec{p})\, P^{-1} = e^{i\eta_p}\, a^{\dagger(r)}(-\vec{p}) \tag{3.597}$$

$$P\, b^{(r)}(\vec{p})\, P^{-1} = -e^{i\eta_p}\, b^{(r)}(-\vec{p}) \;\longleftrightarrow\; P\, b^{\dagger(r)}(\vec{p})\, P^{-1} = -e^{-i\eta_p}\, b^{\dagger(r)}(-\vec{p}) \tag{3.598}$$

$$P\, \psi(x)\, P^{-1} = e^{-i\eta_p}\, \gamma^0\, \psi(Px) \;\longleftrightarrow\; P\, \bar{\psi}(x)\, P^{-1} = e^{i\eta_p}\, \bar{\psi}(Px)\gamma^0 \tag{3.599}$$

$$e^{i\eta_p} = \pm 1 \tag{3.600}$$

[191] Facendo uso delle definizioni (3.597) e (3.598) possiamo dedurre la legge di trasformazione relativa al campo. Si ha

$$\begin{aligned} P\,\psi(x)\,P^{-1} &= \sum_{r=1}^{2}\int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\left\{P\, a^{(r)}(\vec{p})\, P^{-1}\, u^{(r)}(\vec{p})\, e^{-ipx} \;+\; P\, b^{\dagger(r)}(\vec{p})\, P^{-1}\, v^{(r)}(\vec{p})\, e^{ipx}\right\} = \\ &= e^{-i\eta_p}\sum_{r=1}^{2}\int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\left\{a^{(r)}(-\vec{p})\, u^{(r)}(\vec{p})\, e^{-ipx} \;-\; b^{\dagger(r)}(-\vec{p})\, v^{(r)}(\vec{p})\, e^{ipx}\right\} \end{aligned} \tag{3.591}$$

Ponendo ora $q = (p^0, -\vec{p}) \Rightarrow p\cdot x = q \cdot Px$ possiamo riscrivere l'espressione precedente nel modo seguente

$$P\,\psi(x)\,P^{-1} = e^{-i\eta_p}\sum_{r=1}^{2}\int \frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3}\left\{a^{(r)}(\vec{q})\, u^{(r)}(\vec{p})\, e^{-iq\cdot Px} \;-\; b^{\dagger(r)}(\vec{q})\, v^{(r)}(\vec{p})\, e^{iq\cdot Px}\right\} \tag{3.592}$$

Osserviamo adesso che essendo per definizione $\vec{q} = -\vec{p}$, $u_0^{(r)} = \gamma^0 u_0^{(r)}$ e poiché la γ^0 anticommuta con tutte le γ^i, abbiamo che

$$u^{(r)}(\vec{p}) = \frac{m + \not{p}}{\sqrt{E_p + m}} u_0^{(r)} = \frac{m + \not{p}}{\sqrt{E_p + m}}\gamma^0\, u_0^{(r)} = \gamma^0 \frac{m + \not{q}}{\sqrt{E_p + m}} u_0^{(r)} = \gamma^0\, u^{(r)}(\vec{q}) \tag{3.593}$$

Riguardo allo spinore v, essendo $v_0^{(r)} = -\gamma^0 v_0^{(r)}$, procedendo allo stesso modo ricaviamo che

$$v^{(r)}(\vec{p}) = \frac{m - \not{p}}{\sqrt{E_p + m}} v_0^{(r)} = -\frac{m - \not{p}}{\sqrt{E_p + m}}\gamma^0\, v_0^{(r)} = -\gamma^0 \frac{m - \not{q}}{\sqrt{E_p + m}} v_0^{(r)} = -\gamma^0\, v^{(r)}(\vec{q}) \tag{3.594}$$

e dunque, sostituendo nella (3.591), otteniamo infine che

$$P\,\psi(x)\,P^{-1} = e^{-i\eta_p}\,\gamma^0\,\psi(Px) \tag{3.595}$$

Poiché $P^2 = I$, ne segue che il fattore di fase $e^{-i\eta_p}$ può valere solo ± 1. Va comunque osservato che il messaggio vero è che la parità intrinseca della particella e quella dell'antiparticella sono opposte: chi l'abbia positiva e chi l'abbia negativa è solo questione di convenzione. Il motivo è che in qualunque processo noto accade solo che o la particella (antiparticella) è presente sia nello stato iniziale che in quello finale, oppure si crea o si annichila una coppia. In tutti i casi non è rilevante chi abbia parità intrinseca positiva e chi l'abbia negativa ma solo che l'hanno opposta! Per convenzione si assegna alla particella la parità intrinseca positiva (e quindi alla antiparticella quella negativa), e dunque si pone $e^{-i\eta_p} \equiv 1$.
Riguardo infine al campo $\bar{\psi}$, abbiamo

$$P\bar{\psi}(x)P^{-1} = P\psi^\dagger(x)P^{-1}\gamma^0 = \left(P\psi(x)P^{-1}\right)^\dagger \gamma^0 = \left(\psi(Px)^\dagger\gamma^0\right)\gamma^0 = \bar{\psi}(Px)\,\gamma^0 \tag{3.596}$$

Venendo alla simmetria di Time-reversal, dobbiamo tener conto che essa è antiunitaria e che anticommuta con lo spin per cui la sua azione su queste variabili si traduce in una rotazione di π intorno all'asse y, ovvero essa è descritta dalla matrice reale $\rho \equiv i\sigma_2$.

L'azione di T sugli operatori di creazione e distruzione viene quindi definita nel modo seguente[192]:

$$T\,a^{(r)}(\vec{p})\,T^{-1} = e^{-i\eta_T}\,\rho_{rs}\,a^{(s)}(-\vec{p}) \quad\longleftrightarrow\quad T\,a^{\dagger(r)}(\vec{p})\,T^{-1} = e^{i\eta_T}\,\rho_{rs}\,a^{\dagger(s)}(-\vec{p}) \tag{3.611}$$

$$T\,b^{(r)}(\vec{p})\,T^{-1} = e^{i\eta_T}\,\rho_{rs}\,b^{(s)}(-\vec{p}) \quad\longleftrightarrow\quad T\,b^{\dagger(r)}(\vec{p})\,T^{-1} = e^{-i\eta_T}\,\rho_{rs}\,b^{\dagger(s)}(-\vec{p}) \tag{3.612}$$

$$T\,\psi(x)\,T^{-1} = e^{-i\eta_T}\,\gamma^1\gamma^3\,\psi(Tx) \quad\longleftrightarrow\quad T\,\bar{\psi}(x)\,T^{-1} = e^{i\eta_T}\,\bar{\psi}(Tx)\gamma^3\gamma^1 \tag{3.613}$$

Evidentemente, dato il carattere antiunitario di T, indipendentemente dalla fase $e^{-i\eta_T}$, per il fatto che $\rho^2 = -I$, risulta altresì che $T^2 = -I$ come sappiamo deve accadere quando lo spin è semidispari.

---

[192] Esplicitiamo adesso l'azione della trasformazione di Time-reversal sul campo di Dirac. Essendo T antiunitaria, abbiamo che

$$T\,\psi(x)\,T^{-1} \;=\; \sum_{r=1}^{2}\int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\left\{T\,a^{(r)}(\vec{p})\,T^{-1}\,u^{(r)*}(\vec{p})\,e^{ipx} \;+\; T\,b^{\dagger(r)}(\vec{p})\,T^{-1}\,v^{(r)*}(\vec{p})\,e^{-ipx}\right\} \tag{3.601}$$

Definendo adesso, al solito, il quadrivettore q in modo che $q = (p^0, -\vec{p})$, risulta evidentemente che $p\cdot x = -q\cdot Tx$ dove $Tx \equiv (-x^0, \vec{x})$, per cui, cambiando le variabili di integrazione da d^3p a d^3q e facendo uso delle (3.611) e (3.612), risulta

$$T\,\psi(x)\,T^{-1} \;=\; e^{-i\eta_T}\sum_{r,s}\int \frac{d^3q}{2E_q(2\pi)^3}\left\{\rho_{rs}\,a^{(s)}(\vec{q})\,u^{(r)*}(\vec{p})\,e^{-iq\cdot Tx} \;+\; \rho_{rs}\,b^{\dagger(s)}(\vec{q})\,v^{(r)*}(\vec{p})\,e^{iq\cdot Tx}\right\} \tag{3.602}$$

Vogliamo adesso dimostrare che (si ricordi che $\vec{p} = -\vec{q}$)

$$\rho_{rs}\,u^{*(r)}(\vec{p}) = \gamma^1\gamma^3 u^{(s)}(\vec{q}) \tag{3.603}$$

Osserviamo per prima cosa che, essendo solo γ^2 immaginaria pura, date le regole di anticommutazione fra γ differenti, risulta piuttosto immediato che

$$\gamma^1\gamma^3\gamma^\mu = \gamma^*_\mu\gamma^1\gamma^3 \quad\Rightarrow\quad \gamma^1\gamma^3\,\not{q} = \not{p}^*\gamma^1\gamma^3 \tag{3.604}$$

per cui risulta

$$\gamma^1\gamma^3 u^{(s)}(\vec{q}) = \gamma^1\gamma^3\frac{m+\not{q}}{\sqrt{E_q+m}}u_0^{(s)} = \frac{m+\not{p}^*}{\sqrt{E_p+m}}\gamma^1\gamma^3\,u_0^{(s)} \tag{3.605}$$

D'altronde la matrice $\gamma^1\gamma^3$ è non nulla solo nei due quadranti sulla diagonale principale, dove vale $-\sigma_1\sigma_3 = i\sigma_2 \equiv \rho$, e dunque (si ricordi che gli u_0 sono reali)

$$\gamma^1\gamma^3\,u_0^{(s)} \;=\; \rho_{rs}u_0^{(r)} = \rho_{rs}u_0^{(r)*} \tag{3.606}$$

per cui, sostituendo, è immediato che risulta

$$\gamma^1\gamma^3\,u^{(s)}(\vec{q}) = \rho_{rs}u^{(r)*}(\vec{p}) \tag{3.607}$$

E' da queste leggi di trasformazione che discendono poi, in modo più o meno immediato, le proprietà di trasformazione sotto C, P e T delle correnti elettromagnetica e debole, quest'ultima sia di CC che di NC.
Considereremo qui come esempio la corrente debole carica nel settore dei quarks

$$J^\mu(x) = \overline{u}_i(x)\,\gamma^\mu \frac{1-\gamma_5}{2}\,d_j(x)\,V_{ij} \tag{3.614}$$

dove V_{CKM} indica la matrice di Cabibbo-Kobayashi-Maskawa.
Sotto parità, evidentemente, per quanto detto sopra, si ha

$$\begin{aligned} J^\mu(x) \;&\rightarrow\; P\,J^\mu(x)\,P^{-1} = \overline{u}_i(Px)\,\gamma^0\,\gamma^\mu \frac{1-\gamma_5}{2}\,\gamma^0\,d_j(Px)\,V_{ij} = \\ &= \overline{u}_i(Px)\,\gamma^0\,\gamma^\mu\,\gamma^0\,\frac{1+\gamma_5}{2}\,d_j(Px)\,V_{ij} = \\ &= \overline{u}_i(Px)\,\gamma_\mu\,\frac{1+\gamma_5}{2}\,d_j(Px)\,V_{ij} \neq J_\mu(Px) \end{aligned} \tag{3.615}$$

la quale mostra come la simmetria P non trasformi la corrente debole carica nel modo che ci aspetteremmo per una corrente: infatti, come sappiamo, P è violata nelle interazioni deboli e questo accade a causa della presenza in essa del proiettore chirale χ_- che, sotto parità, diventa χ_+.

Più esplicitamente, definendo le componenti vettoriali $V^\mu(x)$ e assiali $A^\mu(x)$ della corrente $J^\mu(x)$ nel modo seguente[193]

$$J^\mu(x) = \frac{1}{2}\overline{u}_i(x)\,\gamma^\mu\,d_j(x)\,V_{ij} - \frac{1}{2}\overline{u}_i(x)\,\gamma^\mu\,\gamma_5\,d_j(x)\,V_{ij} \equiv V^\mu(x) - A^\mu(x) \tag{3.616}$$

possiamo concludere[194] che, sotto parità, risulta

$$J^\mu(x) \equiv V^\mu(x) - A^\mu(x) \;\;\rightarrow\;\; V_\mu(Px) + A_\mu(Px) \tag{3.617}$$

Lo stesso risultato vale anche per lo spinore v, in quanto continua a essere vero che

$$\gamma^1\gamma^3\,v_0^{(s)} \;=\; \rho_{rs} v_0^{(r)*} \tag{3.608}$$

per cui, sostituendo nella (3.602), risulta infine che

$$T\,\psi(x)\,T^{-1} = e^{-i\eta_T}\,\gamma^1\gamma^3\psi(Tx) \tag{3.609}$$

da cui, essendo γ^1 e γ^3 antiermitiane e anticommutando con la γ^0, otteniamo che

$$T\,\bar\psi(x)\,T^{-1} = \left(T\,\psi(x)\,T^{-1}\right)^\dagger\,\gamma^0 = e^{i\eta_T}\,\psi^\dagger(Tx)(\gamma^3)^\dagger(\gamma^1)^\dagger\,\gamma^0 = e^{i\eta_T}\,\bar\psi(Tx)\gamma^3\gamma^1 \tag{3.610}$$

[193] Anche se dovrebbe essere del tutto inutile, vogliamo puntualizzare che la componente assiale $A^\mu(x)$ della corrente definita attraverso la (3.616) non ha naturalmente nulla a che fare con il quadri-potenziale elettromagnetico ...

[194] Nel caso della corrente elettromagnetica, che è puramente vettoriale, abbiamo che, per parità semplicemente $J^\mu(x) \rightarrow J_\mu(Px)$ e siccome il campo elettromagnetico segue la stessa legge di trasformazione, l'integrale di azione è invariante e dunque P è conservata nelle interazioni elettromagnetiche.

Veniamo ora alla simmetria di Time-reversal.
Assumendo lo stesso fattore di fase $e^{-i\eta_T}$ per tutti i campi dei quarks, risulta che (si ricordi che T è antiunitario e che γ_5 è reale)

$$\begin{aligned}
J^\mu(x) &\rightarrow T\,J^\mu(x)\,T^{-1} = T\,\bar{u}_i(x)\,\gamma^\mu\,\frac{1-\gamma_5}{2}\,d_j(x)\,V_{ij}\,T^{-1} = \\
&= T\,\bar{u}_i(x)\,T^{-1}\,T\gamma^\mu\,\frac{1-\gamma_5}{2}\,T^{-1}\,T\,d_j(x)\,T^{-1}T\,V_{ij}\,T^{-1} = \\
&= T\,\bar{u}_i(x)\,T^{-1}\;\gamma^{*\mu}\,\frac{1-\gamma_5}{2}\;T\,d_j(x)\,T^{-1}\,V_{ij}^* = \\
&= \bar{u}_i(Tx)\,\gamma^3\gamma^1\;\gamma^{*\mu}\,\frac{1-\gamma_5}{2}\;\gamma^1\gamma^3 d_j(Tx)\,V_{ij}^*
\end{aligned} \tag{3.618}$$

ma, come si può vedere direttamente (tutte le matrici γ sono reali, a parte la γ^2 che è immaginaria), risulta

$$\gamma^3\gamma^1\;\gamma^{*\mu}\,\frac{1-\gamma_5}{2}\;\gamma^1\gamma^3 = \gamma^3\gamma^1\;\gamma^{*\mu}\;\gamma^1\gamma^3\,\frac{1-\gamma_5}{2} = \gamma_\mu\,\frac{1-\gamma_5}{2} \tag{3.619}$$

e dunque

$$T J^\mu(x)\,T^{-1} = \bar{u}_i(Tx)\;\gamma_\mu\;\frac{1-\gamma_5}{2}\;d_j(Tx)\,V_{ij}^* \tag{3.620}$$

la quale mostra, invece, come T sia rispettata nell'interazione debole[195] se e solo se la matrice V_{CKM} è reale, nel qual caso risulta $T J^\mu(x)\,T^{-1} = J_\mu(Tx)$.

[195]Nel caso della corrente elettromagnetica chiaramente accade che $J^\mu(x) \rightarrow J_\mu(Tx)$ come il campo elettromagnetico, per cui l'integrale di azione resta invariante, essendo $J^\mu(x)\,A_\mu^{em}(x) \rightarrow J_\mu(Tx)\,A^\mu_{em}(Tx)$ e dunque T risulta essere una simmetria conservata nelle interazioni elettromagnetiche.

E veniamo infine alla simmetria di coniugazione di carica.
Sempre assumendo lo stesso fattore di fase $e^{-i\eta_C}$ per tutti i campi dei quarks, abbiamo

$$J^\mu(x) \quad\rightarrow\quad C\,J^\mu(x)\,C^{-1} = u_i^t(x)\,\mathcal{C}^{-1}\,\gamma^\mu\,\frac{1-\gamma_5}{2}\,\mathcal{C}^{-1}\bar{d}_j^t(x)\,V_{ij} \tag{3.621}$$

ma $\mathcal{C}^{-1}$ essendo il prodotto di due matrici gamma commuta con γ_5, dunque

$$C\,J^\mu(x)\,C^{-1} = u_i^t(x)\,\mathcal{C}^{-1}\,\gamma^\mu\,\mathcal{C}^{-1}\frac{1-\gamma_5}{2}\,\bar{d}_j^t(x)\,V_{ij} \tag{3.622}$$

D'altronde $\mathcal{C}^{-1}\gamma^\mu\mathcal{C}^{-1} = (\gamma^\mu)^t$, per cui, essendo γ_5 simmetrica, abbiamo

$$C\,J^\mu(x)\,C^{-1} = u_i^t(x)\,(\gamma^\mu)^t\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)^t\bar{d}_j^t(x)\,V_{ij} \tag{3.623}$$

Chiaramente la trasposizione riguarda gli indici spinoriali: tenendo conto quindi che i campi di Dirac anticommutano, abbiamo

$$\begin{aligned} C\,J^\mu(x)\,C^{-1} &= -\left[\bar{d}_j(x)\frac{1-\gamma_5}{2}\,\gamma^\mu\,u_i(x)\right]^t V_{ij} = \\ &= -V_{ij}\,\bar{d}_j(x)\,\gamma^\mu\frac{1+\gamma_5}{2}\,u_i(x) \end{aligned} \tag{3.624}$$

dove abbiamo usato il fatto che il termine entro parentesi quadra di cui si richiede la trasposta è una matrice 1×1 e le matrici γ^μ anticommutano con la γ_5.
Il risultato ottenuto mostra che se e solo se la matrice V_{CKM} è reale abbiamo che, sotto coniugazione di carica risulta

$$J_\mu(x) \equiv V_\mu(x) - A_\mu(x) \quad\rightarrow\quad -V_\mu^\dagger(x) - A_\mu^\dagger(x) \tag{3.625}$$

che corrisponde comunque ad una violazione massimale della dinamica.
Però, sempre nel solo caso in cui V_{CKM} sia reale, ecco che mentre C e P sono massimamente violate, il loro prodotto CP risulta conservato, infatti (la prima trasformazione riguarda P e la seconda si riferisce a C)

$$J^\mu(x) = V^\mu(x) - A^\mu(x) \quad\rightarrow\quad V_\mu(Px) + A_\mu(Px) \rightarrow -V_\mu^\dagger(Px) + A_\mu^\dagger(Px) \tag{3.626}$$

ovvero, se V_{CKM} è reale, sotto CP accade che

$$J^\mu(x) \equiv V^\mu(x) - A^\mu(x) \rightarrow -J_\mu^\dagger(Px) \tag{3.627}$$

Infine vale la pena di notare che, indipendentemente da come è fatta la matrice unitaria V_{CKM}, sotto CPT risulta

$$\begin{aligned}
J_\mu(x) \qquad &\equiv \qquad \overline{u}_i(x)\,\gamma_\mu \frac{1-\gamma_5}{2}\, d_j(x)\, V_{ij} \\
T: \quad &\to \overline{u}_i(Tx)\,\gamma^\mu \frac{1-\gamma_5}{2}\, d_j(Tx)\, V_{ij}^* \\
PT: \quad &\to \overline{u}_i(-x)\,\gamma_\mu \frac{1+\gamma_5}{2}\, d_j(-x)\, V_{ij}^* \\
CPT: \quad &\to -\overline{d}_i(-x)\,\gamma_\mu \frac{1-\gamma_5}{2}\, u_j(-x)\, V_{ij}^* \\
i.e. \qquad &\mathit{sotto}\;\; CPT: J_\mu(x) \to -J_\mu^\dagger(-x)
\end{aligned} \tag{3.628}$$

che coincide con la trasformazione sotto CPT dei campi vettoriali $A^\mu_{em}(x)$, $W^\mu(x)$ e $Z^\mu(x)$, da cui l'invarianza sia della dinamica elettromagnetica che di quella debole, sotto la composizione delle tre simmetrie discrete C, P e T.

3.5 *L'equazione di Majorana*

Come è ben noto, il campo $\psi(x)$ che verifica l'equazione di Dirac

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\,\psi = 0 \tag{3.629}$$

si trasforma, sotto il gruppo di Lorentz $\mathcal{L}_+^\uparrow$ secondo la rappresentazione spinoriale $S(\Lambda)$

$$\Lambda = e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}} \rightarrow S(\Lambda) = e^{\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}} \tag{3.630}$$

dove $\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2i}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$.
Poiché γ_5 commuta con i generatori $\sigma^{\mu\nu}$, essa commuta con tutte le matrici $S(\Lambda)$ che, quindi è la somma diretta della $S(\Lambda)$ ristretta al sottospazio spinoriale individuato dal proiettore chirale $\chi_R \equiv \chi_+ = \frac{1+\gamma_5}{2}$ con la $S(\Lambda)$ ristretta al sottospazio spinoriale individuato dal proiettore chirale $\chi_L \equiv \chi_- = \frac{1-\gamma_5}{2}$.
Nel primo caso la rappresentazione è isomorfa a $SL(2,C)$, mentre nel secondo caso è isomorfa a $SL(2,C)^*$.
In ogni caso, quello che deve essere evidenziato è che queste due rappresentazioni nello spazio "right" e "left" non sono equivalenti fra loro e dunque devono essere tenute algebricamente separate e distinte se vogliamo poter rispettare l'invarianza relativistica.
Riprendiamo adesso l'equazione di Dirac e osserviamo che

$$\begin{aligned} &(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\,\psi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\chi_R + \chi_L)\,(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\,\psi = 0 \\ \Leftrightarrow \quad &\chi_R\,(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\,\psi + \chi_L\,(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\,\psi = 0 \end{aligned} \tag{3.631}$$

da cui, moltiplicando per χ_R e χ_L, tenendo conto delle proprietà dei proiettori, otteniamo il sistema delle seguenti due equazioni, evidentemente equivalente all'equazione di Dirac di partenza

$$\chi_R\,(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\,\psi = 0 \tag{3.632}$$
$$\chi_L\,(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\,\psi = 0 \tag{3.633}$$

D'altronde $\chi_{R/L}\gamma^\mu = \gamma^\mu \chi_{L/R}$, quindi, le due equazioni precedenti, riscritte in termini delle proiezioni chirali

$$\psi_{R/L} \equiv \chi_{R/L}\psi \tag{3.634}$$

tenendo conto delle proprietà della γ_5, diventano

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_L = m\,\psi_R \tag{3.635}$$
$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_R = m\,\psi_L \tag{3.636}$$

che si disaccoppiano se $m = 0$, dando luogo alle ben note equazioni di Weyl.

E' interessante che la possibilità di descrivere particelle elementari attraverso l'equazione di Weyl fu rifiutata nel 1933 da Pauli poiché conduceva alla violazione della parità. Il motivo è che, per inversione spaziale, $\psi_R \leftrightarrow \psi_L$ e dunque la conservazione della parità richiede l'esistenza di entrambe le componenti chirali associate alla particella[196].
La scoperta della violazione della parità nel $1956 - 57$ consentì di poter riesumare l'idea di Weyl e infatti, assumendo massa nulla per il neutrino, questa particella è stata incorporata nel Modello Standard delle interazioni elettrodeboli come descritta da uno spinore di Weyl left-handed.
Questo è potuto accadere appunto perché, per una particella con massa nulla di spin 1/2, esiste la possibilità di descriverla mediante una teoria spinoriale con solo due componenti indipendenti.
Nel caso di massa diversa da zero, l'equazione di Dirac prevede quattro componenti che, come sappiamo, sono legate ai due stati di spin e ai due stati di particella/antiparticella.
Ma queste quattro componenti sono comunque sempre necessarie ?
Majorana dimostrò che, se rinunciamo alla distinzione fra particella e antiparticella, ovvero alla assunzione che le particelle descritte dal campo abbiano associata una qualsivoglia "carica" (sia essa elettrica, leptonica, barionica o di altro tipo ...) allora, in questo caso, si può effettivamente fare una teoria a due sole componenti, anche in presenza di massa.
Ma come la mettiamo con le due equazioni (3.635) e (3.636), in cui compaiono le componenti di ψ con chiralità[197] diversa ?
Dovrà significare, in qualche modo, che nel caso ipotizzato da Majorana ψ_R e ψ_L non sono, in realtà, fra loro indipendenti.
Cerchiamo di approfondire questa questione e ricordiamo che se $\psi(x)$ è un campo che è soluzione dell'equazione di Dirac libera, allora anche il campo a esso coniugato di carica[198]

$$\psi_C(x) = C\,\psi(x)\,C^{-1} = \mathcal{C}^{-1}\bar{\psi}(x)^t \tag{3.638}$$

soddisfa la medesima equazione di Dirac libera.

[196]Più precisamente accade che

$$\begin{aligned} P\,\psi_{R/L}(x)\,P^{-1} &= P\,\chi_{R/L}\,\psi(x)\,P^{-1} = \chi_{R/L}\,P\,\psi(x)\,P^{-1} = \chi_{R/L}\,\gamma^0\,\psi(Px) = \\ &= \gamma^0\,\chi_{L/R}\,\psi(Px) = \gamma^0\,\psi_{L/R}(Px) \end{aligned} \tag{3.637}$$

[197]Come abbiamo visto, la chiralità ha anche rilevanza per quanto riguarda la rappresentazione del gruppo di Lorentz.
[198]Qui abbiamo assunto, senza perdita di generalità, che la fase arbitraria $e^{-i\eta_C}$ sia uguale all'unità.

Possiamo dunque, anche per la ψ_C, scrivere che

$$\begin{aligned} i\gamma^\mu\partial_\mu(\psi_C)_L &= m\,(\psi_C)_R && (3.639) \\ i\gamma^\mu\partial_\mu(\psi_C)_R &= m\,(\psi_C)_L && (3.640) \end{aligned}$$

Ma osserviamo adesso che risulta

$$\begin{aligned} (\psi_L)_C &\equiv \mathcal{C}^{-1}\,\bar{\psi}_L^t = \mathcal{C}^{-1}\left\{\left[\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\psi\right]^\dagger\gamma^0\right\}^t = \mathcal{C}^{-1}\,\left[\psi^\dagger\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\gamma^0\right]^t = \\ &= \mathcal{C}^{-1}\,\gamma^0\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)(\psi^\dagger)^t = \mathcal{C}^{-1}\,\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\gamma^0(\psi^\dagger)^t = \\ &= \left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\mathcal{C}^{-1}\,\left(\psi^\dagger\gamma^0\right)^t = \left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\mathcal{C}^{-1}\,\bar{\psi}^t = \left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\psi_C = \\ &= (\psi_C)_R && (3.641) \end{aligned}$$

e, in modo analogo, troviamo che

$$(\psi_R)_C = (\psi_C)_L \tag{3.642}$$

Poiché $(\psi_R)_C$ è in realtà left-handed e $(\psi_L)_C$ è right-handed, questo suggerisce il fatto che sarà possibile rispettare le condizioni di chiralità di cui alle equazioni (3.635)-(3.636) ponendo

$$\begin{aligned} i\gamma^\mu\partial_\mu\psi_L &= m\,(\psi_L)_C && (3.643) \\ i\gamma^\mu\partial_\mu\psi_R &= m\,(\psi_R)_C && (3.644) \end{aligned}$$

ovvero imponendo la condizione di Majorana, per la quale

$$\psi_R = (\psi_L)_C; \qquad \psi_L = (\psi_R)_C \tag{3.645}$$

Si osservi, a questo punto, che le due equazioni (3.643) e (3.644) sono, in realtà, la stessa equazione, infatti, applicando una seconda volta la simmetria C, per esempio, alla (3.643) e usando la (3.645) otteniamo la (3.644).
Si osservi altresì che la condizione di Majorana implica direttamente che il campo ψ sia autoconiugato di carica, i.e. che $\psi = \psi_C$, infatti ripartendo dalla decomposizione del campo nelle sue due componenti chirali

$$\psi = \psi_L + \psi_R \tag{3.646}$$

e usando la condizione (3.645), si ottiene

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_L + \psi_R = \psi_L + (\psi_L)_C \\ &\Leftrightarrow \quad \psi_C \equiv C\,\psi\,C^{-1} = C\,(\psi_L)\,C^{-1} + C\,((\psi_L)_C)\,C^{-1} \\ &\Leftrightarrow \quad \psi_C = (\psi_L)_C + \psi_L = \psi && (3.647) \end{aligned}$$

Se ci poniamo adesso in rappresentazione di Weyl, dove

$$\gamma^\mu_W = W\,\gamma^\mu\,W^{-1} \tag{3.648}$$

con γ^μ che sta per le consuete matrici gamma nella rappresentazione di Pauli-Dirac, mentre

$$W = W^\dagger = W^{-1} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma_0 + \gamma_5) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I & I \\ I & -I \end{pmatrix} \tag{3.649}$$

ecco che, poiché risulta che $\gamma_{5W} = \gamma_0$, abbiamo che

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix} \tag{3.650}$$

ed è quindi immediato concludere che le due equazioni (3.643) e (3.644) sono riassunte dalla singola equazione (di Majorana)

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\psi = m\,\psi_C \tag{3.651}$$

che ne costituisce una sintesi, valida indipendentemente dalla rappresentazione delle matrici γ.

Un'altra rappresentazione delle matrici γ^μ molto interessante per l'argomento che stiamo trattando è poi la rappresentazione di Majorana stessa, in cui accade che tutte le matrici γ^μ risultano immaginarie pure.
Questa rappresentazione, rispetto alla rappresentazione di Pauli-Dirac, è definita dalla relazione

$$\gamma^\mu_M = \tilde{M}\,\gamma^\mu\tilde{M}^\dagger \tag{3.652}$$

dove

$$\tilde{M} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I - i\sigma_2 & I + i\sigma_2 \\ -iI - \sigma_2 & iI - \sigma_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \tilde{M}^\dagger = \tilde{M}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I + i\sigma_2 & iI - \sigma_2 \\ I - i\sigma_2 & -iI - \sigma_2 \end{pmatrix} \tag{3.653}$$

Risulta allora che (si ricordi che $\sigma_i^2 = I$ e che $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 0$ se $i \neq j$)

$$\begin{aligned} \gamma^0_M &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I & -i\sigma_2 \\ -\sigma_2 & -iI \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -\sigma_2 \\ i\sigma_2 & iI \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & iI \\ -iI & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.654}$$

$$\begin{aligned}
\gamma^1_M &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I & -i\sigma_2 \\ -\sigma_2 & -iI \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -\sigma_2 \\ i\sigma_2 & iI \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_1 \\ -i\sigma_1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (3.655) \\
\gamma^2_M &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I & -i\sigma_2 \\ -\sigma_2 & -iI \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -\sigma_2 \\ i\sigma_2 & iI \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} -iI & 0 \\ 0 & iI \end{pmatrix} \qquad (3.656) \\
\gamma^3_M &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I & -i\sigma_2 \\ -\sigma_2 & -iI \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -\sigma_2 \\ i\sigma_2 & iI \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_3 \\ -i\sigma_3 & 0 \end{pmatrix} \qquad (3.657)
\end{aligned}$$

mentre, per quanto riguarda γ_{5M}, abbiamo

$$\begin{aligned}
\gamma_{5M} &= i\,\gamma^0_M\,\gamma^1_M\,\gamma^2_M\,\gamma^3_M = i\begin{pmatrix} 0 & iI \\ -iI & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_1 \\ -i\sigma_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -iI & 0 \\ 0 & iI \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_3 \\ -i\sigma_3 & 0 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_2 \\ -\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \qquad (3.658)
\end{aligned}$$

Il fatto che le matrici γ^μ siano tutte immaginarie pure significa che l'equazione di Dirac, nella rappresentazione di Majorana

$$(i\gamma^\mu_M\partial_\mu - m)\ \psi_M(x) = 0 \qquad (3.659)$$

è reale e dunque se $\psi_M(x)$ ne è una soluzione, allora anche $\psi^*_M(x)$ deve esserlo. Questo significa che, per esempio, se

$$\psi(x) = u(p)\, e^{-ipx} \qquad (3.660)$$

è una soluzione a energia positiva, allora

$$\psi^*(x) = u^*(p)\, e^{ipx} \qquad (3.661)$$

sarà certamente una soluzione della stessa equazione, corrispondente però a energia negativa.
Una relazione fra gli spinori $u^*(p)$ e gli spinori $v(p)$ (e viceversa), in realtà, l'abbiamo già incontrata quando, proprio a proposito della coniugazione di carica, abbiamo visto che

$$\mathcal{C}^{-1}\left(\bar{u}^s(\vec{p})\right)^t = i\gamma^2\, u^*(\vec{p}) = v^s(\vec{p}) \qquad (3.662)$$
$$\mathcal{C}^{-1}\left(\bar{v}^s(\vec{p})\right)^t = i\gamma^2\, v^*(\vec{p}) = u^s(\vec{p}) \qquad (3.663)$$

Ma vediamo adesso cosa succede in rappresentazione di Majorana e iniziamo partendo dagli spinori $u(p)$: abbiamo

$$\begin{aligned} u_M^{(r)}(\vec{p}) &= \tilde{M}\, u^{(r)}(\vec{p}) = \tilde{M}\, \frac{m+\not{p}}{\sqrt{E_p+m}}\, u_0^{(r)} \equiv \tilde{M}\, \frac{m+p_\mu\,\gamma^\mu}{\sqrt{E_p+m}}\, u_0^{(r)} = \\ &= \frac{m+p_\mu\,\gamma_M^\mu}{\sqrt{E_p+m}}\, \tilde{M}\, u_0^{(r)} \equiv \frac{m+\not{p}_M}{\sqrt{E_p+m}}\, u_{0M}^{(r)} \end{aligned} \qquad (3.664)$$

dove abbiamo posto $\not{p}_M \equiv p_\mu\,\gamma_M^\mu$ e $u_{0M}^{(r)} \equiv \tilde{M}\, u_0^{(r)}$.
Procedendo in modo analogo per gli spinori di tipo v, otteniamo

$$v_M^{(r)}(\vec{p}) = \frac{m-\not{p}_M}{\sqrt{E_p+m}}\, v_{0M}^{(r)} \qquad (3.665)$$

Ma essendo le matrici γ immaginarie pure, evidentemente avremo che

$$u_M^{(r)*}(\vec{p}) = \frac{m-\not{p}_M}{\sqrt{E_p+m}}\, u_{0M}^{(r)*} \qquad (3.666)$$

$$v_M^{(r)*}(\vec{p}) = \frac{m+\not{p}_M}{\sqrt{E_p+m}}\, v_{0M}^{(r)*} \qquad (3.667)$$

D'altronde

$$\begin{aligned} u_{0M}^{(r)} &= \tilde{M}\, u_0^{(r)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I-i\sigma_2 & I+i\sigma_2 \\ -iI-\sigma_2 & iI-\sigma_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w^{(r)} \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} w^{(r)}-i\sigma_2\, w^{(r)} \\ -i\, w^{(r)}-\sigma_2\, w^{(r)} \end{pmatrix} \end{aligned} \qquad (3.668)$$

$$\begin{aligned} v_{0M}^{(r)} &= \tilde{M}\, v_0^{(r)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I-i\sigma_2 & I+i\sigma_2 \\ -iI-\sigma_2 & iI-\sigma_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{w}^{(r)} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \tilde{w}^{(r)}+i\sigma_2\, \tilde{w}^{(r)} \\ i\, \tilde{w}^{(r)}-\sigma_2\, \tilde{w}^{(r)} \end{pmatrix} \end{aligned} \qquad (3.669)$$

Ma, come già sappiamo, risulta

$$\tilde{w}^{(r)} = -i\sigma_2 w^{(r)} \qquad (3.670)$$

e dunque (si ricordi che $\sigma_2^2 = I, \sigma_2 = -\sigma_2^*$)

$$v_{0M}^{(r)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i\sigma_2\, w^{(r)} + w^{(r)} \\ \sigma_2\, w^{(r)} + i\, w^{(r)} \end{pmatrix} = u_{0M}^{(r)*} \qquad (3.671)$$

per cui, nella rappresentazione di Majorana, risulta semplicemente che

$$u_M^{(r)*}(\vec{p}) = \frac{m - \not{p}_M}{\sqrt{E_p + m}}\, v_{0M}^{(r)} = v_M^{(r)}(\vec{p}) \tag{3.672}$$

$$v_M^{(r)*}(\vec{p}) = \frac{m + \not{p}_M}{\sqrt{E_p + m}}\, u_{0M}^{(r)} = u_M^{(r)}(\vec{p}) \tag{3.673}$$

Venendo infine alla rappresentazione spettrale del campo di Majorana, si ha

$$\psi(x) = \sum_{r=1}^{2} \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \{a^{(r)}(\vec{p})\, u^{(r)}(\vec{p})\, e^{-ipx} + a^{\dagger(r)}(\vec{p})\, v^{(r)}(\vec{p})\, e^{ipx}\} \tag{3.674}$$

$$\bar{\psi}(x) = \sum_{r=1}^{2} \int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3} \{a^{(r)}(\vec{p})\, \bar{v}^{(r)}(\vec{p})\, e^{-ipx} + a^{\dagger(r)}(\vec{p})\, \bar{u}^{(r)}(\vec{p})\, e^{ipx}\} \tag{3.675}$$

con, quanto alla coniugazione di carica,

$$C\, a^{(r)}(\vec{p})\, C^{-1} = a^{(r)}(\vec{p}); \qquad C\, a^{\dagger(r)}(\vec{p})\, C^{-1} = a^{\dagger(r)}(\vec{p}) \tag{3.676}$$

per cui risulta ovvio che

$$C\, \psi(x)\, C^{-1} \equiv \psi_C(x) = \psi(x) \tag{3.677}$$

4 Scattering e decadimenti

I processi di scattering, insieme a quelli di decadimento (che, comunque, sono molto simili a quelli d'urto quanto a trattazione formale), costituiscono la via naturale che fornisce accesso alla dinamica delle interazioni fra le particelle elementari.

4.1 La matrice S

L'operatore che descrive i processi d'urto e di decadimento è la matrice S.
Nel seguito ne forniremo la definizione e vedremo di inquadrarne il significato, anche allo scopo di renderne possibile una valutazione perturbativa; ma per far questo, è bene ripartire dai principi primi della Meccanica Quantistica !

E' noto che se $|\psi, t>$ è il *ket* che rappresenta, nello spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ separabile associato al sistema considerato, un certo stato fisico al tempo t, allora esso soddisfa l'equazione

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\psi, t> = H\,|\psi, t> \tag{4.1}$$

dove H è l'operatore hamiltoniano del sistema che, per ipotesi è autoaggiunto. Quando H non dipende esplicitamente dal tempo (sistemi conservativi) l'equazione precedente si integra facilmente nel modo seguente:

$$|\psi, t> = e^{-iHt}\,|\psi, 0> \tag{4.2}$$

e l'operatore unitario

$$U(t) = e^{-iHt} \tag{4.3}$$

viene chiamato, con ovvio significato, *operatore di evoluzione temporale.*

Se adesso A è una qualsiasi osservabile del sistema, i.e. un qualsiasi operatore autoaggiunto, allora, gli elementi di matrice di A fra stati del sistema al tempo t saranno dati da

$$\begin{aligned} &< \phi, t|A|\psi, t> = < \phi, 0|e^{iHt}\,A\,e^{-iHt}|\psi, 0> \equiv \\ &\equiv < \phi, 0|\,U^{-1}(t)\;\; A\;\; U(t)\,|\psi, 0> \end{aligned} \tag{4.4}$$

Come si vede, e come è ben noto dalla Meccanica Quantistica elementare, i due diversi punti di vista secondo cui

- $i)$ evolvono solo gli stati secondo la legge $|\psi,t>=e^{-iHt}\,|\psi,0>$,
- $ii)$ evolvono solo le osservabili del sistema, secondo la legge $A(t)=e^{iHt}\,A\,e^{-iHt}$

sono equivalenti ai fini della valutazione della dipendenza temporale delle ampiezze di transizione indotte da operatori dell'algebra delle osservabili.
Come al punto di vista $i)$ (Schrödinger Picture SP) corrisponde l'equazione di moto per lo stato (equazione di Schrödinger)

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\psi,t>=H\,|\psi,t> \quad \Rightarrow \quad |\psi,t>=e^{-iHt}\,|\psi> \tag{4.5}$$

così al punto di vista $ii)$ (Heisenberg Picture HP) corrisponde l'equazione di moto per le osservabili (equazione di Heisenberg)

$$i\frac{\partial}{\partial t}A(t)=[A(t),H] \quad \Rightarrow \quad A(t)=e^{iHt}\,A\,e^{-iHt} \tag{4.6}$$

Sia ora data $U(\alpha)$ una famiglia di operatori unitari, parametrizzata dalla variabile reale α. Tanto nello schema di Heisenberg come in quello di Schrödinger è banale rendersi conto che la seguente trasformazione <u>simultanea</u> su stati e osservabili

$$|\psi> \;\; \Rightarrow \;\; |\psi,\alpha>=U^{-1}(\alpha)|\psi> \tag{4.7}$$
$$A \;\; \Rightarrow \;\; A_\alpha=U^{-1}(\alpha)\;A\;U(\alpha) \tag{4.8}$$

lascia invarianti tutti i valori di aspettazione, infatti

$$<\psi,\alpha|A_\alpha|\psi,\alpha>=<\psi|U^{\dagger-1}(\alpha)\,U^{-1}(\alpha)\;A\,U(\alpha)\,U^{-1}(\alpha)|\psi>=<\psi|A|\psi> \tag{4.9}$$

Se poniamo adesso

$$U(\alpha)\equiv U^{-1}(t)=e^{iHt} \tag{4.10}$$

ecco che questa trasformazione unitaria ci fa passare dallo schema di Heisenberg a quello di Schrödinger, dato infatti che risulta

$$\begin{array}{c} |\psi,t>_S=U(t)\;|\psi>\equiv U(t)\;|\psi>_H \\ A_S=U(t)\;A_H\;U^{-1}(t) \end{array} \tag{4.11}$$

Ponendo invece

$$U(\alpha)\equiv U(t)=e^{-iHt} \tag{4.12}$$

ovviamente passiamo dallo schema di Schrödinger a quello di Heisenberg ...

Supponiamo adesso che l'hamiltoniana del sistema possa essere scritta come

$$H=H_0+H' \tag{4.13}$$

dove, convenzionalmente, H_0 rappresenta la parte "libera", i.e. quella che solitamente sappiamo trattare per ciò che riguarda l'evoluzione del sistema (autostati, etc ...) e $H^{'}$ rappresenta la perturbazione, i.e. un'interazione.
Ammettiamo che H_0 come H non dipendano esplicitamente dal tempo e poniamo

$$U_0(t) \equiv e^{-iH_0t}, \qquad U(t) \equiv e^{-iHt} \tag{4.14}$$

Indichiamo con $|\psi, t>_S$ e A_S , rispettivamente, gli stati e le osservabili nella SP e con $|\psi>_H$, $A_H(t)$ i medesimi nella HP.
Accanto a questi due schemi, se ne pone un altro, quello che è denominato in letteratura *rappresentazione di interazione* (Interaction Picture, IP) che, come vedremo, è una specie di via di mezzo fra i due ed è molto comodo per trattare, appunto, il problema legato agli effetti dell'interazione stessa.
Facciamo per questo la seguente trasformazione simultanea su stati e osservabili

$$\begin{array}{ccccc} |\psi, t>_S & & |\psi, t>_I & \equiv & U_0^{-1}(t)\; |\psi, t>_S = e^{iH_0t}\, e^{-iHt}\, |\psi>_H \\ A_S & \rightarrow & A_I(t) & \equiv & U_0^{-1}(t)\; A_S\; U_0(t) \end{array} \tag{4.15}$$

Per quanto detto prima, evidentemente gli stati $|\psi, t>_I$ e le osservabili $A_I(t)$ sono "buoni" quanto gli stati $|\psi, t>_S$ e le osservabili A_S , oppure gli stati $|\psi>_H$ e le osservabili $A_H(t)$ per ciò che concerne lo studio dell'evoluzione del sistema, cioè per quanto riguarda la valutazione dei valori medi delle osservabili, in funzione del tempo. Questi valori medi[199] saranno ovviamente dati infatti da[200]

$$_I\!< \psi, t|\, A_I(t) |\psi, t>_I \tag{4.16}$$

Determiniamo ora come evolvono gli stati nella IP: si ha

$$\begin{aligned} & i\frac{\partial}{\partial t}|\psi, t>_I = i\frac{\partial}{\partial t}\, U_0^{-1}(t)\, U(t)\, |\psi>_H = i\frac{\partial}{\partial t}\, e^{iH_0t}\, e^{-iHt}\, |\psi>_H = \\ & = -H_0\, e^{iH_0t}\, e^{-iHt}\, |\psi>_H + e^{iH_0t}\, H\, e^{-iHt}\, |\psi>_H = \\ & = -H_0|\psi, t> + e^{iH_0t}\, H\; e^{-iH_0t}\, e^{iH_0t}\; e^{-iHt}\, |\psi>_H = \\ & = e^{iH_0t}\, (H - H_0)\; e^{-iH_0t}\, |\psi, t> \equiv H_I^{'}(t)\, |\psi, t>_I \end{aligned} \tag{4.17}$$

mentre per le osservabili risulta

$$i\frac{\partial}{\partial t}A_I(t) = i\frac{\partial}{\partial t}U_0(t')\, A_S\, U_0(t) = [A_I(t), H_0] \tag{4.18}$$

In sostanza, quindi, nella IP, mentre gli stati evolvono con l'hamiltoniana $H_I^{'}(t)$, che, ricordiamolo ancora, è definita come

$$H_I^{'}(t) = U_0(-t)\, H^{'}\, U_0(t) = U_0(t)^{-1}\, H^{'}\, U_0(t) = e^{iH_0t}\, H^{'}\, e^{-iH_0t} \tag{4.19}$$

[199]Nel seguito, per comodità di notazione, ometteremo, quando questo non produrrà possibili confusioni, l'indice I.

[200]Questo schema, naturalmente, coincide con quello di Heisenberg quando l'interazione è assente ... !

le osservabili evolvono secondo l'hamiltoniana libera H_0, *esattamente* come accade, in assenza di interazione, nella Heisenberg Picture.
Definiamo adesso l'operatore[201] unitario $U(t,t')$ nel modo seguente

$$U(t,t')\,|\psi,t'>_S \equiv |\psi,t>_S \tag{4.20}$$

Dalla definizione si ottiene immediatamente che

$$U(t,t')\,U(t')\,|\psi>_H = U(t)\,|\psi>_H \qquad \forall\; |\psi> \in \mathcal{H} \tag{4.21}$$

ovvero risulta

$$U(t,t') = U(t)\,U^{-1}(t') \tag{4.22}$$

per cui è immediato dimostrare che

$$\begin{array}{ccc} U(t,t')\,U(t',t'') & = & U(t,t'') \\ U(t,t')^{-1} & = & U(t',t) \\ U(t,0) & = & U(t) \end{array} \tag{4.23}$$

Analogamente definiamo l'operatore $U_I(t,t')$ nel modo seguente

$$U_I(t,t')\,|\psi,t'>_I \equiv |\psi,t>_I \tag{4.24}$$

e si ottiene ancora che risulta

$$U_I(t,t') = U_I(t)\,U_I^{-1}(t') \tag{4.25}$$

come pure che valgono, anche per questo operatore, le proprietà (4.23).
Poichè dalla definizione (4.15) è evidente che risulta

$$U_I(t) \equiv U_0^{-1}(t)\; U(t) = e^{iH_0t}\,e^{-iHt}$$

ne segue altresì che

$$\begin{aligned} U_I(t,t') &= U_I(t)\,U_I^{-1}(t') = U_0^{-1}(t)\,U(t)\;\; U^{-1}(t')\,U_0(t') \\ &= U_0^{-1}(t)\,U(t,t')\,U_0(t') \end{aligned} \tag{4.26}$$

E veniamo adesso alla matrice S.
Sia dunque α un set completo di osservabili che commutano, relative al sistema considerato, comprendente l'hamiltoniana imperturbata H_0.
Indichiamo con $|\alpha>$ la base da esso definita, vista nello schema di Heisenberg relativamente al caso imperturbato (hamiltoniana H_0).

[201] Esso è l'operatore unitario che trasforma il vettore che, nella SP rappresenta lo stato assegnato al tempo t', in quello che l'evoluzione con l'hamiltoniana completa H lo porta ad essere al tempo t.

Supponiamo adesso che uno stato $|\alpha >$ si sia evoluto liberamente da $-\infty$ fino al tempo t' e quindi, fra t' e t, si sia evoluto secondo l'hamiltoniana completa (perturbata dall'interazione $H^{'}$).
Ci chiediamo qual è l'ampiezza relativa alla transizione dallo stato così ottenuto verso uno stato $|\beta >$, libero da t a $+\infty$, causata dall'interazione stessa.
In altre parole, ci facciamo la seguente domanda: assumendo di considerare il sistema come libero sia prima di t' che dopo t, lo stato che si è ottenuto dopo t a partire dallo stato $|\alpha >$ al tempo t', come è connesso con gli stati che risulterebbero da un'evoluzione libera del sistema, regolata solo da H_0 ?
Per quanto concerne l'ampiezza di transizione di cui sopra, evidentemente avremo

$$A_{\beta\alpha}(t,t') \; = \; _S< \beta, t, lib|\, U(t,t')\, |\alpha, t', lib >_S \tag{4.27}$$

dove $|\alpha, t', lib >_S$ è lo stato $|\alpha >$ che si è evoluto liberamente fino al tempo t' e, analogamente $|\beta, t, lib >_S$ è lo stato $|\beta >$ che si è evoluto liberamente fino al tempo t. Poichè, in generale, risulta

$$|\alpha, t', lib >_S = U_0(t')\, |\alpha >_H ; \qquad |\beta, t, lib >_S = U_0(t)\, |\beta >_H \tag{4.28}$$

abbiamo evidentemente che

$$A_{\beta\alpha}(t,t') \; =_H < \beta| U_0^{-1}(t)\, U(t,t')\, U_0(t')\, |\alpha >_H \tag{4.29}$$

ovvero, per la (4.26),

$$A_{\beta\alpha}(t,t') \; = < \beta|\, U(t,t')_I\, |\alpha > \tag{4.30}$$

Passando al limite la (4.30) per t che va a $+\infty$ e t' che va a $-\infty$ otteniamo proprio, per la sua stessa definizione, l'elemento di matrice S fra i due stati considerati, i.e.

$$S_{\beta\alpha} \equiv < \beta|\, S\, |\alpha > = \lim_{t\to+\infty, t'\to-\infty} A_{\beta\alpha}(t,t') = \lim_{t\to+\infty} < \beta| U_I(t,-t) |\alpha > \tag{4.31}$$

ovvero

$$S = \lim_{t\to+\infty} U_I(t,-t) = U_I(\infty, -\infty) \tag{4.32}$$

La matrice S, evidentemente unitaria vista la definizione du cui sopra, viene così legata all'operatore di evoluzione temporale in rappresentazione di interazione. Essa, per come l'abbiamo definita, descrive quindi l'azione determinata dalla presenza dell'interazione $H^{'}$ su un set completo di autostati dell'hamiltoniana libera, definiti in rappresentazione di Heisenberg.

Chiaramente poi, per conoscere effettivamente gli elementi di matrice $S_{\beta\alpha}$, occorrerà in qualche modo riuscire a esplicitare l'operatore $U_I(t,t')$ e quindi passare al limite. D'altronde, per la (4.25), risulta

$$U_I(t,t') = U_I(t)\, U_I^{-1}(t') \tag{4.33}$$

dove, per la (4.15), se H_0 e H sono indipendenti dal tempo, è

$$U_I(t) = U_0^{-1}(t)\, U(t) = e^{iH_0 t}\, e^{-iHt} \tag{4.34}$$

Ne segue quindi che

$$\frac{dU_I(t,t')}{dt} = \left[\frac{dU_I(t)}{dt}\right] U_I^{-1}(t') \tag{4.35}$$

Ma, evidentemente l'operatore $U_I(t)$ soddisfa la seguente equazione differenziale

$$\begin{aligned} i\frac{dU_I}{dt} &= -H_0\, e^{iH_0 t}\, e^{-iHt} + e^{iH_0 t}\, H\, e^{-iHt} = \\ &= e^{iH_0 t}\, [H - H_0]\; e^{-iH_0 t}\, e^{iH_0 t}\; e^{-iHt} = H_I^{'}(t)\, U_I(t) \\ &\Rightarrow \;\; \frac{dU_I}{dt} = -i\, H_I^{'}(t)\, U_I(t) \end{aligned} \tag{4.36}$$

Quindi, sostituendo nella (4.35), si ha

$$\frac{dU_I(t,t')}{dt} = -i\, H_I^{'}(t)\, U_I(t)\, U_I^{-1}(t') \equiv -i\, H_I^{'}(t)\, U_I(t,t') \tag{4.37}$$

D'altronde, evidentemente, $U_I(t',t') = I$ e con questa condizione al contorno l'equazione (4.37) può essere formalmente integrata in serie nel modo seguente:

$$U_I(t,t') = I + (-i)\int_{t'}^{t} H_I^{'}(\tau)\, d\tau + (-i)^2 \int_{t'}^{t} H_I^{'}(\tau)\, d\tau \int_{t'}^{\tau} H_I^{'}(\tau')\, d\tau' + ...$$

per cui, data la (4.32), risulta infine

$$\begin{aligned} S &= I + (-i)\int_{-\infty}^{\infty} H_I^{'}(\tau)\, d\tau + (-i)^2 \int_{-\infty}^{\infty} H_I^{'}(\tau)\, d\tau \int_{-\infty}^{\tau} H_I^{'}(\tau')\, d\tau' + ... \\ &= I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1, ..., d\tau_n\; \mathcal{T}\left(H_I^{'}(\tau_1)\, ... H_I^{'}(\tau_n)\right) = \\ &\equiv \mathcal{T}\left(exp\left(-i\int_{-\infty}^{+\infty} dt\;\, H_I^{'}(t)\right)\right) \end{aligned} \tag{4.38}$$

dove $\mathcal{T}\left(H_I^{'}(\tau_1)\, ... H_I^{'}(\tau_n)\right)$ è il *prodotto cronologico*[202] *(time-ordered)* degli operatori in parentesi, introdotto da Dyson, che coincide con il prodotto degli stessi operatori, con il tempo che decresce da sinistra verso destra, i.e. $\tau_1 \geq \tau_2 \geq ... \geq \tau_n$.

[202] Questo ordinamento fa sì che lo stesso termine compaia nell'espressione da integrare tante volte quante sono le permutazioni del loro numero, da cui la divisione per $n!$.

4.2 *Proprietà di S sotto CPT*

Consideriamo un sistema inizialmente libero, retto dall'hamiltoniana H_0, per il quale venga accesa l'interazione descritta dall'hamiltoniana $H^{'}$ indipendente esplicitamente dal tempo.

In QFT, sotto ipotesi molto generali, come la località e l'invarianza sotto il gruppo di Lorentz, si dimostra che la simmetria[203] $CPT \equiv \Theta$ è conservata ovvero l'operatore Θ commuta sia con l'hamiltoniana imperturbata H_0 che con quella di interazione $H^{'}$.

La matrice S che descrive, in rappresentazione di interazione, le transizioni fra gli autostati di H_0 (stati imperturbati), come abbiamo visto prima, è data da

$$S = \mathcal{T}\left(exp\left(-i\int_{-\infty}^{+\infty} dt\ H_I^{'}(t)\right)\right) \tag{4.39}$$

dove $H_I^{'}(t)$ è l'hamiltoniana di interazione in rappresentazione di interazione, i.e.

$$H_I^{'}(t) = e^{iH_0 t}\, H^{'}\, e^{-iH_0 t} \tag{4.40}$$

Osserviamo per prima cosa che l'operatore Θ, per via del suo carattere antiunitario legato a T, *non* commuta con $H_I^{'}(t)$. Abbiamo, infatti, che

$$\begin{aligned} \Theta\, e^{iH_0 t}\, \Theta^{-1} &= \Theta\left[I + \frac{(iH_0 t)}{1!} + \frac{(iH_0 t)^2}{2!} + ...\right]\Theta^{-1} = \\ &= I + \frac{(-iH_0 t)}{1!} + \frac{(-iH_0 t)^2}{2!} + ... = e^{-iH_0 t} \end{aligned} \tag{4.41}$$

dove si è usato il fatto che Θ commuta con H_0.

Ne segue allora che, poiché per ipotesi Θ commuta anche con $H^{'}$, risulta

$$\begin{aligned} \Theta\, H_I^{'}(t)\, \Theta^{-1} &= \Theta\, e^{iH_0 t}\, \Theta^{-1}\, \Theta\, H^{'}\, \Theta^{-1}\, \Theta\, e^{-iH_0 t}\, \Theta^{-1} = \\ &= e^{-iH_0 t}\, H^{'}\, e^{iH_0 t} = H_I^{'}(-t) \end{aligned} \tag{4.42}$$

Torniamo adesso alla matrice S.

Vogliamo stabilire l'effetto che ha la trasformazione Θ su di essa.

Per fare questo, immaginiamo per prima cosa di ottenere, al solito, la matrice S come limite per $t \to \infty$ di $S(t,-t)$, dove

$$S(t,-t) \equiv U_I(t,-t) = \mathcal{T}\left(exp\left(-i\int_{-t}^{+t} d\tau\ H_I^{'}(\tau)\right)\right) \tag{4.43}$$

essendo l'operatore $S(t,-t)$ niente altro che l'operatore di evoluzione temporale, scritto in rappresentazione di interazione, fra $-t$ e $+t$.

[203] Quanto concluderemo adesso per Θ vale anche per l'inversione temporale T, se essa è una simmetria conservata del sistema, poiché, come Θ, essa è antiunitaria, ed è proprio questo, come vedremo, l'aspetto cruciale che ci consente di giungere al risultato.

Osserviamo adesso che, volendo conoscere questo operatore fra $-t$ e $t+\delta$, i.e. l'operatore $S(t+\delta,-t)$, questo di otterrà applicando al vettore di stato prima l'operatore $S(t,-t)$ e quindi l'operatore $S(t+\delta,t)$, i.e. risulterà

$$S(t+\delta,-t) = S(t+\delta,t)\, S(t,-t) \tag{4.44}$$

da cui segue evidentemente che, fissato comunque un intero N e posto

$$\delta = t/N \tag{4.45}$$

abbiamo

$$S(t,-t) = S(t,t-\delta)S(t-\delta,t-2\delta)...S(-t+\delta,-t) \tag{4.46}$$

D'altronde, nel limite in cui $\delta \to 0$, l'operatore $S(t+\delta,t)$ potrà essere scritto anche come (al primo ordine in δ) come

$$S(t+\delta,t) \approx I - i\, H_I^{'}(t)\,\delta \approx I - i\, H_I^{'}(t+\delta)\,\delta \tag{4.47}$$

per cui avremo

$$\begin{aligned} S(t,-t) &= \lim_{N\to\infty} (I - i\, {H_I}'(t_1)\,\delta)\,(I - i\, {H_I}'(t_2)\,\delta)\, ...\, (I - i\, {H_I}'(t_{2N})\,\delta) \equiv \\ &\equiv \lim_{N\to\infty} \hat{S}(N,t) \end{aligned} \tag{4.48}$$

dove abbiamo posto, per comodità

$$t_n = t - n\,\delta \equiv t - n\,t/N; \qquad n = 1,...,2N \tag{4.49}$$

e il prodotto di cui sopra, nella forma in cui i vari fattori sono linearizzati al primo ordine, definisce la quantità $\hat{S}(N,t)$. Risulta allora che

$$\begin{aligned} \Theta\, S\; \Theta^{-1} &= \lim_{t\to\infty} \Theta \left(\lim_{N\to\infty} \hat{S}(N,t) \right) \Theta^{-1} = \\ &= \lim_{t\to\infty} \left\{ \lim_{N\to\infty} \Theta\; [I - i\, {H_I}'(t_1)\,\delta]\, \Theta^{-1} ... \Theta\; [I - i\, {H_I}'(t_{2N})\,\delta]\, \Theta^{-1} \right\} = \\ &= \lim_{t\to\infty} \left\{ \lim_{N\to\infty} [I + i\, {H_I}'(-t_1)\,\delta]\, ...\, [I + i\, {H_I}'(-t_{2N})\,\delta] \right\} = \\ &= \lim_{t\to\infty} \left\{ \lim_{N\to\infty} [I + i\, {H_I}'(-t+\delta)\,\delta]\, ...\, [I + i\, {H_I}'(t)\,\delta] \right\} \end{aligned} \tag{4.50}$$

Ma, essendo δ reale ed $H_I^{'}$ hermitiana, risulta

$$I + i\, H_I^{'}(t)\,\delta = \left(I - i\, H_I^{'}(t)\,\delta \right)^{\dagger} \tag{4.51}$$

per cui l'espressione di sopra, a meno di termini del secondo ordine in δ, diviene

$$\begin{aligned}\Theta\, S\, \Theta^{-1} &= \lim_{\tau\to\infty}\lim_{N\to\infty} \{[I - i\, {H_I}'(t)\,\delta] \ldots [I - i\, {H_I}'(-t+\delta)\,\delta]\}^\dagger = \\ &= \lim_{\tau\to\infty}\lim_{N\to\infty} \{[I - i\, {H_I}'(t-\delta)\,\delta] \ldots [I - i\, {H_I}'(-t)\,\delta]\}^\dagger \equiv \\ &\equiv S^\dagger = S^{-1}\end{aligned} \tag{4.52}$$

Dunque possiamo concludere che, essendo Θ una simmetria antiunitaria conservata, la matrice S, sotto Θ, è tale per cui

$$\Theta\, S\, \Theta^{-1} = S^\dagger \tag{4.53}$$

Da questa conclusione segue allora che, dati comunque due stati imperturbati $|\, A >$ e $|\, B >$, poiché l'ampiezza di transizione fra uno e l'altro risulta data da

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{A\leftarrow B} \equiv < A\,|S\,|\,B > &\equiv\; < A\,|S\,B > = < \Theta^{-1}\,\Theta\, A|\,\Theta^{-1}\,\Theta\, S\,\Theta^{-1}\,\Theta\, B > = \\ &=\; < \Theta^{-1}\,\Theta\, A|\,\Theta^{-1}\; S^\dagger\;\Theta\, B >\end{aligned} \tag{4.54}$$

e poiché Θ^{-1} è antiunitario, si ha infine che

$$\begin{aligned}< A|\,S\,|\,B > &=\; < \Theta^{-1}\,\Theta\, A|\,\Theta^{-1}\; S^\dagger\;\Theta\, B > = < \Theta\, A|\; S^\dagger\;\Theta\, B >^* = \\ &=\; < S^\dagger\,\Theta\, B|\,\Theta\, A >\end{aligned} \tag{4.55}$$

D'altronde S è un operatore lineare e quindi

$$< S^\dagger\,\phi|\,\psi > = < \phi|\,S\,\psi > \tag{4.56}$$

per cui, in definitiva, in termini di ampiezze di transizione, abbiamo che

$$\mathcal{A}_{A\leftarrow B} = < A\,|S\,|\,B > = < \Theta\, B|\; S\;\Theta\, A > \equiv < \Theta\, B|\; S\,|\Theta\, A > \equiv \mathcal{A}_{\Theta B\leftarrow\Theta A} \tag{4.57}$$

ovvero, se H' (e H_0) sono $\Theta-$invarianti, allora l'ampiezza di transizione indotta dalla interazione H' dallo stato $|\, B >$ allo stato $|\, A >$ è uguale a quella che la stessa interazione induce dallo stato $\Theta\,|\, A >$ allo stato $\Theta\,|\, B >$.
Per esempio, se consideriamo un processo di scattering come il seguente

$$A(\vec{p}, s_a) + B(\vec{q}, s_b) \to C(\vec{P}, s_c) + D(\vec{Q}, s_d) \tag{4.58}$$

allora, per via della simmetria $CPT \equiv \Theta$, ne segue che

$$\begin{aligned}&< C(\vec{P}, s_c)\,,\; D(\vec{Q}, s_d)\,|\; S\;|A(\vec{p}, s_a)\,,\; B(\vec{q}, s_b) > = \\ =\;& < \bar{A}(\vec{p}, -s_a)\,,\; \bar{B}(\vec{q}, -s_b)|\; S\;|\bar{C}(\vec{P}, -s_c)\,,\; \bar{D}(\vec{Q}, -s_d) >\end{aligned} \tag{4.59}$$

visto che, dalle relative definizioni segue che la simmetria $CPT \equiv \Theta$ trasforma lo stato di particella in quello di antiparticella, non cambia l'autovalore dell'impulso ed inverte il segno dell'autovalore della componente di spin.

4.3 Lo scattering in QFT

Abbiamo visto che, nell'ipotesi in cui un sistema fisico sia retto da un'hamiltoniana $H = H_0+H^{'}$, dove H_0 è l'hamiltoniana del sistema imperturbato e $H^{'}$ è l'hamiltoniana di interazione, allora, se $|i>$ ed $|f>$ sono due autostati[204] dell'hamiltoniana H_0 nella HP, l'ampiezza di transizione da $|i>$ ad $|f>$ indotta dalla perturbazione $H^{'}$ è data da

$$S_{fi} =< f|S|i > \equiv < f|U_I(\infty, -\infty)|i > \tag{4.60}$$

dove la forma esplicita della matrice S è data dalla espressione (4.38).

Questo risultato è stato dedotto, almeno implicitamente, nello schema della prima quantizzazione, ma esso continua a valere anche quando il processo di interazione è più complesso di quello di un semplice scattering elastico da potenziale, e accade, per esempio, che a causa dell'interazione, le particelle non si conservano, come accade nei processi di decadimento e in quelli di scattering non elastico ...

Per descrivere questo tipo di processi, in cui il numero delle particelle non necessariamente si conserva, occorre far uso della Teoria dei Campi.
In questo schema, adopereremo come spazio di Hilbert quello generato dalla somma diretta degli spazi di Fock[205] di tutte le particelle libere coinvolte nel processo considerato.

Finchè con c'è interazione, non c'è molto di più da dire: questi stati sono stazionari, per cui, fra di loro non è permessa alcuna transizione.
Ma supponiamo ora che sia presente una interazione $H^{'}$.
In questo caso, partendo da uno stato dei precedenti, esso non rimarrà più necessariamente uguale a se stesso e l'interazione potrà consentire transizioni fra stati diversi.

---

[204]Come abbiamo già detto, gli stati $|i>$ e $|f>$ sono chiamati *stati asintotici* e, come rappresentativi del sistema completo, vanno pensati in rappresentazione di interazione, i.e. in rappresentazione di Heisenberg riguardo ad H_0.

[205]Ricordiamo che, per definizione, ciascun spazio di Fock ha per base i seguenti vettori di stato di (multi)particella libera:

$$\begin{array}{ll} |\Omega> & \textit{vuoto} \\ a^\dagger(\vec{p})|\Omega> & \textit{una particella} \\ a^\dagger(p)a^\dagger(\vec{q})|\Omega> & \textit{due particelle} \\ \ldots & \end{array}$$

Per analizzare queste transizioni useremo, come abbiamo già detto, stati stazionari[206] dell'hamiltoniana libera e calcoleremo l'ampiezza di transizione indotta fra di loro a causa dell'interazione. Considereremo quindi più precisamente

- uno stato $|\chi_a>$, che chiameremo *iniziale*, comprendente vari frammenti (uno, se si tratta di un processo di decadimento, due se è un processo di scattering) in un canale[207] definito, indicato con la lettera a;

- uno stato *finale* $|\chi_b>$ comprendente, in generale, altri frammenti in un altro canale, che indicheremo con la lettera b.

Per $t \to -\infty$ lo stato $|\chi_a>$ sarà fatto dalle particelle non interagenti del canale a: per esempio, nel caso di uno scattering fra due particelle "1" e "2" aventi, rispettivamente, impulso $\vec{p}$ e $\vec{q}$, avremo evidentemente

$$|\chi_a>= a_1^\dagger(\vec{p})\, a_2^\dagger(\vec{q})|\Omega> \tag{4.61}$$

dove gli operatori $a_{1,2}^\dagger$ sono gli operatori di creazione dei frammenti *liberi* presenti nel canale a di ingresso (per semplicità di notazione e senza perdita di generalità, non stiamo qui indicando lo stato di spin).
Per $t \to +\infty$, analogamente, se assumiamo di essere interessati al canale b fatto ancora da due particelle "3" e "4", non necessariamente coincidenti con quelle di partenza e aventi, rispettivamente, impulso $\vec{P}$ e $\vec{Q}$, sarà

$$|\chi_b>= a_3^\dagger(\vec{P})\, a_4^\dagger(\vec{Q})|\Omega> \tag{4.62}$$

dove gli operatori $a_{3,4}^\dagger$ si riferiscono ora ai frammenti nel canale b di uscita.
Evidentemente lo scopo della teoria sarà proprio quello di calcolare l'ampiezza di transizione fra tali stati determinata dall'interazione, i.e. la quantità

$$S_{ba} \equiv < \chi_b|S|\chi_a> \tag{4.63}$$

Per la valutazione di S_{ba}, rifacciamoci ancora al fatto che, almeno nello schema di prima quantizzazione, è stato dimostrato che, lavorando in rappresentazione di interazione, risulta

$$\begin{aligned} S &= \mathcal{T}\left(exp\left(-i\int_{-\infty}^{+\infty} dt\ H_I^{'}(t)\right)\right) \equiv \\ &\equiv \mathcal{T}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}\int dt_1\,...\,dt_n H_I^{'}(t_1)...H_I^{'}(t_n)\right) \end{aligned} \tag{4.64}$$

[206]Non avrebbe senso, ovviamente, trattare con stati stazionari dell'hamiltoniana completa, dato che, come è ovvio, fra questi, per definizione di stazionarietà, non potrebbero avvenire mai transizioni !

[207]Un canale è definito come uno specifico insieme di frammenti separati, ognuno in uno stato quantico ben definito, non interagenti fra di loro quando la loro distanza di separazione è molto grande (con la sola possibile eccezione dell'interazione coulombiana che, essendo a lungo range, non è lecito considerare mai *spenta*...).

dove $H_I^{'}(t)$ è appunto l'hamiltoniana di interazione nella *Interaction Picture*

$$H_I^{'}(t) \equiv e^{iH_0t}\, H^{'}\, e^{-iH_0t} \tag{4.65}$$

e il simbolo $\mathcal{T}$ indica, come abbiamo già detto, l'operatore di ordinamento cronologico, definito in modo tale che

$$\mathcal{T}\left(H_I^{'}(t_1)...H_I^{'}(t_n)\right) \equiv H_I^{'}(t_{i_1})...H_I^{'}(t_{i_n}) \ \ con \ \ t_{i_1} \geq t_{i_2} \geq ...t_{i_n} \tag{4.66}$$

In MQ di prima quantizzazione l'hamiltoniana di perturbazione $H^{'}$ può venire identificata, per esempio, con il potenziale di scattering V.
Che accade in QFT ?
In questo caso l'interazione è espressa usando gli stessi campi che definiscono la teoria. Abbiamo visto che $H_I^{'}(t)$ evolve nel tempo esattamente come in rappresentazione di Heisenberg libera, ovvero $H_I^{'}(t)$ deve semplicemente essere scritta usando le soluzioni libere dei campi interessati, dipendenti dal tempo come se l'interazione non fosse presente !
Dunque

$$H_I^{'}(t) = \int d^3x\, \mathcal{H}^{'}(t,\vec{x}) \tag{4.67}$$

dove $\mathcal{H}^{'}(x)$ è la densità hamiltoniana di interazione

$$\mathcal{H}^{'}(x) = \mathcal{H}_{tot}(x) - \mathcal{H}_0(x) \tag{4.68}$$

e $\mathcal{H}_{tot}(x)$ e $\mathcal{H}_0(x)$ sono, rispettivamente, l'operatore di densità hamiltoniana totale e quello relativo all'evoluzione libera.
Quanto alla matrice di scattering S, risulta quindi che

$$S \ \equiv \ \mathcal{T}\left(exp\left(-i\int d^4x\ \mathcal{H}^{'}(x)\right)\right) \tag{4.69}$$

dove adesso[208]

$$\mathcal{T}\left(\mathcal{H}^{'}(x_1)...\mathcal{H}^{'}(x_n)\right) \equiv \mathcal{H}^{'}(x_{i_1})...\mathcal{H}^{'}(x_{i_n}) \ \ con \ \ x_{i_1}^0 \geq x_{i_2}^0 \geq ...x_{i_n}^0 \tag{4.70}$$

[208]L'ambiguità che consegue nella (4.70) quando due coordinate temporali sono uguali è irrilevante poiché

$$[\mathcal{H}^{'}(x), \mathcal{H}^{'}(y)] = 0 \ \ se \ \ (x-y)^2 < 0$$

e questo, a sua volta, è conseguenza della microcausalità, i.e. delle relazioni di (anti)commutazione dei campi (fermionici)bosonici e del fatto che il numero di campi fermionici che entrano nella lagrangiana di interazione e quindi nella $\mathcal{H}^{'}$ deve essere pari, se vogliamo che l'interazione possa essere relativisticamente invariante.

Dal punto di vista dell'invarianza sotto il gruppo di Lorentz[209] della matrice S, occorre osservare che, essendo $\mathcal{H} = T^{00}$, dove $T^{\mu\nu}$ è il *tensore (densità di) energia-impulso*, definito in termini della lagrangiana dalla ben nota relazione

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} \;&=\; \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\rho)}\partial^\nu \phi^\rho \;-\; g^{\mu\nu}\mathcal{L} \Rightarrow \\ &\Rightarrow\; T^{00} \equiv \mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^\rho}\,\dot{\phi}^\rho \;-\; \mathcal{L} \end{aligned} \tag{4.72}$$

ne segue che la densità hamiltoniana non è, in generale, scalare sotto il gruppo di Lorentz per cui nemmeno S, definita in termini di $\mathcal{H}$, lo sarebbe...
C'è però un'importante eccezione che è quella dell'accoppiamento diretto dei campi, cioè senza termini che coinvolgono le loro derivate[210]. In questo caso, infatti, per quanto riguarda il contributo dovuto alla sola interazione, risulta

$$T^{\mu\nu}(x) = -\mathcal{L}(x)\,\delta^{\mu\nu}$$

e quindi (stiamo indicando con $\mathcal{L}(x)$ solo il termine di interazione ...!)

$$\mathcal{H}'(x) = -\mathcal{L}(x) \tag{4.73}$$

che è scalare. Questa identità (4.73), che riguarda solo la parte di interazione, è assunta valida in ogni circostanza, per cui, in definitiva, si ha

$$S \;\equiv\; \mathcal{T}\left(exp\left(i\int \mathcal{L}(x)\,d^4x\right)\right) \tag{4.74}$$

[209]Come abbiamo visto, fissato un riferimento inerziale, l'ampiezza di transizione da uno stato iniziale $|\chi_\alpha>$ e uno stato finale $|\chi_\beta>$ vale

$$S_{\alpha\beta} = <\chi_\alpha|S|\chi_\beta>$$

Se andiamo in un altro sistema di riferimento, legato al precedente da una trasformazione del gruppo di Poincaré $U(a,\Lambda)$, allora se $|\chi'_\alpha>= U(a,\Lambda)|\chi_\alpha>$ e $|\chi'_\beta>= U(a,\Lambda)|\chi_\beta>$ sono gli stessi stati $|\chi_\alpha>$ e $|\chi_\beta$ visti nel nuovo riferimento, essendo il sistema fisico rimasto il solito e così pure la dinamica dell'interazione, deve evidentemente essere che

$$S_{\alpha\beta} = <\chi_\alpha|S|\chi_\beta> = <\chi'_\alpha|S|\chi'_\beta>$$

ovvero

$$S = U^{-1}(a,\Lambda)\; S\; U(a,\Lambda) \tag{4.71}$$

i.e., la matrice S deve commutare con tutti gli operatori che, nello spazio di Hilbert degli stati, rappresentano il gruppo di Poincaré (occorre e basta che accada per i generatori della rappresentazione ...) e, in questo senso, deve quindi essere un operatore scalare e invariante per traslazioni.

[210]In realtà, già nel caso dell'interazione elettromagnetica con un campo scalare carico, c'è un accoppiamento derivativo. Si dimostra comunque che, anche in questi casi, l'espressione corretta da usare per la matrice S è la (4.74).

Riscriviamo adesso la matrice S nel modo seguente

$$S = I + R \tag{4.75}$$

separando cioè il termine che descrive l'assenza di interazione da tutti gli altri. Evidentemente, dalla definizione, risulta

$$\begin{aligned} R &= \mathcal{T}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n \mathcal{L}(x_1) \dots \mathcal{L}(x_n)\right) \equiv \\ &\equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n \mathcal{T}\left(\mathcal{L}(x_1) \dots \mathcal{L}(x_n)\right) \end{aligned} \tag{4.76}$$

Consideriamo adesso lo sviluppo della matrice S al primo ordine perturbativo. Si ha

$$S = I + i \int d^4x\, \mathcal{L}(x) \quad \Rightarrow \quad R = i \int d^4x\, \mathcal{L}(x) \tag{4.77}$$

Supponiamo adesso che gli stati[211] iniziali e finali $|\chi_a>$ e $|\chi_b>$ siano anche autostati dell'impulso spaziale e indichiamo con p_a e p_b gli autovalori del quadrimpulso a essi corrispondenti. Risulta

$$R_{ba} =< \chi_b|\, S - I\, |\chi_a >= i < \chi_b| \int d^4x\, \mathcal{L}(x)\, |\chi_a > \tag{4.78}$$

D'altronde sappiamo che l'operatore di quadrimpulso P^μ è il generatore delle traslazioni spazio-temporali, ovvero

$$U(a) = e^{-ia\,P} = e^{-ia_\mu P^\mu} \tag{4.79}$$

per cui (si ricordi che, per il generico campo $\phi(x)$, $U(a)\phi(x)U^{-1}(a) = \phi(x+a)$)

$$e^{-iPy}\, \mathcal{L}(x)\, e^{iPy} = \mathcal{L}(x+y) \tag{4.80}$$

e dunque

$$\mathcal{L}(x) = e^{-iPx}\, \mathcal{L}(0)\, e^{iPx} \tag{4.81}$$

per cui, in definitiva, si ha

$$\begin{aligned} R_{ba} &= i < \chi_b| \int d^4x\; e^{-iPx}\, \mathcal{L}(0)\, e^{iPx}\, |\chi_a >= i \int d^4x\, e^{-ix(p_b - p_a)} \;< \chi_b|\, \mathcal{L}(0)\, |\chi_a >= \\ &= i(2\pi)^4\, \delta^4(p_b - p_a)\; < \chi_b|\, \mathcal{L}(0)\, |\chi_a > \end{aligned} \tag{4.82}$$

La struttura di questo risultato

$$R_{ba} \;=\; i(2\pi)^4\, \delta^4(p_b - p_a)\, \mathcal{M}_{ba} \tag{4.83}$$

[211] Si ricordi che per questi stati, essendo liberi, la rappresentazione di interazione coincide con quella di Heisenberg e dunque essi non evolvono nel tempo.

si può dimostrare[212] che resta sempre valida, indipendentemente dall'ordine dello sviluppo perturbativo, discendendo solo dalle proprietà di trasformazione per traslazioni della densità lagrangiana.
La quantità $\mathcal{M}_{ba}$ viene chiamata *elemento di matrice (invariante) della transizione.*

Osserviamo che l'espressione di cui alla (4.83), da un punto di vista strettamente fisico, discende unicamente dalla conservazione del quadrimpulso[213], i.e. dal fatto che gli stati iniziali e finali devono comunque avere $p_a = p_b$.
Nel caso, poi, in cui il processo di interazione possa essere rappresentato troncando lo sviluppo al primo ordine, da quanto precede risulta evidentemente che

$$\mathcal{M}_{ba} =< \chi_b | \, \mathcal{L}(0) \, | \chi_a > \qquad (4.84)$$

In ogni caso, se P_a e P_b sono gli autovalori del quadrimpulso totale dello stato iniziale e finale, da quanto precede possiamo concludere che risulta[214]

$$S_{ba} \quad = \quad \delta_{ba} + i \, (2\pi)^4 \, \delta^4(P_b - P_a) \, \mathcal{M}_{ba} \qquad (4.85)$$

Supponiamo, per il momento, di sapere[215] come fare per determinare l'elemento di matrice invariante $\mathcal{M}_{ba}$: il nostro scopo è comunque quello di arrivare a fare

[212]Consideriamo infatti un generico termine dello sviluppo perturbativo

$$< b | \int dx \, dy \, ...dz \, \mathcal{L}(x)\mathcal{L}(y)...\mathcal{L}(z) \, | a >$$

Vogliamo dimostrare che esso contiene in modo intrinseco il fattore $\delta^4(p_b - p_a)$.
Effettuiamo, infatti, sull'operatore la seguente trasformazione

$$\begin{aligned} & \int dx \, dy \, ...dz \, \mathcal{L}(x)\mathcal{L}(y)...\mathcal{L}(z) = \\ = & \int dx \, dy \, ...dz \, U(x)\mathcal{L}(0)U^{-1}(x) \, U(x)\mathcal{L}(y-x)U^{-1}(x)...U(x)\mathcal{L}(z-x)U^{-1}(x) = \\ = & \int dx \, dy \, ...dz \, U(x) \, \left[\mathcal{L}(0)\mathcal{L}(y-x)...\mathcal{L}(z-x)\right] \, U^{-1}(x) \end{aligned}$$

per cui, sostituendo (si noti che questo non interferisce con l'ordinamento temporale e quindi con il prodotto T-ordinato) si ha

$$\begin{aligned} & < b | \int dx \, dy \, ...dz \, \mathcal{L}(x)\mathcal{L}(y)...\mathcal{L}(z) \, | a >= \\ = & \; (2\pi)^4 \, \delta^4(p_b - p_a) < b | \int dY \, ...dZ \; < b | \, \mathcal{L}(0)\mathcal{L}(Y)...\mathcal{L}(Z) \, | a > \end{aligned}$$

dove abbiamo posto $Y = y - x$; $...Z = z - x$.
Risulta così provato quanto volevamo dimostrare.

[213]Nel caso dello scattering da potenziale, avevamo trovato una delta di conservazione solo dell'energia. Questo era dovuto al fatto che, in quel processo, solo l'energia era conservata e non l'impulso spaziale, per via proprio del potenziale esterno ...

[214]Abbiamo indicato formalmente il prodotto scalare $< \chi_b | \chi_a >$ con il simbolo δ_{ba}; ma la sua forma esplicita dipende, naturalmente, dalla normalizzazione degli stati...

[215]Il calcolo di $\mathcal{M}_{ba}$ è, in genere, un'impresa piuttosto laboriosa. Esso viene usualmente

confronti con dati sperimentali ovvero, tipicamente, determinare sezioni d'urto di processi di scattering, vite medie di particelle, etc ...
Come è legata $\mathcal{M}_{ba}$ con queste quantità ?
Evidentemente, per quanto detto sopra, la probabilità che dallo stato $|\chi_a>$ si sia passati allo stato $|\chi_b>$, quando $|\chi_b>\neq|\chi_a>$, sarà

$$W_{ba} = |S_{ba}|^2 = (2\pi)^4\ \delta^4(P_b - P_a)\ \cdot\ (2\pi)^4\ \delta^4(P_b - P_a)\ \cdot\ |\mathcal{M}_{ba}|^2 \tag{4.86}$$

e qui abbiamo una espressione che richiede di essere trattata, dal punto di vista matematico, con una certa cautela ... Abbiamo infatti ottenuto il quadrato di una δ di Dirac che non è un operatore ben definito !
Ma vediamo come si è originato. La delta nasce dall'integrale

$$\int e^{-i(P_b-P_a)x}\, d^4x \to (2\pi)^4\ \delta^4(P_b - P_a)$$

Il quadrato della delta, dunque, significa

$$\begin{aligned}&\int e^{-i(P_b-P_a)x}\, d^4x\ \cdot \int e^{-i(P_b-P_a)y}\, d^4y \to \\ &\to (2\pi)^4\ \delta^4(P_b - P_a)\ \cdot \int e^{-i\cdot 0}\, d^4y = (2\pi)^4\ \delta^4(P_b - P_a)\ \cdot V\,T\end{aligned} \tag{4.87}$$

dove il prodotto $V\,T$ è il quadri-volume di integrazione, che, a stretto rigore, è appunto ∞^4, ma che noi tratteremo inizialmente come se fosse finito, per poi passare al limite solo alla fine...
Dunque, al prezzo di questi "maltrattamenti" della matematica, abbiamo

$$W_{ba} = (2\pi)^4\ \delta^4(P_b - P_a)\ \cdot\ V\,T\ \cdot\ |\mathcal{M}_{ba}|^2 \tag{4.88}$$

Va detto comunque che, siccome in generale lo stato finale $|\chi_b>$ appartiene al continuo, noi in realtà saremo interessati più che alla probabilità di transizione verso un particolare stato $|\chi_b>$, a quella verso un insieme di stati opportunamente *prossimi* allo stato $|\chi_b>$.

La Regola d'oro di Fermi ci dice allora che dovremo moltiplicare W_{ba} per il numero di stati finali permessi, ovvero per il numero di cellette dello spazio delle fasi disponibili, i.e. per la quantità

$$d\mathcal{N} = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{d^3p_i\, V}{h^3}\right) = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{d^3p_i\, V}{(2\pi)^3}\right) \tag{4.89}$$

effettuato con l'ausilio del metodo dei *grafici di Feynman*, che, fissato l'ordine perturbativo desiderato, consente, attraverso regole abbastanza semplici, caratteristiche dell'interazione studiata, di poter tener conto di tutti i vari contributi all'ampiezza di scattering.

dove n è il numero di frammenti nello stato finale ed abbiamo usato il fatto che, per il principio di indeterminazione, una cella dello spazio delle fasi ha dimensione $h = 2\pi\,\hbar$ e noi abbiamo convenuto di porre $\hbar = 1$.
Quindi, con questa precisazione, risulta piuttosto che

$$dW_{ba} = (2\pi)^4\ \delta^4(P_b - P_a)\ \cdot\ V\,T\ \cdot\ |\mathcal{M}_{ba}|^2 \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{d^3p_i\,V}{(2\pi)^3}\right) \tag{4.90}$$

ovvero otteniamo una probabilità di transizione per unità di tempo pari a

$$\frac{d}{dt}\,(dW_{ba}) = (2\pi)^4\ \delta^4(P_b - P_a)\ \cdot\ V\ \cdot\ |\mathcal{M}_{ba}|^2\ \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{d^3p_i\,V}{(2\pi)^3}\right) \tag{4.91}$$

Però, l'espressione (4.91) vale nel caso in cui i vettori di stato siano normalizzati all'unità in tutto lo spazio; ma in generale non è questo il caso, non foss'altro per il motivo che gli stati $|\chi_a>$ e $|\chi_b>$ sono autostati dell'energia e dell'impulso corrispondenti ad autovalori nel continuo e quindi non hanno né possono norma finita !

Per questo, ciò che potremo fare in generale sarà, in realtà, solo di poter scegliere il valore delle densità spaziali ρ_i di particelle descritte dalle funzioni d'onda associate agli stati liberi e quindi occorrerà dividere la (4.91) per gli opportuni coefficienti di normalizzazione $\rho_i V$ che ne conseguono, i.e. avremo piuttosto

$$\frac{d}{dt}\,(dW_{ba})\ =\ \frac{(2\pi)^4\ \delta^4(P_b - P_a)\ \cdot\ V}{\prod_{j=1}^{k}(\rho_j^{in}\,V)}\ \cdot\ |\mathcal{M}_{ba}|^2\ \frac{\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{d^3p_i\,V}{(2\pi)^3}\right)}{\prod_{i=1}^{n}(\rho_i^{out}\,V)} \tag{4.92}$$

dove abbiamo indicato con k il numero di frammenti presenti nello stato iniziale.

Ma la scelta[216] che abbiamo fatto fin'ora è stata sempre quella di avere $\rho = 2E$

[216]Come abbiamo visto, questo corrisponde a prendere, per esempio, nel caso del campo scalare semplicemente le onde piane, i.e.

$$\psi_{\vec{p}}(\vec{x},t) = e^{-ipx}$$

senza alcun coefficiente davanti.
Nel caso del campo di Dirac, invece, questo corrisponde a normalizzare gli spinori secondo le (3.347) e (3.348), i.e. a porre

$$u^{(r)}(\vec{p}) = \frac{\not{p} + m}{\sqrt{m+E}}\,u_0^{(r)} \quad ; \quad v^{(r)}(\vec{p}) = \frac{m - \not{p}}{\sqrt{m+E}}\,v_0^{(r)}$$

per cui, per esempio, per la particella, risulta che (cfr.(3.555))

$$\psi_{\vec{p}}^{(s)}(\vec{x},t) = u^{(s)}(\vec{p})e^{-ipx}$$

e dunque la probabilità differenziale per unità di tempo $\frac{d}{dt}(dW_{ba})$ diviene

$$(2\pi)^4\ \delta^4(P_b - P_a)\ \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3\,(2E_i)} \right) \cdot \frac{V}{\prod_{j=1}^{k}(2E_j\, V)}\ |\mathcal{M}_{ba}|^2 \tag{4.93}$$

La quantità $(2\pi)^4\ \delta^4(P_b - P_a)$, che descrive semplicemente la conservazione del quadrimpulso nel processo, moltiplicata per la produttoria che la segue nella (4.93), i.e. la quantità

$$d\Phi \equiv (2\pi)^4\ \delta^4(P_b - P_a)\ \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3\,(2E_i)} \right) \tag{4.94}$$

viene chiamata[217] *elemento invariante dello spazio delle fasi* (o anche *dLips: differential Lorentz invariant phase space*) e ha a che fare con la cinematica dello stato finale del processo considerato, fissate le condizioni iniziali, imposte appunto attraverso la delta di conservazione.
La cinematica dello stato iniziale si trova, invece, nel termine $\mathcal{F}$, definito dalla relazione

$$\frac{1}{\mathcal{F}} \equiv \frac{V}{\prod_{j=1}^{k}(2E_j\, V)} \tag{4.95}$$

mentre la dinamica del processo resta tutta dentro il modulo quadro dell'elemento di matrice $|\mathcal{M}_{ba}|^2$, legato direttamente all'interazione.
In termini di queste quantità, risulta allora che

$$\frac{d}{dt}(dW_{ba}) = \frac{1}{\mathcal{F}}\ |\mathcal{M}_{ba}|^2\ d\Phi \tag{4.96}$$

A proposito poi dello stato iniziale, come già detto, distingueremo sostanzialmente due casi, ovvero quello in cui partiamo da una sola o da due particelle.
Nel caso in cui lo stato iniziale sia fatto da una sola particella, i.e. nel caso di un *decadimento*, la probabilità (differenziale) per unità di tempo è il *rate* (differenziale) del decadimento, il quale vale quindi, in generale

$$d\Gamma \equiv \frac{d}{dt}(dW_{ba}) = \frac{V}{2E\,V}\ |\mathcal{M}_{ba}|^2\ \cdot\ d\Phi\ = \frac{1}{2E}\ |\mathcal{M}_{ba}|^2\ \cdot\ d\Phi \tag{4.97}$$

Nel caso particolare, poi, in cui il decadimento avvenga nel sistema di riferimento dove la particella a (di massa M_a) che decade si trova a riposo (riferimento del

[217]L.B. Okun: *Leptons and quarks*, North-Holland 1982

CM), il *rate* differenziale assume evidentemente la forma seguente[218]

$$d\Gamma_{CM} = \frac{1}{2M_a}\,|\mathcal{M}_{ba}|^2\ \cdot\ d\Phi \tag{4.100}$$

Se invece lo stato iniziale è fatto da due particelle, ovvero si tratta di un processo di *scattering*, allora il processo stesso sarà caratterizzato da una sezione d'urto differenziale, definita come

$$\frac{d}{dt}\,(dW_{ba}) = d\sigma\ \cdot\ j \tag{4.101}$$

dove j è la densità di flusso incidente ($cm^{-2}\,sec^{-1}$).
Siccome, con la normalizzazione adottata, ci siamo riportati comunque al caso di una sola particella *proiettile* nel volume V, la quale urta contro una sola particella *bersaglio*, ecco che, nel riferimento in cui il bersaglio è fermo, il flusso incidente sarà pari alla densità di particelle proiettile per il modulo della velocità (relativa) proiettile-bersaglio, i.e.

$$j = v_{rel}\cdot(densita'\ della\ particella\ proiettile) = v_{rel}\ \times\ \frac{1}{V}$$

e dunque

$$d\sigma = \frac{d\left(\frac{dW_{ba}}{dt}\right)}{j} = \frac{V}{2M_1\,2E_2\,V^2}\ \frac{V}{v}\ |\mathcal{M}_{ba}|^2\ d\Phi = \frac{1}{2M_1\,2E_2\,v}\ |\mathcal{M}_{ba}|^2\ d\Phi \tag{4.102}$$

dove il termine $2M_1\,2E_2\,v$ è detto *termine di flusso*.
L'espressione ottenuta puo essere generalizzata ad ogni sistema di riferimento osservando che risulta[219]

$$M_1\,E_2\,v = \sqrt{(P_1\cdot P_2)^2 - M_1^2\,M_2^2} \tag{4.103}$$

[218]Si osservi che, poiché tanto $|\mathcal{M}_{ba}|^2$ che $d\Phi$ sono invarianti, integrando la (4.97) e la (4.100) se ne conclude che

$$\Gamma = \frac{M}{E}\,\Gamma_{CM} = \frac{1}{\gamma}\,\Gamma_{CM} \tag{4.98}$$

ovvero, essendo $\Gamma\,\tau = \hbar$, la relazione precedente afferma il fatto ben noto secondo cui la vita media di una particella, vista in un riferimento in cui essa è in moto, risulta γ volte maggiore di quella osservata nel riferimento di quiete della particella, i.e.

$$\tau = \gamma\ \ \tau_{CM} \tag{4.99}$$

[219]Valutiamo infatti, nel sistema di riferimento in cui M_1 è ferma, la quantità

$$\sqrt{(P_1 P_2)^2 - M_1^2 M_2^2}$$

Evidentemente, in questo riferimento, risulta

$$P_1 = (M_1, \vec{0}), \qquad\qquad P_2 = (E_2, \vec{p}_2)$$

ottenendo così la seguente espressione invariante a vista di $d\sigma$

$$d\sigma = \frac{1}{4\sqrt{(P_1 \cdot P_2)^2 - M_1^2\, M_2^2}}\; |\mathcal{M}_{ba}|^2\; d\Phi \tag{4.104}$$

Questo risultato è corretto per particelle senza spin.
Se le particelle che partecipano al processo hanno anche spin, allora, nel caso in cui lo stato iniziale *non* abbia spin definito e quello degli stati finali *non* sia osservato, risulta, rispettivamente

$$d\Gamma = \frac{1}{2S_a + 1} \cdot \frac{1}{2E_a} \cdot \overline{|\mathcal{M}_{ba}|^2}\; d\Phi \tag{4.105}$$

$$d\sigma = \frac{1}{(2S_1 + 1)(2S_2 + 1)} \cdot \frac{1}{4\sqrt{(P_1 \cdot P_2)^2 - M_1^2\, M_2^2}}\; \overline{|\mathcal{M}_{ba}|^2}\; d\Phi \tag{4.106}$$

dove S_a è lo spin della particella che decade, S_1, S_2 quello delle due particelle che collidono e $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ indica <u>*la somma*</u> dei quadrati delle ampiezze di transizione fatta su <u>*tutti*</u> gli stati di spin iniziali e finali.

I fattori $\frac{1}{2S+1}$ servono appunto a tener conto che, in effetti, sugli stati iniziali occorre mediare e non sommare, come invece si deve fare su quelli finali ...

---

dunque

$$(P_1 P_2)^2 - M_1^2 M_2^2 = (M_1 E_2)^2 - M_1^2 M_2^2 = M_1^2 (E_2^2 - M_2^2) = M_1^2\, |\vec{p}_2|^2$$

ovvero

$$\sqrt{(P_1 P_2)^2 - M_1^2 M_2^2} = M_1\, p_2$$

D'altronde, in generale, sappiamo che

$$p/E = \beta \equiv v$$

e quindi risulta provato quanto asserito, i.e. che nel riferimento in cui la prima particella è in quiete, si ha

$$\sqrt{(P_1 P_2)^2 - M_1^2 M_2^2} = M_1\, E_2\, v$$

4.4 Lo spazio delle fasi

4.4.1 Lo spazio delle fasi di due particelle

Nel caso di due particelle diverse nello stato finale, l'elemento di spazio delle fasi invariante, secondo la definizione (4.94), è

$$d\Phi = dLips(p,q;P) = (2\pi)^4\delta^4(p+q-P)\frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p}\frac{d^3q}{(2\pi)^3 2E_q} \tag{4.107}$$

dove p, q sono i loro quadrimpulsi, mentre P è quello di tutto il sistema e abbiamo posto

$$E_p \equiv \sqrt{M_1^2+|\vec{p}|^2}, \qquad E_q = \sqrt{M_2^2+|\vec{q}|^2} \tag{4.108}$$

L'elemento di spazio delle fasi (4.107) può, dunque, essere riscritto anche come

$$d\Phi = dLips = \frac{1}{16\pi^2}\delta(E_p+E_q-\mathcal{E})\delta^3(\vec{p}+\vec{q}-\vec{P})\frac{d^3p}{E_p}\frac{d^3q}{E_q} \tag{4.109}$$

dove $\mathcal{E} \equiv P^0$ è l'energia totale del sistema (valutata nel particolare sistema di riferimento dove stiamo studiando il processo) mentre $\vec{P}$ è il suo impulso totale.

Procediamo adesso a integrare[220] la delta di conservazione. Supponiamo, come di solito accade, di essere interessati a una particella particolare, per esempio a quella di quadrimpulso p, prescindendo dall'altra particella.
Integrando quindi in d^3q, otteniamo

$$d\Phi = \frac{1}{16\pi^2}\delta(E_p+\hat{E}-\mathcal{E})\frac{d^3p}{E_p\,\hat{E}} \tag{4.110}$$

dove abbiamo indicato con $\hat{E} \equiv E_q = \sqrt{M_2^2+|\vec{P}-\vec{p}|^2}$ l'energia della particella che non guardiamo, avente massa M_2 e momento lineare

$$\vec{q} = \vec{P} - \vec{p}$$

Passando in coordinate polari, risulta

$$d^3p = p^2\,dp\,d\Omega$$

e quindi, più esplicitamente

$$d\Phi = \frac{1}{16\pi^2}\delta\left(E_p+\hat{E}(\vec{p})-\mathcal{E}\right)\,\frac{p^2\,dp\,d\Omega}{E_p\,\hat{E}(\vec{p})} \tag{4.111}$$

[220] Ricordiamo che $d\Phi$ entra in $d\Gamma$ o in $d\sigma$ insieme a $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ il quale dipenderà anch'esso, tramite invarianti visto che è invariante, dalle variabili $\vec{p}$ e $\vec{q}$. L'integrazione della δ di conservazione implica, naturalmente, la sostituzione anche in $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ dei valori di queste variabili così come vengono fissati dall'integrazione della δ stessa.

D'altronde

$$E_p^2 = M_1^2 + p^2 \qquad \Rightarrow \qquad E_p\,dE_p = p\,dp$$

per cui si ha

$$d^3p = p\,E_p\,dE_p\,d\Omega$$

e dunque, finalmente

$$\begin{aligned} dLips &= \frac{1}{16\pi^2}\delta(E_p + \hat{E} - \mathcal{E})\frac{p\,E_p\,dE_p\,d\Omega}{E_p\hat{E}} \\ &= \frac{1}{16\pi^2}\delta(E_p + \hat{E} - \mathcal{E})\,p\,\frac{dE_p}{\hat{E}}d\Omega \end{aligned} \tag{4.112}$$

Questo risultato è corretto qualunque sia il sistema di riferimento in cui si opera. Esso può essere ulteriormente semplificato se studiamo il processo di scattering nel sistema del CM, dove $\vec{p} + \vec{q} = \vec{P} \equiv \vec{0}$.

Indichiamo con b il modulo del momento lineare delle due particelle uscenti nel sistema del CM e consideriamolo come una variabile libera. Poiché

$$E_p^2 = M_1^2 + b^2 \qquad E_q^2 = M_2^2 + b^2$$

abbiamo, evidentemente, che

$$b\,db = E_p\,dE_p = E_q\,dE_q$$

Introduciamo allora la variabile $w = E_p + E_q$. Otteniamo

$$\begin{aligned} dw &= dE_p + dE_q = \frac{b\,db}{E_p} + \frac{b\,db}{E_q} = \frac{E_p + E_q}{E_pE_q}\,b\,db \\ &= \frac{w}{E_pE_q}b\,db = \frac{w}{E_q}dE_p = \frac{w}{E_p}dE_q \end{aligned}$$

i.e.

$$\frac{dw}{w} = \frac{dE_q}{E_p} = \frac{dE_p}{E_q}$$

Sostituendo allora nella espressione (4.112), otteniamo $(E_q = \hat{E}; w = E_p + \hat{E})$

$$dLips = \frac{1}{16\pi^2}\delta(w - \mathcal{E}_{CM})\,b\frac{dw}{w}\,d\Omega_{CM} \tag{4.113}$$

che può essere facilmente integrata e fornisce

$$dLips = \frac{1}{16\pi^2}\frac{b}{\mathcal{E}_{CM}}\,d\Omega_{CM} \tag{4.114}$$

dove b, adesso, sta per il particolare valore del modulo dell'impulso delle due particelle uscenti nel CM, che corrisponde all'energia totale $\mathcal{E}_{CM}$. Ma, per definizione, l'energia totale del sistema nel centro di massa è niente altro che

$$\mathcal{E}_{CM} = \sqrt{s} \tag{4.115}$$

e, per quanto riguarda il modulo[221] dell'impulso b corrispondente, risulta

$$b = \frac{\sqrt{(s - M_1^2 - M_2^2)^2 - 4M_1^2 M_2^2}}{2\sqrt{s}} \tag{4.116}$$

Perciò, dalle (4.114), (4.115) e (4.116) otteniamo finalmente l'espressione seguente, scritta in termini di invarianti di Lorentz[222,223]

$$dLips = \frac{1}{16\pi^2} \frac{\sqrt{(s - M_1^2 - M_2^2)^2 - 4M_1^2 M_2^2}}{2s}\, d\Omega_{CM} \tag{4.117}$$

Nel caso si voglia determinare l'espressione dello spazio delle fasi nel sistema del Laboratorio invece che nel sistema del centro di massa, si può ripartire dall'espressione (4.111)

$$d\Phi \equiv dLips = \frac{1}{16\pi^2} \delta\left(E_p + \hat{E}(\vec{p}) - \mathcal{E}\right) \frac{p^2\, dp\, d\Omega}{E_p\, \hat{E}(\vec{p})} \tag{4.118}$$

---

[221]Ricordiamo infatti che

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}_{CM} \equiv \sqrt{M_1^2 + b^2} + \sqrt{M_2^2 + b^2} \qquad \Rightarrow\\
&\mathcal{E}_{CM}^2 = M_1^2 + b^2 + M_2^2 + b^2 + 2\sqrt{M_1^2 + b^2}\sqrt{M_2^2 + b^2} \qquad \Rightarrow\\
&2\sqrt{M_1^2 + b^2}\sqrt{M_2^2 + b^2} = s - M_1^2 - M_2^2 - 2b^2 \qquad \Rightarrow\\
&4(M_1^2 + b^2)(M_2^2 + b^2) = (s - M_1^2 - M_2^2 - 2b^2)^2 \qquad \Rightarrow\\
&4M_1^2M_2^2 + 4M_1^2b^2 + 4M_2^2b^2 + 4b^4 = (s - M_1^2 - M_2^2)^2 + 4b^4 - 4b^2(s - M_1^2 - M_2^2)\\
&\Rightarrow 4b^2 s = (s - M_1^2 - M_2^2)^2 - 4M_1^2M_2^2 \Rightarrow b = \frac{\sqrt{(s - M_1^2 - M_2^2)^2 - 4M_1^2 M_2^2}}{2\sqrt{s}}
\end{aligned}$$

[222]E' forse utile, a questo punto, ricordare che, per la (4.116), b esiste se e solo se

$$\begin{aligned}
&(s - M_1^2 - M_2^2)^2 - 4M_1^2M_2^2 \geq 0\\
&\Rightarrow\ (s - M_1^2 - M_2^2)^2 \geq 4M_1^2M_2^2\\
&\Rightarrow\ s - M_1^2 - M_2^2 \geq 2M_1M_2\\
&\Rightarrow\ s \geq (M_1 + M_2)^2 \quad \Rightarrow \quad M_1 + M_2 \leq \sqrt{s}
\end{aligned}$$

ovvero se e solo se siamo sopra soglia di produzione ...

[223]Nel caso del decadimento a riposo di una particella di massa M senza spin, non essendoci una direzione privilegiata, $|\mathcal{M}|^2$ non può dipendere da variabili angolari nel sistema del CM e dunque il decadimento sarà isotropo.

dove abbiamo voluto mettere chiaramente in evidenza il fatto che non solo E_p, ma anche $\hat{E}$ dipende da $\vec{p}$, essendo, come si è visto

$$\hat{E} \equiv \hat{E}(\vec{p}) = \sqrt{M_2^2 + |\vec{P} - \vec{p}|^2}$$

Per poter aver l'espressione della dipendenza angolare della distribuzione, occorre prima integrare in dp, eliminando così la delta.
Ma l'argomento della δ di Dirac è una funzione di $\vec{p}$, che vale

$$F(\vec{p}) = \sqrt{M_1^2 + p^2} + \sqrt{M_2^2 + |\vec{P} - \vec{p}|^2} - \mathcal{E} \tag{4.119}$$

D'altronde la condizione $F(\vec{p}) = 0$ altri non è che la formalizzazione della conservazione dell'energia nel processo, mentre $\hat{E}_q = \sqrt{M_2^2 + |\vec{P} - \vec{p}|^2}$ contiene la conservazione dell'impulso lineare (integrazione in d^3q...), quindi la soluzione

$$\hat{p} = \hat{p}\,(\theta)$$

dell'equazione $F(\vec{p}) = 0$ è niente altro che la soluzione[224] che esprime l'impulso

[224]L'equazione $F(\vec{p}) = 0$, come si è detto, esprime la conservazione dell'energia nel sistema di riferimento del Laboratorio e contiene implicitamente quella dell'impulso.

In questo riferimento, infatti, il sistema delle due particelle ha, per ipotesi, energia totale $\mathcal{E}$ e impulso spaziale $\vec{P}$ che, senza perdita di generalità, potremo assumere sia diretto come l'asse z. Il quadrimpulso del sistema è dunque dato da

$$(P^\mu_{Lab}) = (\mathcal{E}, \vec{P}) = (\mathcal{E}, 0, 0, P) \;\; \Rightarrow \;\; s = \mathcal{E}^2 + P^2 \tag{4.120}$$

Questo significa che la velocità $\vec{\beta}$ del sistema del CM visto dal Laboratorio è diretta lungo l'asse z e vale, in modulo

$$\beta = \frac{P}{\mathcal{E}} \;\; \Leftrightarrow \;\; \gamma = \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{\mathcal{E}^2 - P^2}} = \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{s}} \tag{4.121}$$

D'altronde, visto che la massa invariante del sistema delle due particelle è appunto $\sqrt{s}$ mentre le loro masse sono, rispettivamente, $M_1 \equiv m$ e $M_2 \equiv M$, ecco che, nel sistema del CM, il modulo dell'impulso spaziale di entrambe le particelle vale, come è noto

$$b = \frac{\sqrt{(s - m^2 - M^2)^2 - 4m^2M^2}}{2\sqrt{s}} \tag{4.122}$$

Dunque, nel sistema del CM, l'impulso spaziale della particella $M_1 \equiv m$ sarà dato, in generale, senza perdita di generalità, dalla relazione

$$\vec{p} = b\,(sin\Theta, 0, cos\Theta) \tag{4.123}$$

dove Θ è proprio l'angolo di scattering nel sistema del CM.
Trasformando dunque all'indietro, avremo che, nel sistema del Laboratorio, sarà

$$\begin{aligned} \hat{p}_x &= b\,sin\Theta; & (4.124)\\ \hat{p}_y &= 0; & (4.125)\\ \hat{p}_z &= \gamma\,b\,cos\Theta + \gamma\beta\sqrt{m^2 + b^2} & (4.126) \end{aligned}$$

della particella uscente a cui siamo interessati, in funzione dell'angolo θ di scattering, date le condizioni iniziali del processo, definite da $\mathcal{E}$ e da $\vec{P}$.

---

dove $\sqrt{m^2+b^2}$ è l'energia della particella considerata nel sistema del CM, tale che

$$\begin{aligned} m^2+b^2 &= m^2+\frac{(s-m^2-M^2)^2-4m^2M^2}{4s} = \frac{(s-m^2-M^2)^2-4m^2M^2+4m^2s}{4s} = \\ &= \frac{(s-m^2+M^2)^2}{4s} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{m^2+b^2} = \frac{s+m^2-M^2}{2\sqrt{s}} \end{aligned} \tag{4.127}$$

Dunque, in termini dell'angolo di scattering Θ, abbiamo

$$\hat{p}_x = b\,sin\Theta \tag{4.128}$$

$$\hat{p}_z = \gamma\,b\,cos\Theta + \frac{p}{\sqrt{s}}\frac{s+m^2-M^2}{2\sqrt{s}} = \gamma\,b\,cos\Theta + \frac{p}{2s}\,(s+m^2-M^2) \tag{4.129}$$

Ritroviamo così il fatto ben noto che l'impulso della particella nel sistema del Laboratorio sta su un'ellisse [J. Blaton: *On a geometrical interpretation of energy and momentum conservation in atomic collisions and disintegration processes*; Mat.-Fys Medd. vol 24, nr 20, 1 (1950)] avente semiasse minore pari a b, semiasse maggiore pari a $\gamma\,b$ e centro spostato lungo l'asse z di $\frac{p}{2s}(s+m^2-M^2)$.
Questo significa, come sappiamo, che se

$$\gamma\,b > \frac{p}{2s}(s+m^2-M^2) \tag{4.130}$$

allora l'ellisse contiene l'origine e a ogni angolo di scattering Θ nel sistema del CM $(0 \le \Theta \le \pi)$ corrisponde uno e un solo angolo di scattering θ nel sistema del Laboratorio $(0 \le \theta \le \pi)$.
Invece, nel caso in cui sia

$$\gamma\,b < \frac{p}{2s}(s+m^2-M^2) \tag{4.131}$$

allora l'ellisse non contiene l'origine e dunque non tutti gli angoli θ sono possibili nel sistema del Laboratorio, ma solo quelli che non eccedono un opportuno θ_{max}; inoltre, a ogni angolo $0 \le \theta \le \theta_{max}$ corrispondono, in generale, due valori di Θ e dunque per ogni angolo di scattering nel sistema del Laboratorio sono possibili due valori di $\hat{p}$.
L'angolo θ_{max} sta nel primo quadrante: esso si può determinare in base a semplici considerazioni geometriche. Infatti, data in generale l'ellisse di equazione

$$y = b\,sin\phi\,; \quad z = a + b\,cos\phi \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{z-a}{\gamma b}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \tag{4.132}$$

allora la tangente dell'angolo θ_{max} è la pendenza k della retta $y = kz$ che intercetta l'ellisse in due punti coincidenti. Sostituendo nell'equazione dell'ellisse, si ha

$$(z-a)^2 + k^2\gamma^2 z^2 = \gamma^2 b^2 \quad \Leftrightarrow \quad z^2(1+k^2\gamma^2) - 2za + a^2 - \gamma^2 b^2 = 0 \tag{4.133}$$

La condizione di due soluzioni coincidenti è, ovviamente, quella di discriminante nullo, i.e.

$$\begin{aligned} \frac{\Delta}{4} &= 0 = a^2 - (1+k^2\gamma^2)(a^2-\gamma^2b^2) \;\Leftrightarrow a^2 - a^2 + \gamma^2 b^2 - k^2\gamma^2(a^2-\gamma^2b^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad k^2 = \frac{b^2}{a^2-\gamma^2b^2} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{b}{\sqrt{a^2-\gamma^2b^2}} \end{aligned} \tag{4.134}$$

Dunque, nel nostro caso $\left(a = \frac{P}{2s}(s + m^2 - M^2)\right)$ è

$$tg\theta_{max} = \frac{b}{\sqrt{[\frac{P}{2s}(s + m^2 - M^2)]^2 - \gamma^2 b^2}} \tag{4.135}$$

D'altronde

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{P}{2s}(s + m^2 - M^2)\right]^2 - \gamma^2 b^2 = \frac{P^2}{4s^2}(s + m^2 - M^2)^2 - \frac{\mathcal{E}^2}{s}\,\frac{(s - m^2 - M^2)^2 - 4m^2M^2}{4s} = \\
&= \frac{P^2(s + m^2 - M^2)^2 - (s + P^2)\left[(s - m^2 - M^2)^2 - 4m^2M^2\right]}{4s^2} = \\
&= \frac{P^2\left[s^2 + m^4 + M^4 + 2sm^2 - 2sM^2 - 2m^2M^2 - (s^2 - 2sm^2 - 2sM^2 + m^4 + M^4 + 2m^2M^2 - 4m^2M^2)\right]}{4s^2} \\
&- \frac{s\left[(s - m^2 - M^2)^2 - 4m^2M^2\right]}{4s^2} = \frac{P^2\,4sm^2}{4s^2} - \frac{\left[(s - m^2 - M^2)^2 - 4m^2M^2\right]}{4s} = \\
&= \frac{4m^2P^2 - (s - m^2 - M^2)^2 + 4m^2M^2}{4s} = \frac{4m^2(M^2 + P^2) - (s - m^2 - M^2)^2}{4s}
\end{aligned} \tag{4.136}$$

dunque, ricordando la definizione di b, abbiamo infine

$$tg\theta_{max} = \frac{\sqrt{(s - m^2 - M^2)^2 - 4m^2M^2}}{\sqrt{4m^2(M^2 + P^2) - (s - m^2 - M^2)^2}} \tag{4.137}$$

Torniamo ora alla condizione che discrimina il caso in cui c'è corrispondenza uno a uno fra Θ e θ e quello in cui questo non accade. Riscriviamo, per questo, la condizione in questione: abbiamo visto che c'è corrispondenza uno a uno se e solo se

$$\gamma\, b > \frac{P}{2s}\,(s + m^2 - M^2) \tag{4.138}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{s}}\,\frac{\sqrt{(s - m^2 - M^2)^2 - 4m^2M^2}}{2\sqrt{s}} > \frac{P}{2s}\,(s + m^2 - M^2)$$

$$\Rightarrow \frac{P}{\mathcal{E}} < \frac{\sqrt{(s - m^2 - M^2)^2 - 4m^2M^2}}{s + m^2 - M^2} \equiv \frac{b}{\sqrt{b^2 + m^2}} \tag{4.139}$$

E questo risultato mostra che, come era ovvio che dovesse essere, affinché la condizione (4.138) sia soddisfatta occorre e basta che la velocità β_{CM} del sistema del CM $\left(\beta_{CM} \equiv \frac{P}{\mathcal{E}}\right)$ sia inferiore al modulo della velocità della particella considerata (di massa $M_1 = m$ nel sistema del CM $\left(\beta_1^{CM} = \frac{b}{\sqrt{b^2+m^2}}\right)$.

Ma riveniamo adesso alla questione da cui eravamo partiti, cioè a quella di esplicitare la funzione $\hat{p} = \hat{p}\,(cos\theta)$.

L'espressione trovata in funzione dell'angolo di scattering Θ nel sistema del CM non è la più adatta per questo scopo: ci è servita solo per capire se e quando ci dobbiamo aspettare limitazioni dalla cinematica del processo sul valore stesso dell'angolo di scattering θ nel sistema del Laboratorio.

Ripartiamo dunque dall'equazione $F(\vec{p}) = 0$, dove la funzione F è data dalla (4.119), i.e.

$$F(\vec{p}) = \sqrt{M_1^2 + p^2} + \sqrt{M_2^2 + |\vec{P} - \vec{p}|^2} - \mathcal{E} = 0 \tag{4.140}$$

la quale fornisce, evidentemente, la relazione

$$\mathcal{E} = \sqrt{M_1^2 + p^2} + \sqrt{M_2^2 + |\vec{P} - \vec{p}|^2} \tag{4.141}$$

dalla quale si ricava che

$$\sqrt{M^2 + |\vec{P} - \vec{p}|^2} = \mathcal{E} - \sqrt{m^2 + p^2} \tag{4.142}$$

ovvero, elevando al quadrato

$$M^2 + P^2 - 2Pp\,cos\theta + p^2 = \mathcal{E}^2 + m^2 + p^2 - 2\mathcal{E}\sqrt{m^2 + p^2} \tag{4.143}$$

dove θ è proprio l'angolo di scattering nel sistema del Laboratorio, i.e. l'angolo fra l'impulso complessivo del sistema $\vec{P}$ e l'impulso $\vec{p}$ della particella in esame, dopo il processo d'urto. Semplificando, ricordando che $s \equiv \mathcal{E}^2 - P^2$ otteniamo

$$2\mathcal{E}\sqrt{m^2 + p^2} = s + 2Pp\,cos\theta - M^2 + m^2 \tag{4.144}$$

da cui, quadrando ancora, si ricava

$$\begin{aligned} &4\mathcal{E}^2(m^2 + p^2) = (s + m^2 - M^2)^2 + 4pP\,cos\theta(s + m^2 - M^2) + 4p^2P^2cos^2\theta \\ &\quad \Rightarrow\ 4p^2(\mathcal{E}^2 - P^2cos^2\theta) - 4pP(s^2 + m^2 - M^2)cos\theta + 4m^2\mathcal{E}^2 - (s + m^2 - M^2)^2 = 0 \end{aligned} \tag{4.145}$$

D'altronde $\mathcal{E}^2 - P^2cos^2\theta = \mathcal{E}^2 - P^2 + P^2sin^2\theta = s + P^2sin^2\theta$ quindi l'equazione a cui arriviamo infine è la seguente

$$4p^2(s + P^2sin^2\theta) - 4pP(s + m^2 - M^2)cos\theta + 4m^2\mathcal{E}^2 - (s + m^2 - M^2)^2 = 0 \tag{4.146}$$

la quale è un'equazione di secondo grado nell'impulso incognito p della particella di massa m, parametrica in θ (tutte le altre quantità sono fissate dalle condizioni iniziali).
Il discriminante ridotto dell'equazione vale

$$\begin{aligned} \frac{\Delta}{4} &= 4P^2(s + m^2 - M^2)^2cos^2\theta - 4(s + P^2sin^2\theta)\left[4m^2\mathcal{E}^2 - (s + m^2 - M^2)^2\right] = \\ &= (s + m^2 - M^2)^2\left[4P^2cos^2\theta + 4(s + P^2sin^2\theta)\right] - 4(s + P^2sin^2\theta)\,4m^2\mathcal{E}^2 = \\ &= (s + m^2 - M^2)^2(4s + 4P^2) - 4m^2 4\mathcal{E}^2(s + P^2sin^2\theta) = \\ &= 4\mathcal{E}^2(s + m^2 - M^2)^2 - 4\mathcal{E}^2\,4m^2(s + P^2sin^2\theta) = \\ &= 4\mathcal{E}^2\left[(s + m^2 - M^2)^2 - 4m^2(s + P^2sin^2\theta)\right] \end{aligned} \tag{4.147}$$

Evidentemente questo è sempre positivo, qualunque sia l'angolo θ, se e solo se

$$(s + m^2 - M^2)^2 > 4m^2(s + P^2) \equiv 4m^2\mathcal{E}^2 \tag{4.148}$$

ovvero se e solo se

$$\begin{aligned} &(s + m^2 - M^2) > 2m\,\mathcal{E} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{m^2 + b^2}\cdot 2\sqrt{s} > 2m\,\mathcal{E} \\ &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{m^2 + b^2}}{m} > \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{s}} \quad \Leftrightarrow \quad \gamma_1^{(CM)} > \gamma_{CM} \end{aligned} \tag{4.149}$$

in accordo con quanto avevamo già ottenuto con la relazione (4.139) ($\gamma_1^{(CM)}$ è il γ delle particelle di massa $m = M_1$ nel sistema del CM, mentre γ_{CM} è il γ del sistema del CM visto dal sistema del Laboratorio).

Supponendo adesso che valga la condizione

$$\gamma_1^{(CM)} > \gamma_{CM} \quad \Leftrightarrow \quad \beta_1^{(CM)} > \beta_{CM} \tag{4.150}$$

poiché il termine noto dell'equazione di secondo grado è evidentemente negativo, essendo il coefficiente di p^2 positivo, l'equazione ha due radici di segno opposto. Siccome la soluzione che cerchiamo deve essere positiva, essendo il modulo di un vettore, essa sarà la maggiore delle due, ovvero coinciderà necessariamente con

$$\begin{aligned}\hat{p}(\theta) \quad &\equiv \quad p_+ = \frac{2P(s+m^2-M^2) + \sqrt{\Delta/4}}{4(s+P^2sin^2\theta)} = \\ &= \quad \frac{2P(s+m^2-M^2) + 2\mathcal{E}\sqrt{(s+m^2-M^2)^2 - 4m^2(s+P^2sin^2\theta)}}{4(s+P^2sin^2\theta)} = \\ &= \quad \frac{P(s+m^2-M^2) + \mathcal{E}\sqrt{(s+m^2-M^2)^2 - 4m^2M^2 - 4m^2P^2sin^2\theta}}{2(s+P^2sin^2\theta)}\end{aligned} \tag{4.151}$$

Nel caso che sia $\gamma_1^{(CM)} < \gamma_{CM} \Leftrightarrow \beta_1^{(CM)} < \beta_{CM}$ allora, come già sappiamo, non tutti gli angoli di scattering θ nel sistema Laboratorio sono possibili, ma solo quelli per i quali $\Delta/4 \geq 0$, i.e.

$$\begin{aligned}&(s+m^2-M^2)^2 > 4m^2(s+P^2sin^2\theta) \quad \Leftrightarrow \quad (s+m^2-M^2)^2 - 4m^2s > 4m^2P^2\,sin^2\theta \\ &\quad \Leftrightarrow \quad (s-m^2-M^2)^2 - 4m^2M^2 > 4m^2P^2\,sin^2\theta \\ &\quad \Leftrightarrow \quad sin^2\theta \leq sin^2\theta_{max} \equiv \frac{(s-m^2-M^2)^2 - 4m^2M^2}{4m^2P^2}\end{aligned} \tag{4.152}$$

da cui, appunto,

$$cos^2\theta_{max} = 1 - sin^2\theta_{max} = \frac{4m^2P^2 + 4m^2M^2 - (s-m^2-M^2)^2}{4m^2P^2} \tag{4.153}$$

e dunque, come avevamo già trovato,

$$tg\theta_{max} = \sqrt{\frac{(s-m^2-M^2)^2 - 4m^2M^2}{4m^2P^2 + 4m^2M^2 - (s-m^2-M^2)^2}} \tag{4.154}$$

essendo θ_{max} nel primo quadrante.

Nel caso, comunque, in cui $0 \leq \theta \leq \theta_{max}$, cioè quando l'equazione di secondo grado in p ha soluzioni reali, allora, visto che il termine noto dell'equazione è positivo come il coefficiente di p^2, entrambe le soluzioni devono essere dello stesso segno.
Siccome p_+ è positivo poiché $P(s+m^2-M^2) > 0$, allora anche p_- è positiva e dunque entrambe le soluzioni sono accettabili. Risultano così due diversi valori di $\hat{p}$ per uno stesso valore di θ ed essi sono tali che

$$\hat{p}_\pm(\theta) = \frac{P(s+m^2-M^2) \pm \mathcal{E}\sqrt{(s+m^2-M^2)^2 - 4m^2M^2 - 4m^2P^2\,sin^2\theta}}{2(s+P^2sin^2\theta)} \tag{4.155}$$

Quanto poi alla delta, sappiamo che, in generale, avremo (assumiamo per semplicità una sola soluzione $\hat{p} = \hat{p}(\theta)$)

$$\delta(F(\vec{p})) = \delta(p - \hat{p}) \; \frac{1}{\left.\frac{dF}{dp}\right|_{p=\hat{p}}}$$

Ma, data la (4.119), risulta

$$\left.\frac{dF}{dp}\right|_{p=\hat{p}} = \frac{\hat{p}}{E_{\hat{p}}} + \frac{\hat{p} - P cos\theta}{\hat{E}_{\hat{p}}} = \frac{\hat{E}_{\hat{p}}\, \hat{p} + E_{\hat{p}}\, \hat{p} - E_{\hat{p}}\, P\, cos\theta}{E_{\hat{p}}\, \hat{E}_{\hat{p}}}$$

e quindi, sostituendo nella (4.118), si ha

$$\begin{aligned}
d\Phi &= \frac{1}{16\pi^2}\delta(E_p + \hat{E}(\vec{p}) - \mathcal{E})\frac{p^2\, dp\, d\Omega}{E_p\, \hat{E}(\vec{p})} = \\
&= \frac{1}{16\pi^2}\delta(p - \hat{p})\, \frac{E_{\hat{p}}\, \hat{E}_{\hat{p}}}{\hat{E}_{\hat{p}}\, \hat{p} + E_{\hat{p}}\, \hat{p} - E_{\hat{p}}\, P\, cos\theta}\frac{p^2\, dp\, d\Omega}{E_p\, \hat{E}(\vec{p})} = \\
&= \frac{1}{16\pi^2}\frac{E_{\hat{p}}\, \hat{E}_{\hat{p}}}{\hat{E}_{\hat{p}}\, \hat{p} + E_{\hat{p}}\, \hat{p} - E_{\hat{p}}\, P\, cos\theta}\frac{\hat{p}^2\;\, d\Omega}{E_{\hat{p}}\, \hat{E}_{\hat{p}}} = \\
&= \frac{1}{8\pi}\frac{\hat{p}^2\;\, d\,(-\cos\theta)}{\hat{E}_{\hat{p}}\, \hat{p} + E_{\hat{p}}\, \hat{p} - E_{\hat{p}}\, P\, cos\theta} = \frac{1}{8\pi}\frac{\hat{p}\;\, d\,(-cos\theta)}{\hat{E}_{\hat{p}}\; + E_{\hat{p}}\; - E_{\hat{p}}\, \frac{P}{\hat{p}}\, cos\theta}
\end{aligned} \tag{4.156}$$

Chiaramente, però

$$\hat{E}_{\hat{p}}\; + E_{\hat{p}} = \mathcal{E}$$

per cui, finalmente, si può scrivere che, per un sistema di due particelle aventi quadrimpulso totale $(\mathcal{E}, \vec{P})$, l'elemento invariante di spazio delle fasi nel sistema del Laboratorio (integrato nell'angolo azimutale), relativo a una qualunque delle due particelle, è espresso dalla relazione[225]

$$d\Phi = \frac{1}{8\pi}\frac{\hat{p}\;\, d\,(-cos\theta)}{\mathcal{E} - E_{\hat{p}}\, \frac{P}{\hat{p}}\, cos\theta} \tag{4.157}$$

dove $(E_{\hat{p}}, \hat{p})$ è il suo quadrimpulso dopo il processo d'urto, mentre θ è l'angolo polare (di scattering), entrambi misurati nel laboratorio.

[225] J.D. Bjorkeen and S.D. Drell: *Relativistic Quantum Fields*, Ch.16 McGraw Hill, 1965

4.4.2 *Lo spazio delle fasi di tre particelle: il plot di Dalitz*

Consideriamo per concretezza un processo di decadimento[226] a tre corpi

$$X \to A + B + C$$

dove X abbia massa M, mentre A, B, C abbiano, rispettivamente, masse m_A, m_B ed m_C, con, ovviamente

$$M \geq m_A + m_B + m_C$$

Abbiamo visto dalla (4.105) che, mediando sullo spin iniziale e sommando su quelli finali, quanto al rate di decadimento, risulta

$$d\Gamma = \frac{1}{2J+1}\,\frac{1}{2E}\,\overline{|\mathcal{M}|^2}\;d\Phi \tag{4.158}$$

dove J è lo spin della particella X, E è la sua energia nel sistema di riferimento scelto, $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ è la somma di tutti i moduli quadri degli elementi di matrice presi fra i vari stati di spin iniziali e finali.

L'elemento di spazio delle fasi per tre particelle nello stato finale, data la (4.94), si scrive, evidentemente, come

$$d\Phi = (2\pi)^4\,\delta^4(p+q+k-P)\,\frac{d^3p}{(2\pi)^3\,2E_p}\,\frac{d^3q}{(2\pi)^3\,2E_q}\,\frac{d^3k}{(2\pi)^3\,2E_k} \tag{4.159}$$

dove p, q, k sono, rispettivamente, i quadrimpulsi delle particelle A, B, C mentre P è quello della particella X. Assumiamo ora che la particella C non sia osservata. Come si vede, l'elemento $d\Phi$ e quindi $d\Gamma$ (attraverso $d\Phi$ e $\overline{|\mathcal{M}|^2}$) dipendono formalmente da 9 parametri reali, i.e. $\vec{p}$, $\vec{q}$ e $\vec{k}$. L'integrazione della δ^4 ne elimina 4, per cui si resta così con 5 variabili effettive[227].
Cerchiamo adesso di capire meglio la natura cinematica di queste variabili restanti e di determinare quali sono quelle su cui si può integrare ulteriormente, certi che $d\Gamma$ non potrà comunque essere da loro dipendente (attraverso $\overline{|\mathcal{M}|^2}$).
Per far questo, mettiamoci nel sistema del CM, ovvero nel sistema di riferimento in cui X è in quiete. In questo riferimento $\vec{p}$, $\vec{q}$ e $\vec{k}$ sono coplanari, visto che la loro somma deve dare il vettore nullo. Inoltre, data una qualunque loro configurazione compatibile con la cinematica, questa configurazione potrà essere ruotata a piacimento senza che $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ possa risentirne, almeno se lo stato iniziale non è polarizzato. In questa ipotesi, possiamo quindi pensare, per ciascuna configurazione cinematica delle tre particelle fissata, di ruotarla in modo da allineare

[226] Nel caso di un processo di scattering con tre corpi nello stato finale, le considerazioni sullo spazio delle fasi sono del tutto analoghe, solo che, invece di *rate di decadimento* $d\Gamma$ parleremo di *sezione d'urto differenziale* $d\sigma$ e al posto del fattore $\frac{1}{2S+1}\cdot\frac{1}{2E}$ ci sarà, come abbiamo visto, il termine di flusso, ovvero il fattore $\frac{1}{(2S_1+1)(2S_2+1)}\cdot\frac{1}{4\sqrt{(P_1\cdot P_2)^2-M_1^2M_2^2}}$

[227] Nel caso di due particelle, queste variabili effettive, per gli stessi motivi, saranno $6-4=2$, come, per esempio, le due variabili angolari nel CM.

per esempio $\vec{p}$ con l'asse z e questo corrisponderà a integrare lo spazio delle fasi nei due angoli di Eulero che definiscono la direzione di $\vec{p}$. Fatto questo, potremo ancora allineare il piano definito dai tre vettori $\vec{p}$, $\vec{q}$ e $\vec{k}$ in modo che coincida, per esempio, con il piano xz, mediante una rotazione azimutale intorno all'asse z, la cui direzione coincide con quella di $\vec{p}$. In conclusione, dei 5 parametri liberi da cui dipende $d\Phi$, 3 sono angoli che *fissano* nel sistema del CM la posizione della terna $\vec{p}, \vec{q}, \vec{k}$, ma da cui $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ (avendo assunto che la particella che decade non sia polarizzata) non può dipendere ...
Integrando su queste tre variabili angolari, arriveremo a un elemento dello spazio delle fasi del sistema che, come pure $\overline{|\mathcal{M}|^2}$, potrà dipendere solo dai <u>due</u> parametri cinematici restanti, associati al processo studiato.

Vediamo qual è la forma che $d\Phi$ finisce dunque per assumere.
Essendo $d\Phi$ un invariante di Lorentz, operiamo senza perdita di generalità, nel sistema del CM, dove appunto $\vec{P} = 0$. Ripartiamo dalla (4.159) e supponiamo di non osservare la particella C e dunque di integrare in d^3k. Si ha

$$d\Phi = \frac{(2\pi^4)}{(2\pi)^9} \frac{1}{2E_p} \frac{1}{2E_q} \frac{1}{2\hat{E}} \; \delta(E_p + E_q + \hat{E} - M) \, d^3p \;\, d^3q \tag{4.160}$$

dove, per tener conto che $\vec{p} + \vec{q} + \vec{k} = 0$, abbiamo definito

$$\hat{E} \equiv \sqrt{m_C^2 + |\vec{p} + \vec{q}|^2} \tag{4.161}$$

Passando in coordinate polari per quanto riguarda $\vec{p}$, abbiamo

$$d\Phi = \frac{1}{(2\pi)^5} \frac{1}{2E_p \, 2E_q \, 2\hat{E}} \; \delta(E_p + E_q + \hat{E} - M) \, p^2 \; dp \; d\Omega_p \;\, d^3q \tag{4.162}$$

Possiamo integrare su $d\Omega_p$, e questo corrisponde a integrare sulle direzioni di $\vec{p}$ nello spazio, originate dalla arbitrarietà di scelta dell'orientamento del sistema di riferimento del CM: otteniamo

$$d\Phi = \frac{4\pi}{(2\pi)^5} \frac{1}{2E_p \, 2E_q \, 2\hat{E}} \; \delta(E_p + E_q + \hat{E} - M) \, p^2 \; dp \;\, d^3q \tag{4.163}$$

Avendo integrato in $d\Omega_p$, abbiamo così "assorbito" i due gradi di libertà relativi all'orientazione del vettore $\vec{p}$ nello spazio (il vettore $\vec{q}$ e quindi $\vec{k}$ sono qui pensati "rigidamente legati" al vettore $\vec{p}$ ...).
Usando ancora le coordinate polari per $\vec{q}$, ma riferite stavolta a $\vec{p}$ come asse polare (per quanto riguarda l'integrazione precedente in d^3p, l'asse polare di riferimento era arbitrario !), abbiamo, evidentemente

$$d^3q = q^2 \; dq \; sin\theta \, d\theta \; d\phi$$

ma sia l'argomento della δ come $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ possono dipendere solo dall'angolo θ fra i vettori $\vec{p}$ e $\vec{q}$ e non dall'angolo azimutale ϕ, attraverso la quantità

$$|\vec{p} + \vec{q}|^2 = p^2 + q^2 + 2pq \, cos\theta$$

quindi di può integrare in $d\phi$ (e questo corrisponde appunto alla arbitrarietà di scelta del piano su cui giacciono i tre vettori $\vec{p}, \vec{q}, \vec{k}, ...$), ottenendo così

$$\begin{aligned} d\Phi &= \frac{4\pi}{(2\pi)^5}\, 2\pi\, \frac{1}{2E_p\, 2E_q\, 2\hat{E}}\ \delta(E_p + E_q + \hat{E} - M)\, p^2\ dp\ \ q^2\ dq\, sin\theta\, d\theta \\ &= \frac{2}{(2\pi)^3}\, \frac{1}{2E_p\, 2E_q\, 2\hat{E}}\ \delta(E_p + E_q + \hat{E} - M)\, p^2\ dp\ \ q^2\ dq\, d(-cos\theta) \end{aligned} \tag{4.164}$$

Possiamo ora integrare in $cos\theta$ per eliminare la δ di Dirac. Il solo termine nel suo argomento che dipende da $cos\theta$ è

$$\hat{E} = \sqrt{m_C^2 + p^2 + q^2 + 2pq\, cos\theta}$$

e si ha

$$\left|\frac{\partial(E_p + E_q + \hat{E} - M)}{\partial(-cos\theta)}\right| = \left|\frac{\partial\hat{E}}{\partial(cos\theta)}\right| = \frac{2pq}{2\hat{E}} = \frac{pq}{\hat{E}} \tag{4.165}$$

quindi[228]

$$d\Phi = \frac{2}{(2\pi)^3}\, \frac{1}{2E_p\, 2E_q\, 2\hat{E}}\ \delta(-cos\theta + cos\bar{\theta})\, \frac{1}{\frac{pq}{\hat{E}}}\, p^2\ dp\ \ q^2\ dq\, d(-cos\theta) \tag{4.166}$$

dove abbiamo indicato con $cos\bar{\theta}$ la soluzione in $\cos\theta$ dell'equazione[229]

$$E_p + E_q + \hat{E} - M = 0$$

i.e. dell'equazione

$$\sqrt{m_A^2 + p^2} + \sqrt{m_B^2 + q^2} + \sqrt{m_C^2 + p^2 + q^2 + 2pq\, cos\theta} = M$$

[228] Ricordiamo a questo proposito che se $f(x)$ è una funzione derivabile, allora, se indichiamo con x_i i suoi zeri, i.e. i punti per i quali $f(x_i) = 0$, se accade che $\frac{\partial f}{\partial x}|_{x=x_i} \neq 0$, risulta

$$\delta\left(f(x)\right)\, dx = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{\left|\frac{\partial f}{\partial x}|_{x=x_i}\right|}\, dx$$

[229] L'equazione $E_p + E_q + \hat{E} - M = 0$ implica ovviamente che $\hat{E} = M - E_p - E_q$ e dunque che

$$m_C^2 + p^2 + q^2 + 2pq\, cos\theta = (M - E_p - E_q)^2$$

che è risolta da

$$cos\bar{\theta} = \frac{(M - E_p - E_q)^2 - m_C^2 - p^2 - q^2}{2pq}$$

Ovviamente se e solo se questo risultato è compreso fra -1 e $+1$, p e q sono cinematicamente ammissibili. In questo caso, la soluzione in $cos\bar{\theta}$ è unica.

Integrando, risulta

$$\begin{aligned} d\Phi &= \frac{2}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{2E_p\,2E_q\,2\hat{E}}\,\frac{\hat{E}}{p\,q}\,p^2\,dp\;\;q^2\,dq \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{2E_p\,2E_q}\,p\,dp\;\;q\,dq \end{aligned} \tag{4.167}$$

D'altronde, essendo

$$E_p \equiv \sqrt{m_A^2 + p^2}; \qquad E_q \equiv \sqrt{m_B^2 + q^2}$$

risulta

$$p\;dp = E_p\;dE_p; \qquad q\,dq = E_q\;dE_q$$

per cui, in conclusione, per l'elemento di spazio delle fasi invariante di un sistema di tre particelle, nel CM si ha semplicemente

$$d\Phi = \frac{1}{4(2\pi)^3}\,dE_p\;dE_q \tag{4.168}$$

Poniamo adesso, per comodità di notazione

$$\begin{matrix} p_1 \equiv p & p_2 \equiv q & p_3 \equiv k \\ m_1 \equiv m_A & m_2 \equiv m_B & m_3 \equiv m_C \end{matrix}$$

e definiamo i seguenti invarianti di Lorentz (masse invarianti quadre delle tre possibili coppie di particelle)

$$s_1 \equiv (p_2 + p_3)^2 = m_2^2 + m_3^2 + 2(p_2 p_3) \tag{4.169}$$
$$s_2 \equiv (p_1 + p_3)^2 = m_1^2 + m_3^2 + 2(p_1 p_3) \tag{4.170}$$
$$s_3 \equiv (p_1 + p_2)^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2(p_1 p_2) \tag{4.171}$$

Evidentemente, dalla conservazione del quadrimpulso, risulta anche

$$s_1 \equiv (P - p_1)^2 = M^2 + m_1^2 - 2(P p_1) \tag{4.172}$$
$$s_2 \equiv (P - p_2)^2 = M^2 + m_2^2 - 2(P p_2) \tag{4.173}$$
$$s_3 \equiv (P - p_3)^2 = M^2 + m_3^2 - 2(P p_3) \tag{4.174}$$

che, nel sistema del CM, diventano[230]

$$s_1 = M^2 + m_1^2 - 2ME_1 \tag{4.176}$$

[230] I tre invarianti non sono indipendenti fra loro, infatti sommando le (4.176)-(4.178) e ricordando che nel CM

$$E_1 + E_2 + E_3 \equiv E_A + E_B + E_C \equiv E_p + E_q + E_k = M$$

si ottiene

$$\begin{aligned} s_1 + s_2 + s_3 &= 3M^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 - 2M(E_1 + E_2 + E_3) = \\ &= M^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 \end{aligned} \tag{4.175}$$

$$\begin{aligned} s_2 &= M^2 + m_2^2 - 2ME_2 && (4.177)\\ s_3 &= M^2 + m_3^2 - 2ME_3 && (4.178)\end{aligned}$$

Il loro significato fisico è proprio quello descritto nel riferimento del CM dalle relazioni (4.176)-(4.178): descrivono, a parte costanti, l'energia nel CM delle tre particelle. Risulta

$$\begin{aligned} ds_1 &= -2M\,dE_1 \equiv -2M\,dE_p && (4.179)\\ ds_2 &= -2M\,dE_2 \equiv -2M\,dE_q && (4.180)\end{aligned}$$

e quindi, *poiché* $d\Phi$ *è invariante di Lorentz* e nel CM assume la forma

$$d\Phi = \frac{1}{4(2\pi)^3}\,dE_p\,dE_q = \frac{1}{4(2\pi)^3}\,\frac{ds_1\,ds_2}{(2M)^2} \qquad (4.181)$$

essendo s_1 ed s_2 invarianti, l'espressione (4.181) è valida in ogni sistema di riferimento[231].
In conclusione, per tre particelle, abbiamo, in generale, che, in qualunque riferimento, risulta

$$d\Phi = \frac{ds_1\,ds_2}{16M^2\,(2\pi)^3} \qquad (4.182)$$

e. se sostituiamo questa espressione di *dLips* nell'espressione completa del *rate* di decadimento e della sezione d'urto differenziale, abbiamo finalmente le espressioni

$$\begin{aligned} d\Gamma &= \frac{1}{2J+1}\,\frac{1}{2E}\,\overline{|\mathcal{M}|^2}\,\frac{ds_1\,ds_2}{16\,M^2\,(2\pi)^3} && (4.183)\\ d\sigma &= \frac{1}{2J_1+1}\,\frac{1}{2J_2+1}\,\frac{1}{4\sqrt{(P_{in1}P_{in2})^2 - M_{in1}^2M_{in2}^2}}\,\overline{|\mathcal{M}|^2}\,\frac{ds_1\,ds_2}{16\,s\,(2\pi)^3} && (4.184)\end{aligned}$$

L'importanza del risultato ottenuto sta nel fatto che, se si fa uno scatter plot degli eventi nelle variabili s_1 ed s_2, lo spazio delle fasi fornisce un contributo uniforme in tutta la zona cinematicamente accessibile, quindi ogni addensamento/rarefazione di punti che si osservi in essa è dovuto alla dinamica del processo[232].
Lo scatter plot in questione si chiama[233] *plot di Dalitz-Fabri.*

[231] Naturalmente, dato che i tre invarianti sono linearmente dipendenti fra loro secondo la (4.175) una qualunque coppia (s_i, s_j) dei tre va altrettanto bene ...

[232] Naturalmente stiamo qui assumendo una accettanza e una efficienza del rivelatore perfettamente uniformi: se questo non accade, allora anche queste disuniformità possono provocare disuniformità nel plot in questione e occorre tenerne opportunamente conto attraverso, per esempio, una simulazione Montecarlo.

[233] E. Fabri: *A study of tau-meson decay* Il Nuovo Cimento 11, 480 (1954)
R.H. Dalitz: *Decay of τ mesons of known charge* Phys. Rev 94, 1046 (1954)

Per esempio, se le particelle B e C originano anche da uno stato risonante di massa M^*, allora, nel plot di Dalitz, si osserverà un addensamento di eventi per $s_1 = (M^*)^2$!

Veniamo infine alla determinazione della zona cinematicamente accessibile del Dalitz plot. Abbiamo visto che

$$s_i = M^2 + m_i^2 - 2M\,E_i \tag{4.185}$$

dunque, essendo $E_i \geq m_i$, risulterà

$$s_i \leq M^2 + m_i^2 - 2M\,m_i = (M - m_i)^2 \tag{4.186}$$

D'altronde[234], posto che (i, j, k) sia una permutazione pari di $(1, 2, 3)$, risulta

$$s_i = m_{jk} = (P - p_i)^2 = (p_j + p_k)^2 \geq (m_j + m_k)^2 \tag{4.187}$$

quindi abbiamo da soddisfare simultaneamente le tre disuguaglianze seguenti

$$(m_2 + m_3)^2 \leq s_1 \leq (M - m_1)^2 \tag{4.188}$$
$$(m_1 + m_3)^2 \leq s_2 \leq (M - m_2)^2 \tag{4.189}$$
$$(m_1 + m_2)^2 \leq s_3 \leq (M - m_3)^2 \tag{4.190}$$

e inoltre deve valere l'uguaglianza

$$s_1 + s_2 + s_3 = M^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 \equiv 3s_0 \tag{4.191}$$

Ne segue che, fissando arbitrariamente, per esempio, s_1 ed s_2 in modo che soddisfino, rispettivamente, la (4.188) e la (4.189), allora, ponendo

$$s_3 = 3s_0 - s_1 - s_2$$

[234]Ricordiamo che la massa invariante del sistema di due particelle è definita come

$$m_{AB}^2 \equiv (p_A + p_B)^2$$

e nel sistema del CM, dove

$$p_A = (E_A, \vec{p}); \qquad p_B = (E_B, -\vec{p})$$

si ha

$$m_{AB}^2 = (E_A + E_B)^2$$

e siccome $E_A \geq m_A$, $E_B \geq m_B$, segue che

$$m_{ab}^2 \geq (m_A + m_B)^2$$

se questa quantità soddisfa la disuguaglianza (4.190), la terna (s_1, s_2, s_3) così individuata verifica le condizioni (4.188)-(4.191) e questo equivale a dire che, nel CM, la terna delle energie E_1, E_2, E_3 soddisfa le condizioni

$$E_i \geq m_i; \qquad \sum_{i=1}^{3} E_i = M \tag{4.192}$$

Ma questo non significa ancora che la cinematica del decadimento sia rispettata, infatti, se è vero che, dalla (4.192) si possono definire i moduli degli impulsi spaziali delle tre particelle, attraverso le relazioni

$$p_i^2 = E_i^2 - m_i^2$$

e questi risulteranno sicuramente reali essendo $E_i \geq m_i$, non è affatto detto che questi valori di p_i possano essere tali che la loro somma vettoriale sia nulla. Affinchè questo accada, occorre e basta che i moduli p_1, p_2 e p_3 soddisfino la disuguaglianza triangolare, i.e., per esempio, siano tali che[235]

$$p_1 + p_2 \geq p_3; \qquad |p_1 - p_2| \leq p_3 \tag{4.193}$$

e dunque

$$(p_1 + p_2)^2 \;\geq\; p_3^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad p_1^2 + p_2^2 + 2p_1\, p_2 \geq p_3^2 \tag{4.194}$$

$$|p_1 - p_2|^2 \;\leq\; p_3^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad p_1^2 + p_2^2 - 2p_1\, p_2 \leq p_3^2 \tag{4.195}$$

ovvero

$$-2p_1\, p_2 \leq p_1^2 + p_2^2 - p_3^2 \leq 2p_1\, p_2 \qquad \Leftrightarrow \qquad |p_1^2 + p_2^2 - p_3^2| \leq 2p_1\, p_2 \tag{4.196}$$

da cui, quadrando ancora, si ottiene

$$p_1^4 + p_2^4 + p_3^4 \leq 2\left(p_1^2\, p_2^2 + p_1^2\, p_3^2 + p_2^2\, p_3^2\right) \tag{4.197}$$

D'altronde, per la (4.185), si ha

$$p_i^2 = E_i^2 - m_i^2 = \left(\frac{M^2 + m_i^2 - s_i}{2M}\right)^2 - m_i^2 \tag{4.198}$$

per cui, sostituendo la (4.198) nella (4.197), in termini solo di s_1, s_2 e delle masse delle particelle, si ottiene, dopo aver moltiplicato per M^2, che deve essere

$$\begin{aligned} & s_1\, s_2^2 + s_1^2\, s_2 - s_1 s_2 \left(m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + M^2\right) + \\ & + s_1 \left(m_2^2 m_3^2 - M^2 m_3^2 - m_1^2 m_2^2 + M^2 m_1^2\right) + \\ & + s_2 \left(m_1^2 m_3^2 - M^2 m_3^2 - m_1^2 m_2^2 + M^2 m_1^2\right) + \\ & + M^2 m_3^4 - m_1^2 m_2^2 m_3^2 - M^2 m_2^2 m_3^2 - M^2 m_1^2 m_3^2 + \\ & + M^4 m_3^2 + m_1 m_2^4 + m_1^4 m_2^4 - m_1^2 m_2^2 M^2 \leq 0 \end{aligned} \tag{4.199}$$

[235] E' un risultato di geometria che se la disuguaglianza triangolare vale nella forma della (4.193), allora vale per qualunque altra permutazione degli indici ...

Imponendo allora la condizione in questione, insieme a quella sui limiti per s_1 ed s_2 dati dalle (4.188) e (4.189), si ha infine la zona cinematicamente accessibile del plot di Dalitz.

Spesso poi, al posto delle variabili s_1 ed s_2 si usano variabili adimensionali[236], come, per esempio,

$$\begin{aligned} u &= \frac{s_1+s_2}{2M^2} \\ v &= \frac{s_1-s_2}{2M^2} \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} s_1 &= M^2(u+v) \\ s_2 &= M^2(u-v) \end{aligned} \tag{4.200}$$

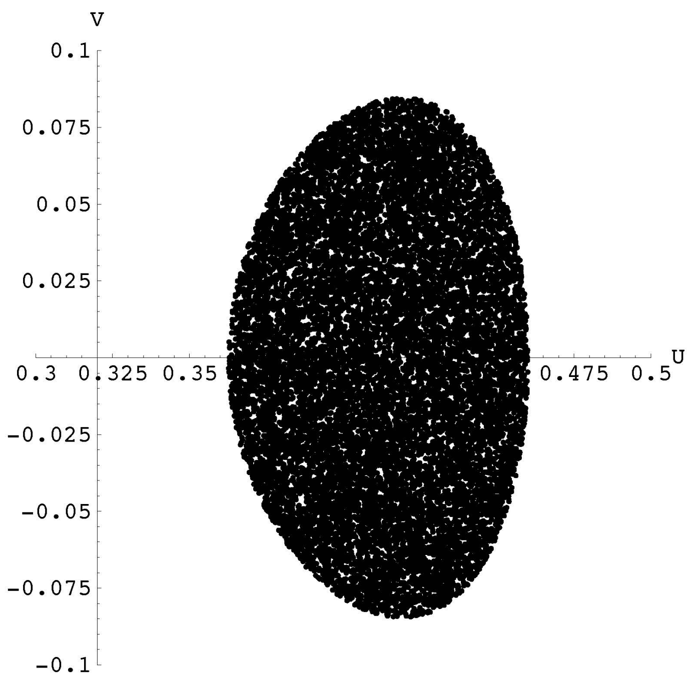


Figure 13: *Regione permessa nel Dalitz plot relativo al decadimento* $K^\pm \to \pi^\pm\pi^+\pi^-$.

[236]Si osservi che nelle variabili u, v definite dalla (4.200), l'elemento di spazio delle fasi, essendo

$$ds_1\ ds_2 = 2M^4\ du\ dv$$

risulta espresso da

$$d\Phi = \frac{2M^4\ du\ dv}{16M^2(2\pi)^3} = \frac{M^2}{8(2\pi)^3}\, du\ dv$$

In questo caso, ponendo $\mu_i \equiv m_i/M$, la disuguaglianza (4.199) diviene

$$\begin{aligned} & 2u^3 + v^2 - u^2 - 2uv^2 + u\left(\mu_1^2 + \mu_2^2 - 2\mu_1^2\mu_2^2 - 2\mu_3^2 + \mu_1^2\mu_3^2 + \mu_2^2\mu_3^2\right) + \\ & + u^2\left(-\mu_1^2 - \mu_2^2 - \mu_3^2\right) + v\left(\mu_1^2 - \mu_2^2 - \mu_1^2\mu_3^2 + \mu_2^2\mu_3^2\right) + v^2\left(\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2\right) \\ & -\mu_1^2\mu_2^2 + \mu_1^4\mu_2^2 + \mu_1^2\mu_2^4 + \mu_3^2 - \mu_1^2\mu_3^2 - \mu_2^2\mu_3^2 - \mu_1^2\mu_2^2\mu_3^2 + \mu_3^4 \quad \leq \quad 0 \end{aligned} \qquad (4.201)$$

La figura 13 mostra la regione accessibile nel Dalitz plot nelle variabili u, v sopradefinite, nel caso particolare in cui $\mu_i = \frac{139.57018}{493.677} = 0.2827$, che corrisponde al decadimento

$$K^\pm \to \pi^\pm \pi^+ \pi^-$$

4.4.3 *Lo spazio delle fasi di n particelle*

Abbiamo visto che, nel caso di n particelle, risulta

$$d\Phi^{(n)} = (2\pi)^4\, \delta^4(\sum_{i=1}^n p_i - P) \prod_{i=1}^n \frac{d^3p_i}{(2\pi)^3\, 2E_i} \qquad (4.202)$$

Questo elemento invariante dello spazio delle fasi può essere riscritto come prodotto di quello relativo a $(n-1)$ particelle per quello di due particelle, in modo da permettere una sua valutazione ricorsiva per qualunque n.

L'idea è che le n particelle dello stato finale considerato potranno essere ragguppate in un insieme di $(n-1)$ particelle, a cui aggiungere poi la n-esima. Considerando l'insieme di $(n-1)$ particelle come un unico soggetto (di quadrimpulso e massa invariante variabili ...), ecco che il sistema iniziale risulterà composto da due "particelle": una *vera*, mentre l'altra è *fittizia* e descrive l'insieme delle restanti $(n-1)$ particelle, la cui struttura interna sarà poi precisata da $\Phi^{(n-1)}$.
Vediamo formalmente come questo accada.
Poniamo, per comodità di notazione

$$d\Phi^{(n)} = (2\pi)^4\, \delta^4(\sum_{i=1}^n p_i - P) \prod_{i=1}^n \frac{d^3p_i}{(2\pi)^3\, 2E_i} \quad \equiv \quad d\Phi^{(n)}(P; p_1, ..., p_n) \qquad (4.203)$$

e riscriviamolo, intanto, come segue

$$d\Phi^{(n)}(P; p_1, ..., p_n) = (2\pi)^4\, \delta^4(p_1 + ... + p_n - P) \frac{d^3p_n}{(2\pi)^3\, 2E_n} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{d^3p_i}{(2\pi)^3\, 2E_i} \qquad (4.204)$$

Osserviamo quindi che, qualunque sia $m \geq 0$, vale la seguente identità

$$1 = \int_0^\infty \frac{d\mu^2}{2\pi} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\; 2\pi\; \theta(q^0)\; \delta(q^2 - \mu^2)\, (2\pi)^4\; \delta(p_1 + ... + p_m - q) \qquad (4.205)$$

Facendo $m = n - 1$ e sostituendo questa espressione nella (4.204), otteniamo

$$
\begin{aligned}
& d\Phi^{(n)}(P; p_1, ..., p_n) = \\
= & \int \frac{d\mu^2}{2\pi} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \; 2\pi \; \theta(q^0) \; \delta(q^2 - \mu^2) \, (2\pi)^4 \; \delta^4(p_1 + ... + p_{n-1} - q) \\
& (2\pi)^4 \, \delta^4(p_1 + ... + p_{n-1} + p_n - P) \, \frac{d^3 p_n}{(2\pi)^3 \, 2E_n} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 \, 2E_i} = \\
= & \int \frac{d\mu^2}{2\pi} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \; 2\pi \; \theta(q^0) \; \delta(q^2 - \mu^2) \\
& (2\pi)^4 \; \delta^4(p_1 + ... + p_{n-1} - q) \prod_{i=1}^{n-1} \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 \, 2E_i} \\
& (2\pi)^4 \, \delta^4(q + p_n - P) \, \frac{d^3 p_n}{(2\pi)^3 \, 2E_n}
\end{aligned}
$$

ma, come sappiamo, risulta

$$
\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \; 2\pi \; \theta(q^0) \; \delta(q^2 - \mu^2) = \frac{1}{(2\pi)^3} \, \frac{d^3 q}{2q^0}
$$

e quindi, in definitiva, abbiamo

$$
\begin{aligned}
& d\Phi^{(n)}(P; p_1, ..., p_n) = \int \frac{d\mu^2}{2\pi} \; (2\pi)^4 \; \delta^4(p_1 + ... + p_{n-1} - q) \prod_{i=1}^{n-1} \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 \, 2E_i} \\
& (2\pi)^4 \, \delta^4(q + p_n - P) \, \frac{d^3 p_n}{(2\pi)^3 \, 2E_n} \; \frac{1}{(2\pi)^3} \, \frac{d^3 q}{2q^0} = \\
= & \int \frac{d\mu^2}{2\pi} \; d\Phi^{(2)}(P; p_n, q) d\Phi^{(n-1)}(q; p_1, ..., p_{n-1}) \qquad (4.206)
\end{aligned}
$$

che è la formula di ricorrenza cercata.
Per quanto riguarda infine i limiti di integrazione in $d\mu^2$, si osservi che, essendo

$$
q = p_1 + ... + p_{n-1}
$$

ne segue che

$$
q^2 \equiv \mu^2 \geq m_1^2 + ... + m_{n-1}^2
$$

4.5 Applicazione allo scattering (quasi-)elastico

Consideriamo adesso in dettaglio il processo di scattering fra due particelle A e B (aventi masse M_A e M_B, quadrimpulsi k e p, negli stati di spin α e β, rispettivamente) che dà luogo a due particelle C e D (di masse M_C e M_D, quadrimpulsi k' e p', negli stati di spin α' e β', rispettivamente), le quali non coincidono, necessariamente, con quelle incidenti:

$$A(k;\alpha) + B(p\,;\beta) \to C(k';\alpha') + D(p';\beta') \tag{4.207}$$

Abbiamo già visto che questo processo è descritto dalla sezione d'urto differenziale

$$d\sigma = \frac{1}{\mathcal{F}}\,|\mathcal{M}|^2\,d\Phi \tag{4.208}$$

dove, ricordiamolo ancora una volta

- $\mathcal{F}$ è il termine di flusso incidente, associato alla cinematica delle particelle A e B, dato da
$$\mathcal{F} = 4\sqrt{(kp)^2 - M_A^2 M_B^2} \tag{4.209}$$
- $d\Phi$ è, per un assegnato impulso totale $P_{tot} \equiv k+p$, l'elemento di spazio delle fasi invariante di Lorentz, associato alle due particelle C e D, uscenti dall'interazione
$$d\Phi(k',p';P_{tot}) = (2\pi)^4\delta^4(k'+p'-P_{tot})\frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2E_C}\frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2E_D} \tag{4.210}$$
con $E_C = \sqrt{M_C^2 + |\vec{k}'|^2}$, $E_D = \sqrt{M_D^2 + |\vec{p}'|^2}$ le energie delle particelle C e D, rispettivamente.
- $|\mathcal{M}|^2$ è il modulo quadro dell'ampiezza di scattering invariante, relativa al processo in esame.

Se poi le due particelle incidenti non sono polarizzate, allora occorre evidentemente mediare sugli stati di spin iniziali, i.e. operare nella (4.208) la sostituzione

$$|\mathcal{M}|^2 \to \frac{1}{2S_A+1}\,\frac{1}{2S_B+1}\,\sum_{\alpha,\beta}|\mathcal{M}(\alpha,\beta;\alpha',\beta')|^2 \tag{4.211}$$

mentre, se non osserviamo lo spin delle particelle emergenti, dobbiamo sommare sui possibili stati di spin finali, i.e. porre

$$|\mathcal{M}|^2 \to \sum_{\alpha',\beta'}|\mathcal{M}(\alpha,\beta;\alpha',\beta')|^2 \tag{4.212}$$

Perciò, se le particelle incidenti non sono polarizzate e non ci curiamo degli stati di spin finali, allora

$$|\mathcal{M}|^2 \to \frac{1}{2S_A+1}\,\frac{1}{2S_B+1}\,\overline{|\mathcal{M}|^2} \tag{4.213}$$

dove

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} \equiv \sum_{\alpha,\beta} \sum_{\alpha',\beta'} |\mathcal{M}(\alpha,\beta;\alpha',\beta')|^2 \tag{4.214}$$

Poiché $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ è un invariante relativistico, esso potrà essere funzione solo di invarianti costruiti, evidentemente, a partire dai quadrimpulsi delle particelle che partecipano al processo.
Insieme alla massa invariante quadra s del sistema che già conosciamo, definiamo ora anche gli altri due invarianti di Mandelstam t ed u, associati processo di scattering considerato, ponendo

$$s = (k+p)^2 = M_A^2 + M_B^2 + 2(kp) \quad = (k'+p')^2 = M_C^2 + M_D^2 + 2(k'p') \tag{4.215}$$
$$t = (k-k')^2 = M_A^2 + M_C^2 - 2(kk') \; = (p'-p)^2 = M_D^2 + M_B^2 - 2(pp') \tag{4.216}$$
$$u = (k-p')^2 = M_A^2 + M_D^2 - 2(kp') = (k'-p)^2 = M_C^2 + M_B^2 - 2(k'p) \tag{4.217}$$

Questo è quanto ci basta e gli invarianti così definiti sono, addirittura "troppi", infatti essi non sono fra loro indipendenti[237] e soddisfano l'equazione[238]

$$s + t + u = M_A^2 + M_B^2 + M_C^2 + M_D^2 \tag{4.226}$$

[237] Il processo d'urto coinvolge quattro particelle, ma a causa della conservazione del quadrimpulso totale, solo tre quadrimpulsi sono indipendenti tra loro. Con tre quadrivettori possiamo costruire sei invarianti, ma quattro combinazioni di questi dovranno coincidere con le masse delle particelle date, per cui non potranno che esistere solo due scalari indipendenti (a parte le masse) costruiti con i quadrimpulsi delle particelle coinvolte nel processo.

[238] Osserviamo che dalle definizioni (4.215)-(4.217) segue che, sommando membro a membro le sei equazioni, risulta

$$2s \,+\, 2t \,+\, 2u \,= 3\left(\sum M^2\right) + 2\,A \tag{4.218}$$

dove abbiamo posto

$$\begin{aligned} \left(\sum M^2\right) \quad &\equiv \quad M_A^2 + M_B^2 + M_C^2 + M_D^2 && (4.219)\\ A \quad &\equiv \quad (kp) + (k'p') - (kk') - (pp') - (kp') - (k'p) && (4.220) \end{aligned}$$

D'altronde

$$\begin{aligned} A \;&=\; (kp) + (k'p') - (kk') - (pp') - (kp') - (k'p) =\\ &=\; (kp) + (k'p') - k(k'+p') - p(k'+p') = (kp) + (k'p') - (k+p)(k'+p') =\\ &=\; (kp) + (k'p') - s && (4.221)\\ A \;&=\; (kp) + (k'p') - (kk') - (pp') - (kp') - (k'p) =\\ &=\; -(kk') - (pp') + p(k-k') - p'(k-k') = -(kk') - (pp') - (k-k')(p'-p) =\\ &=\; -(kk') - (pp') - t && (4.222)\\ A \;&=\; (kp) + (k'p') - (kk') - (pp') - (kp') - (k'p) =\\ &=\; -(kp') - (k'p) + p(k-p') - k'(k-p') = -(kp') - (k'p) - (k-p')(k'-p) =\\ &=\; -(kp') - (k'p) - u && (4.223) \end{aligned}$$

per cui, fissate le masse delle quattro particelle, in generale, sarà, per esempio,

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \overline{|\mathcal{M}|^2}(s,t) \tag{4.227}$$

oppure funzione di un'altra qualunque coppia degli invarianti di Mandelstam.

Quanto poi al termine di flusso (4.209), ricavando (kp) dalla (4.215) in termini della variabile s, possiamo riscriverlo nel modo seguente

$$\mathcal{F} = 2\sqrt{(s - M_A^2 - M_B^2)^2 - 4M_A^2M_B^2} \tag{4.228}$$

ovvero, usando la (4.238) e quindi facendo intervenire il modulo a dell'impulso spaziale delle particelle iniziali nel CM

$$\mathcal{F} = 4\,a\,\sqrt{s} \tag{4.229}$$

Per quanto riguarda poi l'elemento di spazio delle fasi invariante $d\Phi$, integrando la (4.210) in d^3p' e quindi in dk, come sappiamo dalla (4.117), si ottiene

$$\begin{aligned} d\Phi &= \frac{1}{16\pi^2}\delta^4(k' + p' - p_{tot})\frac{d^3k'}{E_C}\frac{d^3p'}{E_D} = \\ &= \frac{1}{16\pi^2}\frac{\sqrt{(s - M_C^2 - M_D^2)^2 - 4M_C^2M_D^2}}{2s}\, d\Omega_{CM} \qquad (4.230) \\ &= \frac{1}{16\pi^2}\,\frac{b}{\sqrt{s}}\;\, d\Omega_{CM} \qquad (4.231) \end{aligned}$$

dove

- $d\Omega_{CM}$ è l'elemento di angolo solido associato nel CM a una qualsiasi delle due particelle uscenti;
- la quantità[239]

  $$b \equiv \frac{\sqrt{(s - M_C^2 - M_D^2)^2 - 4M_C^2M_D^2}}{2\sqrt{s}} = |\vec{p'}_{CM}| = |\vec{k'}_{CM}| \tag{4.233}$$

  è il modulo dell'impulso spaziale sia della particella C che D, così come appare nel riferimento del CM.

Dunque, sommando, otteniamo

$$3\,A \;=\; A - (s + t + u) \qquad \Rightarrow 2\,A = -\,(s + t + u) \tag{4.224}$$

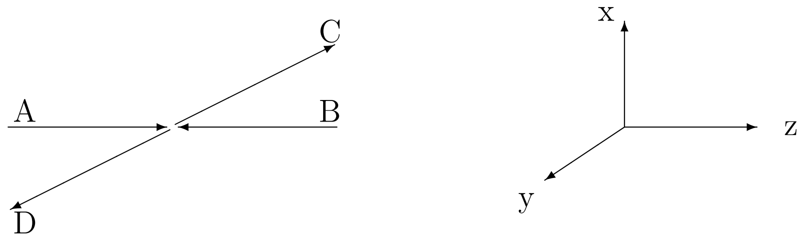
e quindi, sostituendo nella (4.218), si ha appunto che

$$(s + t + u) \;=\; \left(\sum M^2\right) \equiv M_A^2 + M_B^2 + M_C^2 + M_D^2 \tag{4.225}$$

[239]Osserviamo ancora una volta che quest'ultima quantità è definita solo se

$$(s - M_C^2 - M_D^2)^2 - 4M_C^2M_D^2 \geq 0 \Leftrightarrow s \geq (M_C + M_D)^2 \tag{4.232}$$

i.e., se ci troviamo sopra soglia di produzione ...!



Se il sistema[240] del CM è scelto in modo che l'asse polare coincida con la direzione di volo della particella A (vedi figura sopra riportata), possiamo integrare lo spazio delle fasi $d\Phi$ nella coordinata azimutale ϕ, dato che s e t, da cui potrà eventualmente dipendere $\overline{|\mathcal{M}|^2}$, risultano indipendenti da ϕ visto che, in termini

[240] Allorchè trattammo la cinematica dell'urto anelastico fra due particelle A e B, di massa M_A ed M_B, che danno luogo a due particelle C e D, di massa M_C ed M_D, vedemmo che, nel sistema del CM, se allineiamo gli assi in modo che A si propaghi lungo la direzione dell'asse polare z, abbiamo

$$A: \qquad k = (\sqrt{M_A^2 + a^2}, 0, 0, a) \tag{4.234}$$

$$B: \qquad p = (\sqrt{M_B^2 + a^2}, 0, 0, -a) \tag{4.235}$$

$$C: \qquad k' = (\sqrt{M_C^2 + b^2}, b\, sin\theta\, cos\phi, b\, sin\theta\, sin\phi, b\, cos\theta) \tag{4.236}$$

$$D: \qquad p' = (\sqrt{M_D^2 + b^2}, -b\, sin\theta\, cos\phi, -b\, sin\theta\, sin\phi, -b\, cos\theta) \tag{4.237}$$

dove a, b sono, rispettivamente, i moduli degli impulsi lineari delle due coppie (A,B) e (C,D), legati alla variabile di Mandelstam s (massa invariante quadra del sistema) dalle relazioni

$$a = \frac{\sqrt{(s - M_A^2 - M_B^2)^2 - 4M_A^2 M_B^2}}{2\sqrt{s}}; \qquad b = \frac{\sqrt{(s - M_C^2 - M_D^2)^2 - 4M_C^2 M_D^2}}{2\sqrt{s}} \tag{4.238}$$

per cui possiamo anche scrivere

$$E_A = \sqrt{M_A^2 + a^2} = \frac{s + M_A^2 - M_B^2}{2\sqrt{s}}; \qquad E_B = \sqrt{M_B^2 + a^2} = \frac{s + M_B^2 - M_A^2}{2\sqrt{s}} \tag{4.239}$$

$$E_C = \sqrt{M_C^2 + b^2} = \frac{s + M_C^2 - M_D^2}{2\sqrt{s}}; \qquad E_D = \sqrt{M_D^2 + b^2} = \frac{s + M_D^2 - M_C^2}{2\sqrt{s}} \tag{4.240}$$

di quantità definite nel sistema del CM, queste variabili sono date da

$$s = M_A^2 + M_B^2 + 2\left(\sqrt{M_A^2 + a^2}\sqrt{M_B^2 + a^2} + a^2\right) \tag{4.241}$$

$$t = M_A^2 + M_C^2 - 2\left(\sqrt{M_A^2 + a^2}\sqrt{M_C^2 + b^2} - a\, b\, cos\theta_{CM}\right) \tag{4.242}$$

Effettuando questa integrazione, otteniamo

$$d\Phi = \frac{1}{16\pi}\frac{\sqrt{(s - M_C^2 - M_D^2)^2 - 4M_C^2 M_D^2}}{s}\; d(-cos\theta_{CM}) \tag{4.243}$$

Usando questo risultato nella equazione (4.208), insieme con l'espressione del flusso incidente dato dalla equazione (4.228), abbiamo infine che

$$d\sigma = \frac{1}{(2S_A+1)(2S_B+1)}\frac{1}{32\pi s}\frac{\sqrt{(s - M_C^2 - M_D^2)^2 - 4M_C^2 M_D^2}}{\sqrt{(s - M_A^2 - M_B^2)^2 - 4M_A^2 M_B^2}}\;\overline{|\mathcal{M}|^2}\; d(-cos\theta_{CM}) \tag{4.244}$$

i.e., in termini dei moduli dell'impulso a e b di cui alla (4.238), risulta

$$d\sigma = \frac{1}{(2S_A+1)(2S_B+1)}\;\frac{1}{32\pi s}\;\frac{b}{a}\;\overline{|\mathcal{M}|^2}\; d(-cos\theta_{CM}) \tag{4.245}$$

la quale, nel caso di scattering elastico (le particelle nello stato finale coincidono con quelle nello stato iniziale) si semplifica, evidentemente, in

$$d\sigma|_{el} = \frac{1}{(2S_A+1)(2S_B+1)}\;\frac{\overline{|\mathcal{M}|^2}}{32\pi s}\; d(-cos\theta_{CM}) \tag{4.246}$$

Invece dell'angolo di scattering $cos\theta_{CM}$, talvolta è più conveniente usare altre variabili che siano invarianti di Lorentz, come, per esempio, la variabile adimensionale[241] y definita nella nota riportata sotto, attraverso l'equazione (4.248), in termini del momento trasferito

$$q \equiv k - k' = p' - p \tag{4.257}$$

[241] Definiamo la variabile adimensionale y in termini del quadrimpulso trasferito così definito

$$q \equiv k - k' \tag{4.247}$$

il quale, nel caso elastico, fornirebbe l'impulso trasferito dalla particella A a B. Poniamo

$$y \equiv \frac{pq}{pk} = 1 - \frac{pk'}{pk} = 1 - \frac{2\,pk'}{2\,pk} \tag{4.248}$$

Ma, dalle equazioni (4.235), (4.236) e dalle equazioni (4.239), (4.240), si ha

$$2\,pk' = 2\sqrt{M_C^2 + b^2}\sqrt{M_B^2 + a^2} + 2ab\; cos\theta_{CM} \tag{4.249}$$

$$= 2\,\frac{s + M_C^2 - M_D^2}{2\sqrt{s}}\;\frac{s + M_B^2 - M_A^2}{2\sqrt{s}} + 2ab\; cos\theta_{CM} \tag{4.250}$$

Abbiamo dimostrato [cfr. (4.252)] che la variabile y può essere scritta come

$$y = \mathcal{A} - \mathcal{B}\ cos\theta_{CM} \tag{4.258}$$

dove [cfr.(4.253), (4.254)]

$$\mathcal{A} = 1 - \frac{(s + M_C^2 - M_D^2)(s + M_B^2 - M_A^2)}{2s(s - M_A^2 - M_B^2)} \tag{4.259}$$

$$\tag{4.260}$$

$$\mathcal{B} = \frac{2ab}{s - M_A^2 - M_B^2} = \tag{4.261}$$

$$= \frac{\sqrt{(s - M_C^2 - M_D^2)^2 - 4M_C^2 M_D^2}\sqrt{(s - M_A^2 - M_B^2)^2 - 4M_A^2 M_B^2}}{2s(s - M_A^2 - M_B^2)} \tag{4.262}$$

Perciò, per una energia totale fissata nel CM $\sqrt{s} = \mathcal{E}_{CM}$, abbiamo

$$dy = \mathcal{B}\, d(-cos\theta_{CM}) \tag{4.263}$$

e dunque, ripartendo dalla relazione (4.245)

$$d\sigma = \frac{1}{(2S_A + 1)(2S_B + 1)}\ \frac{1}{32\,\pi\, s}\ \frac{b}{a}\ \overline{|\mathcal{M}|^2}\ d(-cos\theta_{CM}) \tag{4.264}$$

---

mentre, dalla definizione stessa di s in termini dei quadrimpulsi di A e B, risulta

$$2\,pk = s - M_A^2 - M_B^2 \tag{4.251}$$

Perciò, sostituendo nella equazione (4.248), otteniamo infine

$$y = \mathcal{A} - \mathcal{B}\ cos\theta_{CM} \tag{4.252}$$

dove

$$\mathcal{A} = 1 - \frac{(s + M_C^2 - M_D^2)(s + M_B^2 - M_A^2)}{2s(s - M_A^2 - M_B^2)} \tag{4.253}$$

$$\mathcal{B} = \frac{2ab}{2\,pk} =$$

$$= \frac{\sqrt{(s - M_C^2 - M_D^2)^2 - 4M_C^2 M_D^2}\sqrt{(s - M_A^2 - M_B^2)^2 - 4M_A^2 M_B^2}}{2s(s - M_A^2 - M_B^2)} \tag{4.254}$$

da cui, evidentemente, per s fissato, risulta

$$d(-cos\theta_{CM}) = \frac{dy}{\mathcal{B}} \tag{4.255}$$

e quindi, in termini della variabile y,

$$d\Phi = \frac{1}{8\pi}\ \frac{s - M_A^2 - M_B^2}{\sqrt{(s - M_A^2 - M_B^2)^2 - 4M_A^2 M_B^2}}\ dy \tag{4.256}$$

otteniamo

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{1}{(2S_A+1)(2S_B+1)}\,\frac{1}{32\,\pi\,s}\,\frac{b}{a}\,\overline{|\mathcal{M}|^2}\,\frac{dy}{\mathcal{B}} = \\ &= \frac{1}{(2S_A+1)(2S_B+1)}\,\frac{1}{32\,\pi\,s}\,\frac{b}{a}\,\overline{|\mathcal{M}|^2}\,\frac{s-M_A^2-M_B^2}{2ab}\,dy \\ &\Rightarrow \frac{d\sigma}{dy} = \frac{1}{(2S_A+1)(2S_B+1)}\,\frac{1}{32\,\pi\,s}\,\overline{|\mathcal{M}|^2}\,\frac{s-M_A^2-M_B^2}{2a^2} \end{aligned} \tag{4.265}$$

ovvero, finalmente

$$\frac{d\sigma}{dy} = \frac{1}{(2S_A+1)(2S_B+1)}\,\frac{1}{16\pi}\frac{s-M_A^2-M_B^2}{(s-M_A^2-M_B^2)^2-4M_A^2M_B^2}\,\overline{|\mathcal{M}|^2} \tag{4.266}$$

con[242]

$$\mathcal{A}-\mathcal{B} \le y \le \mathcal{A}+\mathcal{B} \tag{4.275}$$

---

[242]Si osservi che nel limite di alta energia, i.e. quando $s >> M^2$, risulta comunque che

$$\mathcal{A} \to \frac{1}{2}; \qquad \mathcal{B} \to \frac{1}{2} \tag{4.267}$$

per cui i limiti di integrazione in dy diventano, rispettivamente, 0 ed 1.

Se accade che $M_A = 0$, ci sono poi alcune semplificazioni.
Quanto alla sezione d'urto differenziale, risulta evidentemente

$$\frac{d\sigma}{dy} = \frac{1}{(2S_A+1)(2S_B+1)}\,\frac{1}{16\pi}\frac{1}{(s-M_B^2)}\,\overline{|\mathcal{M}|^2} \tag{4.268}$$

con

$$\mathcal{A} = 1 - \frac{(s+M_C^2-M_D^2)(s+M_B^2)}{2s(s-M_B^2)} \tag{4.269}$$

$$\mathcal{B} = \frac{\sqrt{(s-M_C^2-M_D^2)^2-4M_C^2M_D^2}}{2s} \tag{4.270}$$

le quali, nel caso in cui possa essere trascurata anche la massa M_C , diventano

$$\mathcal{A} \to 1 - \frac{(s-M_D^2)(s+M_B^2)}{2s(s-M_B^2)} \tag{4.271}$$

$$\mathcal{B} \to \frac{s-M_D^2}{2s} \tag{4.272}$$

per cui ne risulta che, quanto agli estremi di integrazione, è

$$\mathcal{A}-\mathcal{B} \to 1 - \frac{s-M_D^2}{s-M_B^2} \tag{4.273}$$

$$\mathcal{A}+\mathcal{B} \to 1 + \frac{s-M_D^2}{s-M_B^2}\,\frac{M_B^2}{s} \tag{4.274}$$

Un'altra variabile talvolta utile per esprimere la sezione d'urto differenziale fra due particelle, è l'invariante Q^2, definito[243] come

$$Q^2 \equiv -(q\,q) \equiv -(k-k')^2 = -t \tag{4.283}$$

Dalla equazione (4.280), abbiamo

$$Q^2 = Q_0^2 - (s - M_A^2 - M_B^2)\; \mathcal{B}\; cos\theta_{CM} \tag{4.284}$$

---

[243]Questa variabile è definita come

$$Q^2 \equiv -q^2 \equiv -t = -(k-k')^\mu (k-k')_\mu = -M_A^2 - M_C^2 + 2(kk') \tag{4.276}$$

Dalla (4.234) e (4.236), abbiamo

$$2(kk') = 2\sqrt{M_A^2 + a^2}\sqrt{M_C^2 + b^2} - 2ab\; cos\theta_{CM} \tag{4.277}$$

i.e.

$$\begin{aligned} Q^2 &= -M_A^2 - M_C^2 + 2\,\frac{(s + M_A^2 - M_B^2)}{2\sqrt{s}}\,\frac{(s + M_C^2 - M_D^2)}{2\sqrt{s}} - 2ab\; cos\theta_{CM} \\ &= \frac{(s + M_A^2 - M_B^2)(s + M_C^2 - M_D^2) - 2s(M_A^2 + M_C^2)}{2s} - 2ab\; cos\theta_{CM} \end{aligned} \tag{4.278}$$

Se definiamo allora la quantità costante (fissato s)

$$Q_0^2 \equiv \frac{(s + M_A^2 - M_B^2)(s + M_C^2 - M_D^2) - 2s(M_A^2 + M_C^2)}{2s} \tag{4.279}$$

ed esprimiamo $2ab$ in termini di $\mathcal{B}$, usando l'equazione (4.254) e l'espressione di $2(pk)$ come data dalla (4.251), otteniamo

$$2ab = 2(pk)\,\mathcal{B} = (s - M_A^2 - M_B^2)\,\mathcal{B}$$

per cui, finalmente, otteniamo

$$Q^2 = Q_o^2 - (s - M_A^2 - M_B^2)\,\mathcal{B}\,cos\theta_{CM} \tag{4.280}$$

e dunque, di nuovo, ad s fissato

$$dQ^2 = (s - M_A^2 - M_B^2)\,\mathcal{B}\,d(-cos\theta_{CM}) \equiv (s - M_A^2 - M_B^2)\,dy \tag{4.281}$$

per cui, dalla (4.256), risulta

$$d\Phi = \frac{1}{8\pi}\,\frac{1}{\sqrt{(s - M_A^2 - M_B^2)^2 - 4M_A^2 M_B^2}}\; dQ^2 \tag{4.282}$$

dove Q_0^2 è dato dalla (cfr (4.279))

$$Q_0^2 = \frac{(s + M_A^2 - M_B^2)(s + M_C^2 - M_D^2) - 2s(M_A^2 + M_C^2)}{2s} \tag{4.285}$$

e $\mathcal{B}$ è dato dalla (4.262).

Se l'energia $\mathcal{E} = \sqrt{s}$ nel CM è fissata, allora

$$dQ^2 = -\mathcal{B}\,(s - M_A^2 - M_B^2)\,d(cos\theta_{CM}) = (s - M_A^2 - M_B^2)dy \tag{4.286}$$

e perciò, dalla (4.265), finalmente si ha

$$\frac{d\sigma}{dQ^2} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{16\pi\,[(s - M_A^2 - M_B^2)^2 - 4M_A^2 M_B^2]} \tag{4.287}$$

dove

$$Q_0^2 - \mathcal{B}\,(s - M_A^2 - M_B^2) \leq Q^2 \leq Q_0^2 + \mathcal{B}\,(s - M_A^2 - M_B^2) \tag{4.288}$$

Di nuovo, nel caso poi in cui le particelle incidenti siano non polarizzate e non si osservi lo stato di spin delle particelle prodotte, risulta

$$\frac{d\sigma}{dQ^2} = \frac{1}{(2S_A + 1)(2S_B + 1)}\,\frac{1}{16\pi}\,\overline{|\mathcal{M}|^2}\,\frac{1}{[(s - M_A^2 - M_B^2)^2 - 4M_A^2 M_B^2]} \tag{4.289}$$

4.5.1 *Lo spin del pione π^+*

Oggi sappiamo che i tre pioni sono costituiti da una coppia quark/antiquark della prima generazione (i.e. *up* e *down*), e in particolare che risulta

$$|\pi^+ >= |u\bar{d}>, \quad |\pi^0 >= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|u\bar{u}> -|d\bar{d}>\right), \quad |\pi^- >= |d\bar{u}> \tag{4.290}$$

Il quark e l'antiquark, che hanno entrambi spin $S = 1/2$, sono legati in uno stato di singoletto di spin e hanno momento angolare orbitale relativo $L = 0$, per cui i pioni hanno, a loro volta, spin nullo[244].

Questo era un fatto messo in evidenza sperimentalmente ben prima che si arrivasse a capire la loro struttura in termini di quarks. Per questo, si era usato il metodo[245] del *bilancio dettagliato*, che consiste nel confronto fra la sezione d'urto del processo

$$p + p \rightarrow \pi^+ + d \tag{4.291}$$

con quella del processo inverso

$$\pi^+ + d \rightarrow p + p \tag{4.292}$$

In entrambi i casi si tratta di un processo di scattering quasi-elastico e, come abbiamo visto, la sezione d'urto differenziale di un generico processo di questo tipo, nel caso in cui lo stato iniziale *non abbia* spin definito e lo spin delle particelle nello stato finale *non venga* osservato, in base alla (4.106), può essere scritta nel modo seguente

$$d\sigma = \frac{1}{(2J_a+1)(2J_b+1)}\,\frac{1}{64\pi^2 s}\,\frac{b}{a}\,\overline{|\mathcal{M}|^2}\,d\Omega_{CM} \tag{4.293}$$

dove

- $\sqrt{s}$ è la massa invariante del sistema delle due particelle;
- a e b indicano, nel sistema del CM, rispettivamente il modulo dell'impulso delle particelle iniziali e finali;
- J_a e J_b sono gli spin delle due particelle che collidono;

[244]Chiaramente lo spin nullo dei pioni, dalla legge di composizione del momento angolare, potrebbe ottenersi anche se i due costituenti fossero legati in uno stato di tripletto di spin e in onda P, cioè con momento angolare relativo $L = 1$.
Questa possibilità è esclusa, però, dalla parità intrinseca del pione, che, come abbiamo visto almeno nel caso del π^0, risulta essere negativa (il pione è una particella pseudoscalare ...): poiché esso è costituito da una coppia particella/antiparticella di Dirac, esso ha comunque parità intrinseca pari a $(-1)\cdot(-1)^L$ e quindi L deve essere pari.

[245]Cfr., per esempio, H. Muirhead: *The Physics of elementary Particles* , Pergamon Press 1965, pag. 26.

- $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ è la somma di tutti i moduli quadri delle ampiezze invarianti di scattering, relative al processo considerato, fatta su tutti i possibili stati di spin iniziali e finali.

Indicheremo rispettivamente con $\sigma_\rightarrow$ e $\sigma_\leftarrow$ le sezioni d'urto per il processo diretto e per quello inverso.
Poiché le interazioni forti sono invarianti per *time reversal*, nel caso del processo considerato, che avviene, appunto, via interazione forte, poiché la matrice S soddisfa quindi la relazione $T\,S\,T^{-1} = S^\dagger$, il modulo quadro degli elementi di matrice per i due decadimenti, *diretto* e *inverso*, sono funzionalmente identici, per cui abbiamo

$$\overline{|\mathcal{M}_\rightarrow|^2} = \overline{|\mathcal{M}_\leftarrow|^2} \tag{4.294}$$

quindi, ponendo adesso, per maggior chiarezza

$$processo\ \ diretto: \qquad a \equiv p_p; \quad b \equiv p_\pi \tag{4.295}$$
$$processo\ \ inverso: \qquad a \equiv p_\pi; \quad b \equiv p_p \tag{4.296}$$

ecco che dal confronto delle due sezioni d'urto valutate per lo stesso valore di $\sqrt{s}$ (e quindi avendo integrato sugli stessi valori di t, visto che a s fissato anche $t_\rightarrow = t_\leftarrow$) usando il fatto che $J_p = 1/2$, mentre $J_d = 1$ e tenendo conto infine che lo stato finale, nel caso della reazione "inversa", è fatto da due particelle identiche, che dimezza lo spazio delle fasi, otteniamo

$$\frac{\sigma_\rightarrow}{\sigma_\leftarrow} = \frac{\frac{1}{2\cdot 2}\,\frac{p_\pi}{p_p}}{\frac{1}{2}\,\frac{1}{3\cdot(2J+1)}\,\frac{p_p}{p_\pi}} = \frac{3(2J+1)}{2}\left(\frac{p_\pi}{p_p}\right)^2 \tag{4.297}$$

dove J è appunto lo spin ignoto del π^+.
La prima misura della sezione d'urto del processo diretto fu effettuata da Cartwright[246] e collaboratori nel 1953, ottenendo, per un protone incidente su un bersaglio di idrogeno con energia[247], nel laboratorio, pari a 341 MeV, il valore di

$$\sigma_\rightarrow = (1.8 \pm 0.6) \times 10^{-28}\,cm^2 \equiv 0.18 \pm 0.06\ mbarn$$

[246] W.F. Cartwright, C. Richman, M.N. Whitehead, H.A. Wilson: *The production of positive pions by 341-MeV protons on protons* Phys. Rev. 91, 677, (1953)

[247] Si osservi che, essendo la massa del deutone pari a $M_d = 1875.6\,MeV$, quella del protone $M_p = 938.3\,MeV$ e quella del pione carico pari a $m_\pi = 139.6\,MeV$, la soglia della reazione $p + p \rightarrow \pi^+ + d$ si raggiunge per un'energia del protone incidente su bersaglio fisso, pari a

$$2M_p^2 + 2M_p\,E = (M_d + m_\pi)^2 \Rightarrow E = \frac{(M_d + m_\pi)^2 - 2M_p^2}{2M_p} = 1225.7\,MeV$$

ovvero per un'energia cinetica del protone pari a $T_{thr} = 287.4\,MeV$.
L'esperimento di Cartwright operava quindi a poco più di 50 MeV sopra la soglia, a una energia cinetica dei protoni pari a $T_0 = 341\,MeV$, ovvero a una massa invariante pari a

$$\sqrt{s} = \sqrt{2M_p(M_p + E)} = \sqrt{2M_p(2M_p + T_0)} = \sqrt{4M_p^2 + 2M_pT_0} = 2040.0\,MeV$$

Da questo conclusero che il processo inverso, valutato per lo stesso valore di massa invariante del sistema, avrebbe dovuto avere una sezione d'urto di

$$\sigma_{\leftarrow} = (3.0 \pm 1.0) \times 10^{-27}\, cm^2 \equiv 3.0 \pm 1.0\ mbarn$$

se lo spin del pione fosse stato nullo[248], oppure 1/3 di quel valore, in accordo con la (4.297), nel caso fosse stato pari a 1, etc ...
Il confronto con le misure di assorbimento di pioni positivi in deuterio[249] già effettuate, propendeva decisamente verso un valore nullo dello spin del π^+.

Questo risultato fu definitivamente stabilito nel 1957 da Cohen[250] e collaboratori, i quali, sulla base dei risultati sperimentali sin lí accumulati, poterono concludere che

$$(2J+1) = 1 \pm 0.1 \tag{4.298}$$

---

a cui corrisponde un impulso del protone nel sistema del CM che è pari a

$$p_p = \frac{\sqrt{(s-2M_p^2)^2 - 4M_p^4}}{2\sqrt{s}} = \frac{\sqrt{s^2 - 4sM_p^2}}{2\sqrt{s}} = \frac{\sqrt{s-4M_p^2}}{2} = \sqrt{\frac{M_p T_0}{2}} = 400\, MeV/c$$

Circa la reazione inversa $d + \pi^+ \to p + p$, allo stesso valore di massa invariante, corrisponde un'energia del pione carico su deutone fermo che è pari a

$$s = m_\pi^2 + M_d^2 + 2E_\pi\, M_d \Rightarrow E_\pi = \frac{s - m_\pi^2 - M_d^2}{2M_d} = 166.4\, MeV$$

corrispondente a una energia cinetica nel sistema del laboratorio pari a
$T_\pi = E_\pi - m_\pi = 26.8\, MeV$ e a un impulso nel sistema del CM di

$$p_\pi = \frac{\sqrt{(s - m_\pi^2 - M_d^2)^2 - 4m_\pi^2\, M_d^2}}{2\sqrt{s}} = 83.3\, MeV/c$$

per cui il fattore cinematico (per $J = 0$) fra le due sezioni d'urto valeva

$$\frac{\sigma_{\rightarrow}}{\sigma_{\leftarrow}} = \frac{3}{2}\left(\frac{p_\pi}{p_p}\right)^2 = 0.065$$

Al tempo dell'esperimento, le masse non erano note con tutta la precisione con cui le conosciamo oggi, e questo fattore fu valutato essere pari a 16.7, da cui fu estrapolato il valore di
$\sigma_{\leftarrow} = (3.0 \pm 1.0) \times 10^{-27}\, cm^2$ a partire dalla misura di $\sigma_{\rightarrow} = (1.8 \pm 0.6) \times 10^{-28}\, cm^2$.

[248] L'esistenza stessa della reazione implicava, evidentemente, che lo spin del pione fosse comunque intero ...

[249] D.L. Clark, A. Roberts, R. Wilson: *Cross section for the reaction $\pi^+ + d \to p + p$ and the spin of the π^+ meson* Phys. Rev. 83, 649 (1951)

D.L. Clark, A. Roberts, R. Wilson: *Disintegration of the deuteron by π^+ mesons and the spin of the π^+ meson* Phys. Rev. 85, 523 (1952); i quali avevano misurato
$\sigma = (4.5 \pm 0.8) \times 10^{-27}\, cm^2$.

R. Durbin, H. Loar, J. Steinberger: *The absorption of pions by deuterons*
Phys. Rev. 84, 581 (1951); i quali avevano misurato $\sigma = (3.1 \pm 0.3) \times 10^{-27}\, cm^2$.

[250] E.R. Cohen, K.M. Crowe, J.M. Dumond: *Fundamental costants of physics* Interscience Publisher, New York, 1957

4.5.2 Lo scattering quasi-elastico $\bar{\nu} + p \to n + e^+$

Ci occuperemo adesso dello scattering quasi-elastico di antineutrino perché, come è noto, fu attraverso questo processo che fu rivelata per la prima volta, l'esistenza

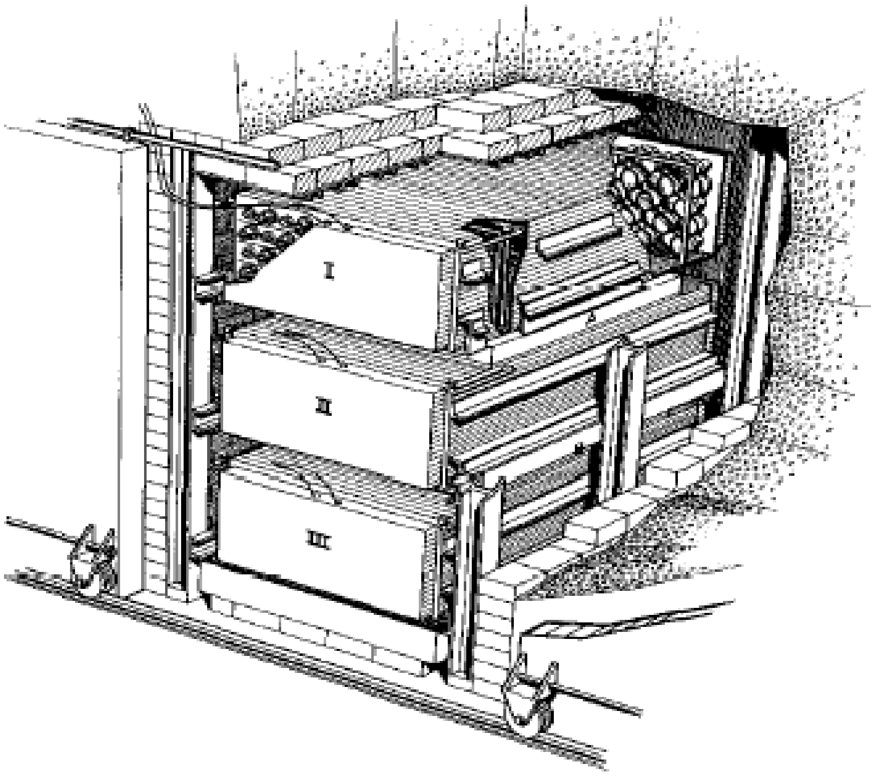


Figure 14: *Apparato sperimentale usato da Cowan e Reines*

di questa particella.
L'esperimento che portò alla prima osservazione sperimentale diretta del neutrino (in realtà, dell'antineutrino ...) fu, come è noto, quello di Cowan e Reines[251], i quali osservarono la reazione beta-inversa[252]

$$\bar{\nu} + p \to n + e^+ \tag{4.299}$$

presso la centrale nucleare di Savannah River, negli USA, in grado di fornire un flusso[253] di ben $10^{13}\,\bar{\nu}/cm^2 \cdot s$ sul bersaglio, costituito da 200 litri di acqua in

[251] F. Reines, C.L. Cowan jr: *A proposed experiment to detect the free neutrino,* Phys. Rev. 90, 492 (1953)
F. Reines, C.L. Cowan jr: *Detection of free neutrino,* Phys. Rev. 92, 830 (1953)
F. Reines, C.L. Cowan jr, F.B. Harrison, A.D.McGuire, H.W. Kruse: *Detection of free antineutrino,* Phys. Rev. 117, 159 (1960)

[252] Quanto vale l'energia di soglia che deva avere il neutrino affinché la reazione possa avvenire?

[253] In un processo di fissione neutronica del nucleo ^{235}U, si ottengono tipicamente due nuclei ricchi di neutroni e un paio di neutroni che consentono la prosecuzione della reazione a catena

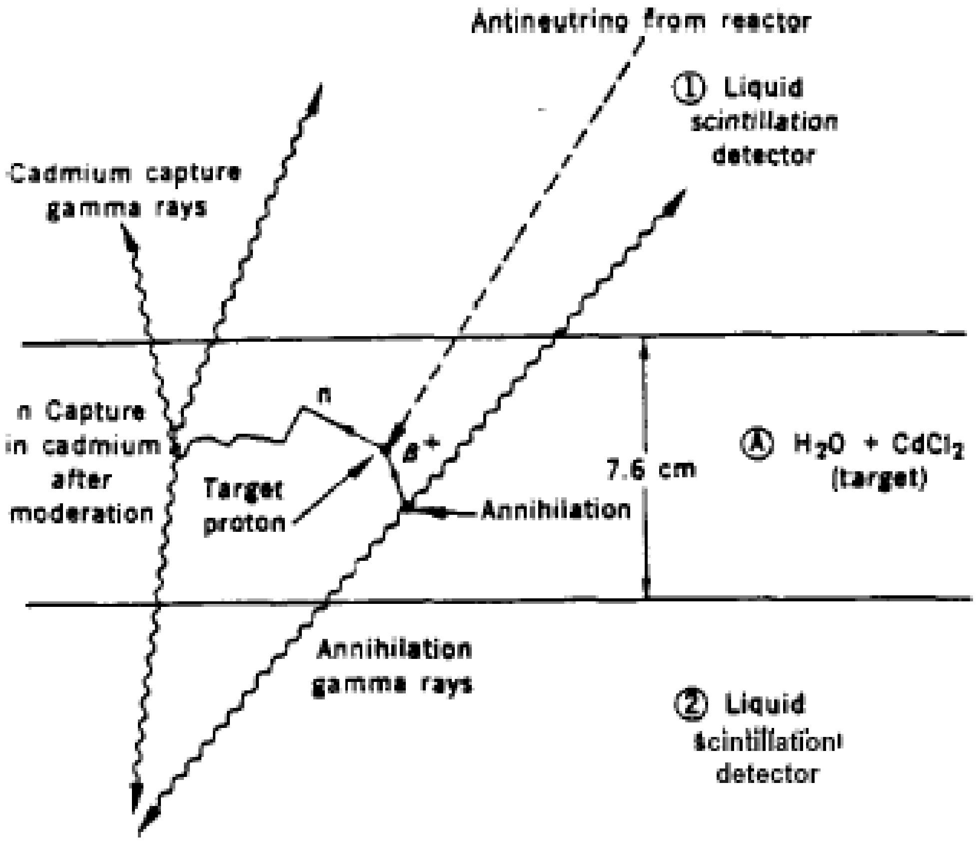


Figure 15: *Principio di funzionamento dell'esperimento di Cowan e Reines*

cui erano disciolti 40 Kg di cloruro di cadmio ($CdCl_2$). Il segnale era costituito dall'osservazione dei due gamma da 0.511 MeV di annichilazione del positrone con un elettrone del mezzo, osservati in coincidenza ritardata (circa 30 μsec) con i gamma emessi dal nucleo di Cadmio che catturava il neutrone termalizzato.

Il rivelatore era costituito da 1400 litri di scintillatore liquido disposto intorno al bersaglio, visto da circa un centinaio di fotomoltiplicatori.

(per es. ${}^{235}U + n \to {}^{140}_{54}Xe + {}^{94}_{38}Sr + 2\,n$). I prodotti di fissione danno luogo a decadimenti β di corta vita media (ms), a cascata. In media si hanno circa 6 $\bar{\nu}_e$ di varia energia per ogni fissione, e un totale di circa 200 MeV di energia prodotta. Dunque, il numero di antineutrini emessi dal reattore, per secondo, vale

$$N_{\bar{\nu}} \approx 6\,N_{fis} = \frac{6\,P_{th}}{2 \cdot 10^8 \times 1.6 \cdot 10^{-19}}$$

dove P_{th} è la sua potenza termica. Assumendo $P_{th} \approx 3\,GW$, ne segue che, nell'intero angolo solido, vengono emessi dell'ordine di $\frac{6 \times 3 \cdot 10^9}{3.2 \cdot 10^{-11}} = 5.6 \cdot 10^{20}$ antineutrini per secondo.
A una distanza di 20 m dal reattore, il loro flusso F_ν vale quindi

$$F_\nu = \frac{5.6 \cdot 10^{20}}{4\pi(2000)^2} \approx 1.1 \cdot 10^{13}\,\bar{\nu}/(cm^2 \cdot s)$$

Reines e Cowan osservarono che la differenza di conteggi "reattore on" - "reattore off" era di 3 ± 0.2 conteggi all'ora.
Da questo numero di conteggi essi estrassero[254] una sezione d'urto totale pari a

$$\sigma(\bar{\nu} + p \rightarrow e^+ + n)_{exp} = 12^{+7}_{-4} \cdot 10^{-44}\ cm^2 \tag{4.301}$$

da confrontare con un valore atteso (ricavato a partire dalla teoria originale di Fermi, prima della scoperta della violazione di parità) di

$$\sigma(\bar{\nu} + p \rightarrow e^+ + n)_{th} = (5 \pm 1) \cdot 10^{-44}\ cm^2 \tag{4.302}$$

[254]Il modo per estrarre il valore della sezione d'urto totale del processo si basa sul fatto che il rate di eventi di scattering che si producono è dato, in generale, dall'espressione

$$n = I\, \sigma\, N$$

dove I misura il flusso delle particelle incidenti (gli antineutrini, nel nostro caso) ed N rappresenta il numero di particelle bersaglio (protoni, nel caso studiato).
Abbiamo detto che venivano osservati sperimentalmente $n \approx 3\, eventi/ora = 0.8 \times 10^{-3}\, ev/s$ mentre abbiamo prima valutato che il flusso degli antineutrini valeva $I = 1.1 \times 10^{13}\, \bar{\nu}/(cm^2\, s)$.
Quanto al numero di protoni bersaglio, essendo esso costituito da $200\, l$ di acqua, esso valeva

$$N = 200 \times 1000 \times \frac{2}{18} \times 6.0 \cdot 10^{23} \approx 1.3 \cdot 10^{28}$$

per cui ne segue che

$$\sigma = \frac{n}{I \times N} = \frac{0.8 \cdot 10^{-3}}{1.1 \cdot 10^{13} \times 1.3 \cdot 10^{28}} \approx 0.5 \cdot 10^{-44}\ cm^2 \tag{4.300}$$

Questo risultato non coincide con il valore di sezione d'urto a cui giunsero Cowan e Reines perchè non abbiamo tenuto conto né dell'accettanza effettiva dell'esperimento né dell'efficienza di rivelare l'evento stesso. Queste due quantità hanno entrambe l'effetto di aumentare il valore della sezione d'urto calcolato in quanto l'accettanza A diminuisce il numero di centri bersaglio mentre l'efficienza ϵ stabilisce che il numero di eventi effettivamente realizzati è maggiore di quello osservato, i.e.

$$\sigma = \frac{n/\epsilon}{I \times N \cdot A}$$

L'effetto combinato delle due quantità conduce dal valore (4.300) a quanto essi valutarono, i.e. alla (4.301) ...

Procediamo adesso al calcolo esplicito di questa sezione d'urto.
Tratteremo per questo la reazione di scattering quasi-elastico

$$\bar{\nu} + p \to e^+ + n \tag{4.303}$$

nell'assunzione che sia il protone come il neutrone possano essere considerati come particelle di Dirac senza struttura interna.
Data la bassa energia[255] del neutrino e quindi il basso momento trasferito, la teoria di Fermi è ampiamente sufficiente per descrivere il processo in questione.
Nell'ambito della teoria di Fermi (corretta per la violazione di parità), il termine della Lagrangiana di interazione che descrive il processo di scattering (4.303) è il seguente

$$\mathcal{L}_F(x) = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \left(J^{\mu}_{(had)}(x)\, J^{\dagger(lept)}_{\mu}(x) + J^{\mu\dagger}_{(had)}(x)\, J^{(lept)}_{\mu}(x) \right) \tag{4.304}$$

dove, con ovvio significato di simboli, si è posto

$$J^{(lept)}_{\mu}(x) = \overline{\psi}_{\nu}(x)\, \gamma_{\mu}\, (1-\gamma_5)\, \psi_l(x) \quad \leftrightarrow \quad J^{\dagger(lept)}_{\mu}(x) = \overline{\psi}_l(x)\, \gamma_{\mu}\, (1-\gamma_5)\, \psi_{\nu}(x)$$

mentre per la parte adronica, nell'assunzione che si possano appunto trattare sia il protone che il neutrone come particelle di Dirac senza struttura, analogamente abbiamo

$$J^{\mu}_{(had)}(x) = \overline{\psi}_p(x)\, \gamma^{\mu}\, (1-\gamma_5)\, \psi_n(x) \quad \leftrightarrow \quad J^{\mu\dagger}_{(had)}(x) = \overline{\psi}_n(x)\, \gamma^{\mu}\, (1-\gamma_5)\, \psi_p(x)$$

La sezione d'urto in un generico processo quasi-elastico, come si è visto precedentemente, nell'ipotesi di non osservare gli stati di spin, è data dalla relazione

$$d\sigma = \frac{1}{(2S_1+1)(2S_2+1)}\, \frac{1}{\mathcal{F}}\, \overline{|\mathcal{M}|^2}\, d\Phi \tag{4.305}$$

dove

- S_i sono gli spin delle particelle presenti nello stato iniziale;
- $\mathcal{F}$ è il termine di flusso, legato alla massa invariante $\sqrt{s}$ del sistema ed alle due masse delle particelle nello stato iniziale $M_A \equiv m_\nu$ e $M_B \equiv M_p$ dalla ben nota relazione

$$\mathcal{F} = 2\sqrt{(s - m_\nu^2 - M_p)^2 - 4 m_\nu^2 M_p^2} \tag{4.306}$$

che, nel nostro caso in cui la massa dell'anti-neutrino viene considerata nulla, risulta

$$\mathcal{F} \to 2(s - M_p^2) \tag{4.307}$$

[255] Il limite di applicabilità della teoria di Fermi, come è noto, si raggiunge quando il momento trasferito della reazione diventa confrontabile con la massa del bosone W.

- $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ è la somma sugli stati di spin iniziali e finali dei moduli quadri degli elementi di matrice invarianti della reazione;

- $d\Phi$ è lo spazio delle fasi invariante che, come ben sappiamo, nel sistema del CM, è dato da

$$\begin{aligned} d\Phi &= \frac{1}{16\pi^2}\frac{\sqrt{(s-M_C^2-M_D^2)^2-4M_C^2M_D^2}}{2s}\,d\Omega_{CM} = \\ &= \frac{1}{8\pi}\frac{\sqrt{(s-M_n^2-m_e^2)^2-4M_n^2m_e^2}}{2s}\;d(-cos\theta) \end{aligned} \tag{4.308}$$

essendo $\theta \equiv \theta_{CM}$ l'angolo (nel CM) fra la direzione dell'antineutrino incidente e quella del positrone uscente e avendo integrato sull'angolo azimutale.

Tenendo quindi conto che di stati di elicità per l'antineutrino assumiamo che ne esista uno solo possibile, abbiamo

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{1}{2}\frac{1}{2(s-M_p^2)}\overline{|\mathcal{M}|^2}\,\frac{1}{8\pi}\frac{\sqrt{(s-M_n^2-m_e^2)^2-4M_n^2m_e^2}}{2s}\;d(-cos\theta) = \\ &= \frac{1}{64\pi}\frac{1}{s(s-M_p^2)}\overline{|\mathcal{M}|^2}\,\sqrt{(s-M_n^2-m_e^2)^2-4M_n^2m_e^2}\;d(-cos\theta) \end{aligned} \tag{4.309}$$

ovvero, indicando al solito con a e b, rispettivamente, i moduli degli impulsi nel CM delle due particelle nello stato iniziale e finale, poiché

$$a = \frac{\sqrt{(s-M_A^2-M_B^2)^2-4M_A^2M_B^2}}{2\sqrt{s}} \to \frac{s-M_p^2}{2\sqrt{s}} \tag{4.310}$$

$$b = \frac{\sqrt{(s-M_C^2-M_D^2)^2-4M_C^2M_D^2}}{2\sqrt{s}} \to \frac{\sqrt{(s-M_n^2-m_e^2)^2-4M_n^2m_e^2}}{2\sqrt{s}} \tag{4.311}$$

risulta, come abbiamo già visto trattando la misura dello spin del pione attraverso il metodo del bilancio dettagliato, che

$$d\sigma = \frac{1}{64\pi\, s}\,\frac{b}{a}\,\overline{|\mathcal{M}|^2}\;d(-cos\theta) \tag{4.312}$$

Passiamo dunque a valutare $\overline{|\mathcal{M}|^2}$, i.e. la somma dei moduli quadri degli elementi di matrice invarianti, effettuata su tutti gli stati di spin delle particelle presenti nello stato iniziale e finale.
Assumiamo dunque di formalizzare la reazione nel modo seguente

$$\bar\nu(Q,b) + p(P,r) \to e^+(q,a) + n(p,s) \tag{4.313}$$

ovvero indichiamo, rispettivamente, con $(p,s),(P,r)$ il quadrimpulso e lo spin per il neutrone ed il protone, e con $(q,a),(Q,b)$ quelli del positrone e dell'antineutrino. Al primo ordine perturbativo, come sappiamo, risulta

$$\mathcal{M} \;=\; < out|\mathcal{L}(0)|in > \tag{4.314}$$

ovvero, poiché l'unico termine della lagrangiana in grado di fornire un contributo non nullo alla (4.314) è solo il secondo termine che compare nella (4.304), ecco che, con ovvio significato dei simboli, esplicitamente risulta[256]

$$\mathcal{M} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}}\left[\bar{u}_n^{(s)}(p)\,\gamma^\mu(1-\gamma_5)\,u_p^{(r)}(P)\right]\cdot\left[\bar{v}_\nu^{(b)}(Q)\,\gamma_\mu(1-\gamma_5)\,v_e^{(a)}(q)\right] \tag{4.328}$$

[256]Abbiamo infatti, dalla definizione, che

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= -\frac{G_F}{\sqrt{2}} < n(p,s); e^+(q,a)|\bar{\psi}_n(0)\,\gamma^\mu(1-\gamma_5)\psi_p(0)\,\cdot\\ &\quad\cdot\,\bar{\psi}_\nu(0)\,\gamma_\mu(1-\gamma_5)\psi_e(0)|\bar{\nu}(Q,b); p(P,r)>\equiv\\ &= -\frac{G_F}{\sqrt{2}} < n(p,s); e^+(q,a)|\bar{n}(0)\,\gamma^\mu(1-\gamma_5)p(0)\,\cdot\\ &\quad\cdot\,\bar{\nu}(0)\,\gamma_\mu(1-\gamma_5)e(0)|\bar{\nu}(Q,b); p(P,r)>\end{aligned} \tag{4.315}$$

dove abbiamo usato il nome delle particelle per indicare il campo che le descrive.
Facendo intervenire adesso gli operatori di creazione/distruzione relativi agli stati delle particelle presenti in $|in>$ e $|out>$, abbiamo che

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= -\frac{G_F}{\sqrt{2}} < \Omega|a_n^{(s)}(p)\,b_e^{(a)}(q)\,\bar{n}(0)\,\gamma^\mu(1-\gamma_5)\,p(0)\;\cdot\\ &\quad\cdot\;\bar{\nu}(0)\,\gamma_\mu(1-\gamma_5)\,e(0)\;b_\nu^{\dagger(b)}(Q)\,a_p^{\dagger(r)}(P)|\Omega>\end{aligned} \tag{4.316}$$

Ma gli operatori così introdotti, possono essere "spostati" liberamente all'interno del prodotto operatoriale di cui sopra fino a quando alla loro destra (se operatori di annichilazione) o alla loro sinistra (se operatori di creazione) si trova proprio il campo a cui questi si riferiscono, con cui, naturalmente, essi non commutano. Otteniamo dunque

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= -\frac{G_F}{\sqrt{2}} < \Omega|a_n^{(s)}(p)\,\bar{n}(0)\,\gamma^\mu(1-\gamma_5)\,p(0)\;a_p^{\dagger(r)}(P)\,\cdot\\ &\quad\cdot\;\bar{\nu}(0)\,b_\nu^{\dagger(b)}(Q)\,\gamma_\mu(1-\gamma_5)\,b_e^{(a)}(q)\,e(0)|\Omega>\end{aligned} \tag{4.317}$$

In questo modo abbiano riordinato l'espressione operatoriale di cui occorre valutare il valor medio sullo stato di vuoto, disponendo gli operatori di creazione/distruzione relativi agli stati $|in>$ e $|out>$ a fianco dei campi a cui essi si riferiscono.
Consideriamo adesso, per un generico campo di Dirac ψ, il seguente operatore $a^{(s)}(p)\bar{\psi}(0)$. Poiché il campo deve essere valutato in $x=0$, gli esponenziali che descrivono l'onda piana coincidono semplicemente con l'unità, per cui abbiamo

$$
\begin{aligned}
a^{(s)}(p)\bar{\psi}(0) &= a^{(s)}(p)\sum_j\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3\,2E_q}\left[b^{(j)}(q)\bar{v}^{(j)}(q)+a^{\dagger(j)}(q)\bar{u}^{(j)}(q)\right]=\\
&= -\sum_j\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3\,2E_q}\left[b^{(j)}(q)\bar{v}^{(j)}(q)+a^{\dagger(j)}(q)\bar{u}^{(j)}(q)\right]a^{(s)}(p)+\\
&+ \sum_j\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3\,2E_q}(2\pi)^3\delta_{js}2E_q\delta(\vec{p}-\vec{q})\,\bar{u}^{(j)}(q)=\\
&= -\bar{\psi}(0)\,a^{(s)}(p)+\bar{u}^{(s)}(p) \qquad (4.318)
\end{aligned}
$$

In modo del tutto simile si ottiene poi che

$$
\begin{aligned}
b^{(s)}(p)\,\psi(0) &= -\psi(0)\,b^{(s)}(p)+v^{(s)}(p) \qquad (4.319)\\
\psi(0)\,a^{\dagger(s)}(p) &= -\psi(0)\,a^{\dagger(s)}(p)+u^{(s)}(p) \qquad (4.320)\\
\bar{\psi}(0)\,b^{\dagger(s)}(p) &= -b^{\dagger(s)}(p)\,\bar{\psi}(0)+\bar{v}^{(s)}(p) \qquad (4.321)
\end{aligned}
$$

Consideriamo ora i nuovi termini che hanno l'operatore di distruzione a oppure b (che indicheremo genericamente con d ...) a destra del campo di riferimento. L'espressione a cui danno luogo è dunque del tipo seguente (con A e B operatori opportuni ...)

$$
<\Omega|A\cdot d^{(s)}(p)\cdot B|\Omega> \qquad (4.322)
$$

dove l'operatore di distruzione d commuta con l'operatore B che, per quanto sopra, può riferirsi solo ad altre particelle diverse da quella a cui si riferisce d stesso. Dunque

$$
<\Omega|A\cdot d^{(s)}(p)\cdot B|\Omega>=<\Omega|A\cdot B\cdot d^{(s)}(p)|\Omega>=0 \qquad (4.323)
$$

Per quanto riguardo gli operatori di creazione, indicati genericamente con $c^\dagger$ senza precisare, quindi, se si riferiscono alla particella o all'antiparticella, accade qualcosa di simile.
Essi danno luogo a termini del tipo

$$
<\Omega|A\cdot c^{\dagger\,(s)}(p)\cdot B|\Omega> \qquad (4.324)
$$

e commutano con l'operatore alla loro sinistra, per cui si ottiene ancora

$$
<\Omega|A\cdot c^{\dagger\,(s)}(p)\cdot B|\Omega>=<\Omega|c^{\dagger\,(s)}(p)\cdot A\cdot B|\Omega>=0 \qquad (4.325)
$$

In conclusione, abbiamo

$$
\mathcal{M}=-\frac{G_F}{\sqrt{2}}\left[\bar{u}_n^{(s)}(p)\,\gamma^\mu(1-\gamma_5)\,u_p^{(r)}(P)\right]\cdot\left[\bar{v}_\nu^{(b)}(Q)\,\gamma_\mu(1-\gamma_5)\,v_e^{(a)}(q)\right] \qquad (4.326)
$$

che prova la validità della (4.328).
E' interessante adesso confrontare quanto ottenuto con la densità lagrangiana $\mathcal{L}(0)$ associata al processo studiato

$$
\mathcal{L}(0)=-\frac{G_F}{\sqrt{2}}\,\bar{\psi}_n(0)\,\gamma^\mu(1-\gamma_5)\psi_p(0)\cdot\bar{\psi}_\nu(0)\,\gamma_\mu(1-\gamma_5)\psi_e(0) \qquad (4.327)
$$

Possiamo renderci così conto come la struttura dell'elemento di matrice $\mathcal{M}$ rifletta perfettamente quello della densità lagrangiana $\mathcal{L}(0)$, con la regola per cui e quindi che (si ricordi che ciascun termine in parentesi quadra è un c-numero)

$$\begin{aligned}
\overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{G_F^2}{2} \sum_{a,\,b\,,r\,,s} \left[\bar{u}_n^{(s)}(p)\,\gamma^\alpha(1-\gamma_5)\,u_p^{(r)}(P)\right] \cdot \left[\bar{v}_\nu^{(b)}(Q)\,\gamma_\alpha(1-\gamma_5)\,v_e^{(a)}(q)\right] \\
&\times \left[\bar{u}_n^{(s)}(p)\,\gamma^\beta(1-\gamma_5)\,u_p^{(r)}(P)\right]^* \cdot \left[\bar{v}_\nu^{(b)}(Q)\,\gamma_\beta(1-\gamma_5)\,v_e^{(a)}(q)\right]^* \equiv \\
&\equiv \frac{G_F^2}{2}\, L_{\alpha\beta}\, W^{\alpha\beta} \qquad (4.329)
\end{aligned}$$

dove abbiamo definito i due tensori leptonico $L_{\alpha\beta}$ e adronico $W^{\alpha\beta}$ nel modo seguente

$$L_{\alpha\beta} \equiv \sum_{a,\,b} \left[\bar{v}_\nu^{(b)}(Q)\,\gamma_\alpha(1-\gamma_5)\,v_e^{(a)}(q)\right] \cdot \left[\bar{v}_\nu^{(b)}(Q)\,\gamma_\beta(1-\gamma_5)\,v_e^{(a)}(q)\right]^* \qquad (4.330)$$

$$W^{\alpha\beta} \equiv \sum_{r\,,s} \left[\bar{u}_n^{(s)}(p)\,\gamma^\alpha(1-\gamma_5)\,u_p^{(r)}(P)\right] \left[\bar{u}_n^{(s)}(p)\,\gamma^\beta(1-\gamma_5)\,u_p^{(r)}(P)\right]^* \qquad (4.331)$$

Iniziamo calcolando il tensore leptonico $L_{\alpha\beta}$.
Siccome, come si è già osservato, ogni quantità entro parentesi quadra nella (4.330) è un c-numero, ne segue che ciascuna di queste quantità complesse può essere vista anche come l'unico elemento di una matrice 1×1, e dunque essa coinciderà con la traccia della matrice stessa.
Quanto poi alla coniugazione complessa di una tale quantità, essa può anche essere vista come la coniugazione hermitiana della matrice 1×1 corrispondente, per cui possiamo scrivere, in definitiva, che

$$\begin{aligned}
L_{\alpha\beta} &\equiv Tr\left\{\sum_{a,\,b} \left[\bar{v}_\nu^{(b)}(Q)\,\gamma_\alpha(1-\gamma_5)\,v_e^{(a)}(q)\right] \cdot \left[\bar{v}_\nu^{(b)}(Q)\,\gamma_\beta(1-\gamma_5)\,v_e^{(a)}(q)\right]^\dagger\right\} = \\
&= Tr\left\{\sum_{a,\,b} \bar{v}_\nu^{(b)}(Q)\,\gamma_\alpha(1-\gamma_5)\,v_e^{(a)}(q) \cdot v_e^{\dagger(a)}(q)\,(1-\gamma_5^\dagger)\,\gamma_\beta^\dagger\,\bar{v}_\nu^{\dagger(b)}(Q)\right\} \qquad (4.332)
\end{aligned}$$

ma, come ben sappiamo

$$\bar{v} = v^\dagger\gamma^0;\;\; (\gamma^0)^2 = I;\;\; \gamma^0\gamma_\mu^\dagger\gamma^0 = \gamma_\mu;\;\; \gamma^0 = (\gamma^0)^\dagger;\;\; (\bar{v})^\dagger = \gamma^0\, v$$
$$\gamma^0\gamma_5 = -\gamma_5\gamma^0;\;\; \gamma_5^\dagger = \gamma_5$$

- là dove in $\mathcal{L}(0)$ ci sono i campi, in $\mathcal{M}$ vanno gli spinori;
- là dove in $\mathcal{L}(0)$ ci sono i campi barrati, in $\mathcal{M}$ vanno gli spinori barrati;
- se nel processo considerato il campo o il suo barrato descrivono particelle, vanno, rispettivamente, gli spinori u o $\bar{u}$;
- se nel processo considerato il campo o il suo barrato descrivono antiparticelle, vanno, rispettivamente, gli spinori v o $\bar{v}$.

per cui, sostituendo, si ha

$$L_{\alpha\beta} = Tr\left\{\sum_{a,b} \bar{v}_\nu^{(b)}(Q)\,\gamma_\alpha(1-\gamma_5)\,v_e^{(a)}(q)\cdot\bar{v}_e^{(a)}(q)\,(1+\gamma_5)\,\gamma_\beta\,v_\nu^{(b)}(Q)\right\} \tag{4.333}$$

e quindi, usando la proprietà della traccia per cui $Tr(AB..CD) = Tr(DAB...C)$, otteniamo[257]

$$\begin{aligned}
L_{\alpha\beta} &= Tr\left\{\left(\sum_b v_\nu^{(b)}(Q)\bar{v}_\nu^{(b)}(Q)\right)\gamma_\alpha(1-\gamma_5)\left(\sum_a v_e^{(a)}(q)\bar{v}_e^{(a)}(q)\right)(1+\gamma_5)\,\gamma_\beta\right\} = \\
&= Tr\left\{(\not{Q}-m_\nu)\,\gamma_\alpha(1-\gamma_5)\,(\not{q}-m_e)\,(1+\gamma_5)\,\gamma_\beta\right\} = \\
&= Tr\left\{\not{Q}\,\gamma_\alpha(1-\gamma_5)\,\not{q}(1+\gamma_5)\,\gamma_\beta - m_\nu\,\gamma_\alpha(1-\gamma_5)\,\not{q}(1+\gamma_5)\,\gamma_\beta - \right. \\
&- \left. m_e\,\not{Q}\,\gamma_\alpha(1-\gamma_5)\,(1+\gamma_5)\,\gamma_\beta + m_\nu\,m_e\,\gamma_\alpha(1-\gamma_5)\,(1+\gamma_5)\,\gamma_\beta\right\}
\end{aligned} \tag{4.334}$$

Gli ultimi due contributi sono evidentemente nulli, dato che $(1+\gamma_5)(1-\gamma_5) = 0$. Anche il secondo termine della somma, proporzionale a m_ν, è nullo e non solo perché abbiamo assunto $m_\nu = 0$, infatti risulta

$$\begin{aligned}
&Tr\left\{\gamma_\alpha(1-\gamma_5)\,\not{q}(1+\gamma_5)\,\gamma_\beta\right\} = Tr\left\{\gamma_\alpha(1-\gamma_5)\,(1-\gamma_5)\,\not{q}\gamma_\beta\right\} = \\
&\quad = 2\,Tr\left\{\gamma_\alpha(1-\gamma_5)\,\not{q}\gamma_\beta\right\} = 2\,Tr\left\{\gamma_\alpha\,\not{q}\gamma_\beta - \gamma_\alpha\,\gamma_5\,\not{q}\gamma_\beta\right\}
\end{aligned} \tag{4.335}$$

e la traccia del prodotto di un numero dispari di γ^μ è nulla.
Dunque, in definiva, abbiamo

$$\begin{aligned}
L_{\alpha\beta} &= Tr\left\{\not{Q}\,\gamma_\alpha(1-\gamma_5)\,\not{q}(1+\gamma_5)\,\gamma_\beta\right\} = \\
&= Tr\left\{\not{Q}\,\gamma_\alpha(1-\gamma_5)\,(1-\gamma_5)\,\not{q}\gamma_\beta\right\} = \\
&= 2\,Tr\left\{\not{Q}\,\gamma_\alpha(1-\gamma_5)\,\not{q}\gamma_\beta\right\} = \\
&= 2\,Tr\left\{\not{Q}\,\gamma_\alpha\,\not{q}\gamma_\beta\right\} - 2\,Tr\left\{\not{Q}\,\gamma_\alpha\gamma_5\,\not{q}\gamma_\beta\right\} = \\
&= 2\,Q^\sigma q^\tau\,Tr\left\{\gamma_\sigma\gamma_\alpha\,\gamma_\tau\,\gamma_\beta\right\} - 2\,Q^\sigma q^\tau\,Tr\left\{\gamma_\sigma\gamma_\alpha\,\gamma_5\,\gamma_\tau\,\gamma_\beta\right\}
\end{aligned} \tag{4.336}$$

ma, come è dimostrato in Appendice, risulta

$$Tr\left\{\gamma_\sigma\gamma_\alpha\,\gamma_\tau\,\gamma_\beta\right\} = 4\,(\delta_{\sigma\alpha}\delta_{\tau\beta} + \delta_{\sigma\beta}\delta_{\alpha\tau} - \delta_{\sigma\tau}\delta_{\alpha\beta}) \tag{4.337}$$

$$Tr\left\{\gamma_\sigma\gamma_\alpha\,\gamma_5\,\gamma_\tau\,\gamma_\beta\right\} = Tr\left\{\gamma_\sigma\gamma_\alpha\,\gamma_\tau\,\gamma_\beta\,\gamma_5\right\} = 4i\,\epsilon_{\sigma\alpha\tau\beta} \tag{4.338}$$

per cui, in definitiva, abbiamo $(\epsilon_{\sigma\alpha\tau\beta} = -\,\epsilon_{\alpha\beta\sigma\tau})$

$$L_{\alpha\beta} = 8\left[Q_\alpha\,q_\beta + Q_\beta\,q_\alpha - (Q\cdot q)\delta_{\alpha\beta} + i\,\epsilon_{\alpha\beta\sigma\tau}\,Q^\sigma\,q^\tau\right] \tag{4.339}$$

dove Q è il quadrimpulso dell'antineutrino mentre q è quello del positrone.

[257] Si ricordi che, in generale, per spinori di Dirac, risulta $\sum_r v^{(r)}(p)\,\bar{v}^{(r)}(p) = \not{p} - m$ mentre, $\sum_r u^{(r)}(p)\,\bar{u}^{(r)}(p) = \not{p} + m$.

Veniamo adesso al tensore adronico e procediamo nel solito modo: si ha

$$\begin{aligned}
W^{\alpha\beta} &= \sum_{r,s} \left[\bar{u}_n^{(s)}(p)\,\gamma^\alpha(1-\gamma_5)\,u_p^{(r)}(P)\right]\cdot\left[\bar{u}_n^{(s)}(p)\,\gamma^\beta(1-\gamma_5)\,u_p^{(r)}(P)\right]^* = \\
&= \sum_{r,s} Tr\left\{\left[\bar{u}_n^{(s)}(p)\,\gamma^\alpha(1-\gamma_5)\,u_p^{(r)}(P)\right]\cdot\left[\bar{u}_p^{(r)}(P)\,(1+\gamma_5)\,\gamma^\beta\,u_n^{(s)}(p)\right]\right\} = \\
&= Tr\left\{\left(\sum_s u_n^{(s)}(p)\bar{u}_n^{(s)}(p)\right)\gamma^\alpha(1-\gamma_5)\,\left(\sum_r u_p^{(r)}(P)\,\bar{u}_p^{(r)}(P)\right)(1+\gamma_5)\,\gamma^\beta\right\} = \\
&= Tr\left\{(\not p + M_n)\gamma^\alpha(1-\gamma_5)\,(\not P + M_p)(1+\gamma_5)\,\gamma^\beta\right\} \qquad (4.340)
\end{aligned}$$

da cui, confrontando con quanto ottenuto per il tensore leptonico, si ottiene immediatamente[258]

$$W^{\alpha\beta} = 8\left[p^\alpha\,P^\beta + p^\beta\,P^\alpha - (p\cdot P)\delta^{\alpha\beta} + i\,\epsilon^{\alpha\beta\eta\rho}\,p_\eta\,P_\rho\right] \qquad (4.343)$$

dove P è il quadrimpulso del protone e p quello del neutrone.
Sia nel caso del tensore leptonico che in quello del tensore adronico, abbiamo che la parte reale è simmetrica mentre la parte immaginaria risulta antisimmetrica: evidentemente, nella contrazione dei due tensori, le due parte reali si contrarranno fra loro e così pure le due parte immaginarie, ma non potranno esserci[259] termini misti.
Osserviamo altresì che i tensori così ottenuti <u>non</u> contengono termini proporzionali alle masse delle particelle coinvolte, ma dipendono solo dai loro quadrimpulsi.
Risulta

$$\begin{aligned}
\overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{G_F^2}{2}\,L_{\alpha\beta}\,W^{\alpha\beta} = \frac{G_F^2}{2}\,64\,\left[Q_\alpha\,q_\beta + Q_\beta\,q_\alpha - (Q\cdot q)\delta_{\alpha\beta} + i\,\epsilon_{\alpha\beta\sigma\tau}\,Q^\sigma\,q^\tau\right]\cdot \\
&\cdot\ \left[p^\alpha\,P^\beta + p^\beta\,P^\alpha - (p\cdot P)\delta^{\alpha\beta} + i\,\epsilon^{\alpha\beta\eta\rho}\,p_\eta\,P_\rho\right] = \\
&= 32\,G_F^2\left[(Qp)(qP) + (QP)(qp) - (pP)(qQ) + \right.\\
&+\ (QP)(qp) + (Qp)(qP) - (pP)(qQ) - \\
&-\ \left.(Qq)(pP) - (Qq)(pP) + 4(pP)(qQ) - \epsilon_{\alpha\beta\sigma\tau}\,\epsilon^{\alpha\beta\eta\rho}\,p_\eta\,P_\rho\,Q^\sigma\,q^\tau\right] \qquad (4.344)
\end{aligned}$$

Tenendo conto che

$$\epsilon_{\alpha\beta\sigma\tau}\ \epsilon^{\alpha\beta\eta\rho} = -2\,(\,\delta_\sigma^\eta\ \delta_\tau^\rho\ -\ \delta_\tau^\eta\ \delta_\sigma^\rho\,) \qquad (4.345)$$

---

[258]Forse non è inutile ricordare che risulta altresì

$$\begin{aligned}
Tr\left\{\gamma^\sigma\gamma^\alpha\,\gamma^\tau\,\gamma^\beta\right\} &= 4\,\left[\delta^{\sigma\alpha}\delta^{\tau\beta} + \delta^{\sigma\beta}\delta^{\alpha\tau} - \delta^{\sigma\tau}\delta^{\alpha\beta}\right] \qquad (4.341)\\
Tr\left\{\gamma^\sigma\gamma^\alpha\,\gamma^\tau\,\gamma^\beta\,\gamma_5\right\} &= 4i\,\epsilon^{\sigma\alpha\tau\beta} \qquad (4.342)
\end{aligned}$$

e che $\epsilon_{0123} = +1 = -\epsilon^{0123}$.

[259]Termini misti sarebbero immaginari e si vede male come questi potrebbero esistere in un modulo quadro ... !

abbiamo quindi

$$\begin{aligned}\overline{|\mathcal{M}|^2} &= 32\,G_F^2\,[2(Qp)(qP)+2(QP)(qp)+2\,p_\eta\,P_\rho\,Q^\sigma\,q^\tau\,(\delta^\eta_\sigma\,\delta^\rho_\tau\;-\;\delta^\eta_\tau\,\delta^\rho_\sigma)] = \\ &= 32\,G_F^2\,[2(Qp)(qP)+2(QP)(qp)+2(Qp)(qP)-2(QP)(qp)] = \\ &= 128\,G_F^2(pQ)(qP) \qquad (4.346)\end{aligned}$$

Sostituendo dunque la (4.346) nell'espressione della sezione d'urto differenziale

$$\begin{aligned}d\sigma &= \frac{1}{64\pi\,s}\,\frac{\sqrt{(s-M_n^2-m_e^2)^2-4M_n^2m_e^2}}{s-M_p^2}\,\overline{|\mathcal{M}|^2}\;(-d\,cos\theta) = \\ &= \frac{1}{64\pi\,s}\,\frac{b}{a}\,\overline{|\mathcal{M}|^2}\;d(-cos\theta) \qquad (4.347)\end{aligned}$$

abbiamo quindi

$$d\sigma = \frac{G_F^2}{2\pi\,s}\,\frac{b}{a}\,(2pQ)(2Pq)\;d(-cos\theta) \qquad (4.348)$$

Per questo tipo di processo, però, è più utile usare, al posto della variabile $cos\theta \equiv cos\theta_{CM}$, la variabile[260] y che abbiamo introdotto attraverso la (4.248) e per la quale abbiamo dimostrato che, ad s fissato, risulta

$$d(-cos\theta) = \frac{1}{\mathcal{B}}\,dy; \qquad \mathcal{A}-\mathcal{B} \le y \le \mathcal{A}+\mathcal{B} \qquad (4.351)$$

essendo, nel caso presente

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= 1-\frac{(s+m_e^2-M_n^2)(s+M_p^2-m_\nu^2)}{2s(s-M_p^2-m_\nu^2)} = \\ &\to 1-\frac{(s+m_e^2-M_n^2)(s+M_p^2)}{2s(s-M_p^2)} \qquad (4.352)\\ \mathcal{B} &= \frac{\sqrt{(s-M_n^2-m_e^2)^2-4M_n^2m_e^2}\sqrt{(s-M_p^2-m_\nu^2)^2-4M_p^2m_\nu^2}}{2s(s-M_p^2-m_\nu^2)} = \\ &= \frac{2\,ab}{s-M_p^2-m_\nu^2} \to \frac{2ab}{s-M_p^2} \qquad (4.353)\end{aligned}$$

[260] Secondo la definizione, la variabile y, che è scalare sotto il gruppo di Lorentz, come si è già visto, essa risulta espressa dalla equazione

$$y = \frac{P(Q-q)}{PQ} \qquad (4.349)$$

Nel riferimento del Laboratorio, dove il protone può essere considerato fermo, essa vale dunque

$$y = \frac{M_p(E_\nu-E_e)}{M_pE_\nu} = \frac{E_\nu-E_e}{E_\nu} \qquad (4.350)$$

ovvero essa rappresenta proprio la frazione di energia leptonica che viene trasferita al sistema adronico, calcolata nel riferimento in cui l'adrone che subisce l'urto è inizialmente in quiete.

dove a e b sono dati dalle (4.310) e (4.311) e le semplificazioni dipendono dal fatto che abbiamo assunto $m_\nu = 0$.
In termini di questa variabile, abbiamo dunque

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{dy} &= \frac{G_F^2}{2\pi\, s}\, \frac{b}{a}\, (2pQ)(2Pq)\, \frac{1}{\mathcal{B}} = \frac{G_F^2}{2\pi\, s}\, \frac{b}{a}\, \frac{s - M_p^2}{2\, ab}\, (2pQ)(2Pq) = \\
&= \frac{G_F^2}{4\pi\, s}\, \frac{s - M_p^2}{a^2} (2pQ)(2Pq) = \frac{G_F^2}{4\pi\, s}\, \frac{s - M_p^2}{(s - M_p^2)^2}\, 4s\, (2pQ)(2Pq) = \\
&= \frac{G_F^2}{\pi}\, \frac{1}{(s - M_p^2)}\, (2pQ)(2Pq) \qquad (4.354)
\end{aligned}$$

D'altronde

$$y = \frac{2(PQ) - 2(Pq)}{2(PQ)} = 1 - \frac{2(Pq)}{2(PQ)} \quad \Rightarrow \quad 2(Pq) = 2(PQ)(1 - y) \qquad (4.355)$$

ma

$$s = (P + Q)^2 = 2(PQ) + M_p^2 \qquad (4.356)$$

e dunque

$$2(Pq) = (s - M_p^2)(1 - y) \qquad (4.357)$$

per cui abbiamo infine

$$\frac{d\sigma}{dy} = \frac{G_F^2}{\pi}\, (1 - y)\, (2pQ) \qquad (4.358)$$

Fino a questo punto non abbiamo fatto approssimazioni, se non quella di considerare neutrone e protone come particelle di Dirac senza struttura interna ed assumere massa nulla per il neutrino. D'altronde

$$\begin{aligned}
& P + Q = p + q \quad \Rightarrow \quad P - q = p - Q \quad \Rightarrow \\
& \Rightarrow M_p^2 + m_e^2 - 2(Pq) = M_n^2 - 2(pQ) \quad \Rightarrow \\
& \Rightarrow 2(pQ) = M_n^2 - M_p^2 - m_e^2 + 2(Pq) \qquad (4.359)
\end{aligned}$$

per cui, se confondiamo adesso la massa del protone con quella del neutrone e trascuriamo del tutto la massa dell'elettrone, ecco che $(Pq) = (Qp)$ e dunque risulta

$$\frac{d\sigma}{dy} = \frac{G_F^2}{\pi}\, (1 - y)^2\, (s - M^2) \qquad (4.360)$$

dove M è appunto la massa del nucleone.
Volendo adesso determinare la sezione d'urto totale relativa al processo di scattering in esame, occorre evidentemente integrare la (4.360) fra gli estremi definiti

nella (4.351). D'altronde, nella stessa approssimazione sopra citata in cui si trascurano le masse leptoniche e si confondono fra loro quelle adroniche, risulta

$$\mathcal{A} = 1 - \frac{(s+m_e^2-M_n^2)(s+M_p^2-m_\nu^2)}{2s(s-M_p^2-m_\nu^2)} \quad \rightarrow \quad 1-\frac{s+M^2}{2s} = \frac{s-M^2}{2s} \tag{4.361}$$

$$\mathcal{B} = \frac{\sqrt{(s-M_n^2-m_e^2)^2-4M_n^2m_e^2}}{2s} \quad \rightarrow \quad \frac{s-M^2}{2s} \tag{4.362}$$

e dunque l'integrazione in y va fatta fra $\mathcal{A}-\mathcal{B}=0$ ed $\mathcal{A}+\mathcal{B}=1-\frac{M^2}{s}$.
Ma

$$\begin{aligned}
\int_0^{1-\frac{M^2}{s}} (1-y)^2\, dy = \int_{\frac{M^2}{s}}^1 t^2\, dt = \frac{1}{3}\left[1-\left(\frac{M^2}{s}\right)^3\right] = \\
= \frac{1}{3}\left(1-\frac{M^2}{s}\right)\left[1+\left(\frac{M^2}{s}\right)+\left(\frac{M^2}{s}\right)^2\right] \\
= \frac{s-M^2}{3s}\left[1+\left(\frac{M^2}{s}\right)+\left(\frac{M^2}{s}\right)^2\right]
\end{aligned} \tag{4.363}$$

per cui risulta che

$$\sigma(\bar\nu\, p \rightarrow n\, e^+) = \frac{G_F^2}{\pi}\, \frac{(s-M^2)^2}{3s}\left[1+\left(\frac{M^2}{s}\right)+\left(\frac{M^2}{s}\right)^2\right] \tag{4.364}$$

Nel caso del processo studiato da Cowan e Reines, l'energia E_ν del neutrino (nel sistema del laboratorio) era dell'ordine di alcuni MeV, quindi certamente grande rispetto alla massa dell'elettrone ma molto minore di quella del nucleone.
In questo caso (limite di bassa energia), essendo

$$s = 2E_\nu\, M + M^2 \quad \Rightarrow \quad s - M^2 = 2E_\nu\, M \tag{4.365}$$

risulta

$$\sigma(\bar\nu\, p \rightarrow n\, e^+) = \frac{G_F^2}{\pi}\, \frac{4{E_\nu}^2 M^2}{3s}\left[1+\left(\frac{M^2}{s}\right)+\left(\frac{M^2}{s}\right)^2\right] \approx \frac{G_F^2}{\pi}\, 4\, E_\nu^2 \tag{4.366}$$

dove abbiamo usato il fatto che, in questa approsssimazione $M^2/s \approx 1$.
Numericamente abbiamo

$$\begin{aligned}
\sigma(\bar\nu\, p \rightarrow n\, e^+) &\approx \frac{G_F^2}{\pi}\, 4\, E_\nu^2 \\
&= \frac{(1.166\times 10^{-5})^2}{\pi} \cdot 4\times 10^{-6}\left(\frac{E_\nu}{1\, MeV}\right)^2\, GeV^{-2} = \\
&= 1.73\times 10^{-16}\left(\frac{E_\nu}{1\, MeV}\right)^2\, GeV^{-2}
\end{aligned} \tag{4.367}$$

Volendo esprimere la sezione d'urto totale σ in cm^2, occorre moltiplicare l'espressione precedente per $(\hbar c)^2$: ricordando che

$$\hbar c = 197.327\, MeV \cdot fm = 0.197 \times 10^{-13}\, GeV \cdot cm$$

otteniamo infine

$$\begin{aligned} \sigma(\bar{\nu}\, p \to n\, e^+) &= 1.73 \times 10^{-16} \cdot (0.197 \times 10^{-13})^2 \left(\frac{E_\nu}{1\, MeV}\right)^2 = \\ &= 6.72 \times 10^{-44} \left(\frac{E_\nu}{1\, MeV}\right)^2 \; cm^2 \end{aligned} \tag{4.368}$$

in buon accordo con il valore (4.301) trovato da Cowan e Reines, i.e.

$$\sigma(\bar{\nu} \,+\, p \to e^+ \,+\, n)_{exp} = 12^{+7}_{-4} \cdot 10^{-44} \; cm^2 \tag{4.369}$$

Va comunque detto che, in realtà, nemmeno nel caso dell'urto anelastico a bassa energia, quando la lunghezza d'onda di De Broglie del neutrino è comunque ancora molto maggiore delle dimensioni del nucleone, è lecito trascurarne la struttura interna. L'espressione del tensore $W^{\alpha\beta}$ ha altri contributi oltre a quelli visti in precedenza, e anche quelli legati alla parte vettoriale e assiale della corrente dipendono poi da fattori di forma che sono funzione del momento trasferito (dell'invariante $(Q-q)^2$...).

Poi, nel limite di alta energia ($s >> M^2$), dove l'espressione della sezione d'urto da noi calcolata fornirebbe

$$\sigma(\bar{\nu}\, p \to n\, e^+) \approx \frac{G_F^2}{3\pi}\, s = \frac{G_F^2}{3\pi}\, 2EM \tag{4.370}$$

occorre tenere conto che l'urto avviene sui quarks costituenti (di *valenza* e su quelli virtuali (del *mare*): si parla, in questo caso, di Deep Inelastic Scattering (DIS) e la sua trattazione va oltre gli scopi di questo Corso.

E' utile, adesso, prima di lasciare l'argomento, riprendere la relazione trovata per il modulo quadro dell'elemento di matrice (4.346)

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} \;\; = \;\; 128\, G_F^2 (pQ)(qP) \tag{4.371}$$

relativo al processo (omettiamo, per brevità, le variabili di spin)

$$\bar{\nu}(Q) + p(P) \to e^+(q) + n(p) \tag{4.372}$$

che potremo riscrivere come

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} \;\; = \;\; 128\, G_F^2 (n \cdot \nu)(e \cdot p) \tag{4.373}$$

mettendo così in evidenza il tipo di particella a cui il quadrimpulso si riferisce. Questo risultato, come abbiamo visto, è determinato univocamente dal termine nella densità lagrangiana di interazione che risulta rilevante per la descrizione del processo considerato che, nel caso dello scattering di Cowan e Reines, abbiamo visto essere il seguente:

$$-\frac{G_F}{\sqrt{2}}\left(\bar{\psi}_n(0)\gamma^\mu(1-\gamma_5)\psi_p(0)\right)\left(\bar{\psi}_\nu(0)\gamma_\mu(1-\gamma_5)\psi_e(0)\right) \tag{4.374}$$

E' facile adesso convincersi che, se indichiamo con w gli spinori u o v associati alle varie particelle, per qualunque processo descritto dalla (4.374), la struttura dell'elemento di matrice $\mathcal{M}$ sarà comunque del tipo seguente

$$\mathcal{M} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}}\left(\bar{w}_n\gamma^\mu(1-\gamma_5)w_p\right)\left(\bar{w}_\nu\gamma_\mu(1-\gamma_5)w_e\right) \tag{4.375}$$

dove, per semplicità di notazione, abbiamo omesso sia la dipendenza degli spinori dall'impulso che dallo spin.
Siccome abbiamo visto che, quanto al valore di $\overline{|\mathcal{M}|^2}$, non conta se gli spinori sono di tipo u oppure v perché l'unica differenza che questo comporta è quella relativa ai termini proporzionali alle masse che non entrano nel risultato finale, ecco che possiamo concludere che, per un generico termine di interazione del tipo

$$-\frac{G_F}{\sqrt{2}}\left(\bar{\psi}_A\gamma^\mu(1-\gamma_5)\psi_B\right)\left(\bar{\psi}_C\gamma_\mu(1-\gamma_5)\psi_D\right) \tag{4.376}$$

avremo comunque che

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = 128\, G_F^2\,(AC)\,(BD) \tag{4.377}$$

dove A, B, C, e D sono i quadrimpulsi associati alle particelle corrispondenti.
Poiché l'interazione (4.376) descrive la dinamica[261] di tutti i seguenti processi di scattering/decadimento

$$B + D \;\to\; A + C; \qquad D \to A + C + \bar{B} \tag{4.378}$$
$$\bar{A} + D \;\to\; \bar{B} + C; \qquad B \to A + C + \bar{D} \tag{4.379}$$
$$B + \bar{C} \;\to\; A + \bar{D}; \qquad \bar{A} \to \bar{B} + C + \bar{D} \tag{4.380}$$
$$\bar{A} + \bar{C} \;\to\; \bar{B} + \bar{D}; \qquad \bar{C} \to A + \bar{B} + \bar{D} \tag{4.381}$$

ecco che per tutti questi processi varrà comunque la (4.377).
Si osservi, infine, che il risultato (4.377) continua a valere, per gli stessi motivi

[261] Il processo poi potrà avvenire se sarà possibile soddisfare anche la cinematica, ovvero, se per i processi di scattering siamo sopra soglia, mentre per i processi di decadimento la massa della particella che decade è superiore alla somma delle masse delle particelle a cui il processo dà luogo ...

esposti sopra, anche nel caso di processi coniugati di carica rispetto a quelli di cui alle (4.378)-(4.381) in quanto descritti dal termine di interazione hermitiano coniugato di (4.376), ovvero

$$-\frac{G_F}{\sqrt{2}} \left(\bar{\psi}_B\gamma^\mu(1-\gamma_5)\psi_A\right)\left(\bar{\psi}_D\gamma_\mu(1-\gamma_5)\psi_C\right) \tag{4.382}$$

Queste considerazioni, però, non implicano affatto, per esempio, che le sezioni d'urto dei processi indicati sopra, a s fissato, siano tutte uguali ...
Per rendercene conto, riprendiamo l'espressione (4.354) per la sezione d'urto differenziale di antineutrino su protone $M_n = M_p \equiv M;\ m_e = m_\nu = 0$

$$\left(\frac{d\sigma}{dy}\right)_{\bar{\nu}} = \frac{G_F^2}{\pi}\frac{1}{(s-M^2)}\,(2pQ)(2Pq) \tag{4.383}$$

dove Q, P, q e p sono, rispettivamente, gli impulsi dell'antineutrino, del protone, del positrone e del neutrone.

Consideriamo adesso il processo di scattering di un neutrino sul neutrone e manteniamo i nomi degli impulsi che abbiamo già usato per il processo (4.313), i.e.

$$\nu(Q) + n(p) \to e^-(q) + p(P) \tag{4.384}$$

Poiché l'interazione adesso è descritta dalla densità lagrangiana

$$-\frac{G_F}{\sqrt{2}} \left(\bar{\psi}_p(0)\gamma^\mu(1-\gamma_5)\psi_n(0)\right)\left(\bar{\psi}_e(0)\gamma_\mu(1-\gamma_5)\psi_\nu(0)\right) \tag{4.385}$$

per quanto detto sopra, risulta ancora

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = 128\,G_F^2\,(n\,\nu)\,(e\,p) = 128\,G_F^2\,(pQ)\,(Pq) \tag{4.386}$$

Ne segue dunque che, per quanto riguarda la sezione d'urto differenziale di questo processo, risulta ancora

$$\left(\frac{d\sigma}{dy}\right)_{\nu} = \frac{G_F^2}{\pi}\frac{1}{s-M^2}\,(2pQ)(2qP) \tag{4.387}$$

Però, stavolta, sempre trascurando la differenza di massa protone-neutrone e la massa del neutrino e dell'elettrone, risulta

$$2pQ = s - M^2 = 2qP \tag{4.388}$$

per cui

$$\left(\frac{d\sigma}{dy}\right)_{\nu} = \frac{G_F^2}{\pi}\,(s-M^2) \tag{4.389}$$

che, integrando al solito fra $y = 0$ ed $y = 1 - M^2/s$, conduce a

$$\sigma = \frac{G_F^2}{\pi} \frac{(s - M^2)^2}{s} = \frac{G_F^2}{\pi} \frac{(2EM)^2}{s} \tag{4.390}$$

che, rispetto all'espressione ottenuta per lo scattering di antineutrino, risulta uguale a bassa energia ma tre volte più grande ad alta energia.
A bassa energia la sezione d'urto trovata continua a dipendere dal quadrato dell'energia del neutrino nel sistema del laboratorio (neutrone fermo), mentre per $s >> M^2$ dipende da s e dunque diventa lineare con l'energia del neutrino, questo se il neutrone fosse davvero una particella di Dirac point-like e non fatta di quarks ...

4.6 Applicazione a processi di decadimento

Vediamo adesso come possiamo applicare quanto abbiamo appreso a processi di decadimento che, con quelli di scattering, completano le nostre possibilità di indagine della dinamica delle interazioni fra particelle.

4.6.1 Il decadimento del pione carico

Vogliamo studiare la reazione di decadimento[262]

$$\pi^- \;\rightarrow\; l^- \,+\, \bar{\nu}_l \tag{4.391}$$

dove l^- sta per un generico leptone negativo (può trattarsi solo di e^- o μ^- ... visto che $m_\tau >> m_\pi$!).
Come abbiamo già avuto modo di osservare, esso avviene via interazione debole e precisamente via l'annichilazione dello stato $(d\,\bar{u})$ in un W^- virtuale che decade quindi in un sistema puramente leptonico, come è mostrato in fig.16.

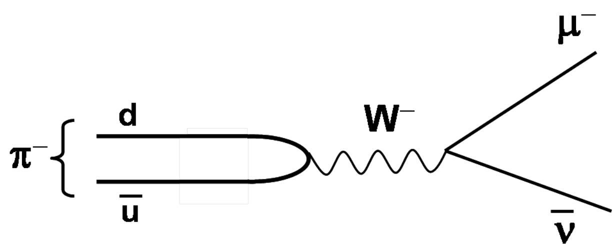


Figure 16: *Decadimento del pione negativo in muone e antineutrino muonico*

Poiché il processo avviene su una scala di energie ($m_\pi \approx 139\,MeV$) molto minore della massa[263] del W, la teoria di Fermi (corretta per la violazione di parità) è perfettamente adeguata a descriverlo e la densità della lagrangiana di interazione corrispondente, come sappiamo, è la seguente

$$\mathcal{L}_W(x) = -\frac{G_F}{\sqrt{2}}\, J^\mu(x)\, J^\dagger_\mu(x) \tag{4.392}$$

[262]Per il decadimento coniugato di carica $\pi^+ \rightarrow l^+\,\nu_l$ valgono ovviamente considerazioni del tutto analoghe.
[263]$M_W \approx 81\,GeV$

dove $J^\mu(x)$ è la somma della corrente adronica e leptonica e, quanto a quest'ultima, come abbiamo già osservato in precedenza, essa risulta data da

$$J^\mu_{lept}(x) = \bar{\psi}_\nu(x)\,\gamma^\mu\,(1-\gamma_5)\,\psi_l(x) \quad \Leftrightarrow \quad J^{\mu\dagger}_{lept}(x) = \bar{\psi}_l(x)\,\gamma^\mu\,(1-\gamma_5)\,\psi_\nu(x) \tag{4.393}$$

essendo poi, nel caso specifico, solo $J^{\mu\dagger}_{lept}$ la corrente che può contribuire al processo considerato.

Ricordiamo che, per quanto visto precedentemente, se prescindiamo dallo stato di spin delle particelle nello stato finale, il rate differenziale di decadimento risulta essere dato dall'espressione generale (4.105)

$$d\Gamma = \frac{1}{2S+1}\,\frac{1}{2E}\,\overline{|\mathcal{M}|^2}\,d\Phi \tag{4.394}$$

dove S è lo spin della particella che decade ($S=0$ per il pione ...), E è la sua energia nel sistema di riferimento dove stiamo operando, $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ è la somma sugli stati di spin iniziali e finali dei moduli quadri degli elementi di matrice invarianti del decadimento e $d\Phi$ è l'elemento di spazio delle fasi invariante associato allo stato finale, che, nel nostro caso, come si è già visto, nel sistema del CM è dato da

$$d\Phi = \frac{1}{16\pi^2}\,\frac{\sqrt{(s-m_1^2-m_2^2)^2-4m_1^2m_2^2}}{2s}\,d\Omega_{CM} \equiv \frac{1}{16\pi^2}\,\frac{b}{\sqrt{s}}\,d\Omega_{CM} \tag{4.395}$$

essendo $d\Omega_{CM}$ l'elemento di angolo solido relativo a una delle due particelle nello stato finale (la direzione di moto dell'altra è, ovviamente, opposta ...), s la massa invariante quadra del sistema, pari, ovviamente a M^2 e b il modulo dell'impulso del neutrino e del leptone carico nel sistema del CM. In questo stesso sistema di riferimento, dove il pione è a riposo, se assumiamo al solito che sia nulla la massa del neutrino, detta m la massa del leptone carico, risulta dunque

$$\begin{aligned} d\Gamma &= \frac{1}{1}\,\frac{1}{2M}\,\overline{|\mathcal{M}|^2}\,\frac{1}{16\pi^2}\,\frac{(M^2-m^2)}{2M^2}\,d\Omega_{CM} = \\ &= \frac{1}{32\pi}\,\frac{M^2-m^2}{M^3}\,\overline{|\mathcal{M}|^2}\,d(-cos\theta_{CM}) \end{aligned} \tag{4.396}$$

dove M è la massa del pione e $d\Omega_{CM}$ si riferisce alla direzione di volo del leptone carico nel sistema del CM orientato, comunque, in modo arbitrario.

Veniamo adesso al calcolo esplicito dell'elemento di matrice $\mathcal{M}$.
Per quanto già visto (cfr. eq.(4.84)), risulta

$$\mathcal{M} = <out|\,\mathcal{L}_W(0)\,|in> \tag{4.397}$$

Poiché gli stati adronici e leptonici hanno in comune solo lo stato di vuoto, deve essere

$$\mathcal{M} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} < l^-\ \bar{\nu}|J^{\dagger lept}_\mu(0)|\Omega> \cdot <\Omega|J^\mu_{hadr}(0)|\pi^-> \tag{4.398}$$

Ma allora, se indichiamo con P^μ il quadrimpulso del pione, essendo esso una particella senza spin, quanto alla quantità quadrivettoriale $< \Omega|J^\mu_{hadr}(0)|\pi^- >$ essa non può che essere semplicemente proporzionale a P^μ , i.e.

$$< \Omega|J^\mu_{hadr}(0)|\pi^- >= f\ P^\mu \tag{4.399}$$

dove la costante f, nell'ottica di descrivere con lo stesso formalismo anche i decadimenti deboli di CC degli altri mesoni pseudoscalari, dovendo essere una funzione scalare di Lorentz, potrà dipendere, in questo caso, solo dalla massa stessa del pione, i.e.

$$f = f(m_\pi) \equiv f_\pi\ \ cos\theta_C \tag{4.400}$$

dove il fattore $cos\theta_C$ nasce dal fatto che oggi sappiamo che la reazione di annichilazione $(d\bar{u}) \to W^-$ procede attraverso la corrente $\bar{u}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\, d_C$ e il campo del quark d_C è sostanzialmente pari a $d_C = d\, cos\theta_C + s\, sin\theta_C$ essendo s il campo del quark strano e θ_C l'angolo di Cabibbo.

Veniamo ora all'altra quantità che compare nella (4.398), ovvero passiamo a considerare l'espressione $< l^-\, ,\, \bar{\nu}|J^{\dagger lept}_\mu(0)|\Omega >$.
Più esplicitamente, se q e k con s , r sono, rispettivamente, gli impulsi e gli stati di spin del leptone carico e dell'antineutrino, dobbiamo valutare l'espressione

$$< l^-(q,s)\, ,\, \bar{\nu}(k,r)|\bar{\psi}_l(0)\, \gamma_\mu\, (1-\gamma_5)\, \psi_\nu(0)|\Omega > \tag{4.401}$$

la quale, per quanto già visto nella nota associata alla (4.328), risulta pari a

$$\begin{aligned} &< l^-(q,s)\ \bar{\nu}(k,r)|\bar{\psi}_l(0)\, \gamma_\mu\, (1-\gamma_5)\, \psi_\nu(0)|\Omega >= \\ &=\ \ \bar{u}^{(s)}_l(q)\ \gamma_\mu\, (1-\gamma_5)\ v^{(r)}_\nu(k) \end{aligned} \tag{4.402}$$

per cui, essendo

$$P^\mu = k^\mu + q^\mu \tag{4.403}$$

abbiamo

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= -\frac{G_F}{\sqrt{2}}\ f_\pi\, cos\theta_C\ (k^\mu + q^\mu)\ \bar{u}^{(s)}_l(q)\ \gamma_\mu\, (1-\gamma_5)\ v^{(r)}_\nu(k) = \\ &= -\frac{G_F}{\sqrt{2}}\ f_\pi\, cos\theta_C\ \bar{u}^{(s)}_l(q)\ \not{q}\ (1-\gamma_5)\ v^{(r)}_\nu(k) - \\ &- \frac{G_F}{\sqrt{2}}\ f_\pi\, cos\theta_C\ \bar{u}^{(s)}_l(q)\ (1+\gamma_5)\ \not{k}\ v^{(r)}_\nu(k) \end{aligned} \tag{4.404}$$

dove abbiamo usato il fatto che γ_5 anticommuta con tutte le γ_μ.
D'altronde, se come abbiamo fin'ora ammesso, possiamo considerare il neutrino come avente massa nulla, allora, per l'equazione di Dirac, si ha che

$$\not{k}\ v^{(r)}_\nu(k) = 0 \tag{4.405}$$

mentre, per lo stesso motivo, risulta

$$\bar{u}_l^{(s)}(q)\ \not{q} = m\,\bar{u}_l^{(s)}(q) \tag{4.406}$$

dove m è la massa del leptone carico. Dunque abbiamo infine

$$\mathcal{M} \;\; = \;\; -m\,\frac{G_F}{\sqrt{2}}\ f_\pi\,cos\theta_C\ \bar{u}_l^{(s)}(q)\ (1-\gamma_5)\ v_\nu^{(r)}(k) \tag{4.407}$$

A noi, comunque, per calcolare $d\Gamma$, serve di valutare $\overline{|\mathcal{M}|^2}$, ovvero serve la quantità

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} \;\; = \;\; \frac{G_F^2}{2}\ |f_\pi|^2\,cos^2\theta_C\ \left\{m^2\ \sum_{r,s}|\bar{u}_l^{(s)}(q)\ (1-\gamma_5)\ v_\nu^{(r)}(k)|^2\right\} \tag{4.408}$$

ma

$$\begin{aligned}
&\sum_{r,s}|\bar{u}_l^{(s)}(q)\ (1-\gamma_5)\ v_\nu^{(r)}(k)|^2 = \\
&\quad = \sum_{r,s}\left[\bar{u}_l^{(s)}(q)\ (1-\gamma_5)\ v_\nu^{(r)}(k)\right]\left[\bar{u}_l^{(s)}(q)\ (1-\gamma_5)\ v_\nu^{(r)}(k)\right]^* = \\
&\quad = \sum_{r,s}\left[\bar{u}_l^{(s)}(q)\ (1-\gamma_5)\ v_\nu^{(r)}(k)\right]\left[\bar{u}_l^{(s)}(q)\ (1-\gamma_5)\ v_\nu^{(r)}(k)\right]^\dagger = \\
&\quad = Tr\left\{\sum_{r,s}\left[\bar{u}_l^{(s)}(q)\ (1-\gamma_5)\ v_\nu^{(r)}(k)\right]\left[\bar{u}_l^{(s)}(q)\ (1-\gamma_5)\ v_\nu^{(r)}(k)\right]^\dagger\right\}
\end{aligned} \tag{4.409}$$

dove abbiamo usato il fatto che $\left[\bar{u}_l^{(s)}(q)\ (1-\gamma_5)\ v_\nu^{(r)}(k)\right]$ è un numero complesso e come tale può anche essere visto come una matrice 1×1 e quindi come coincidente con la sua stessa traccia.
Dunque, ricordando che $v^\dagger = \bar{v}\,\gamma^0$, $\gamma_5^\dagger = \gamma_5$, $\bar{u}^\dagger = \gamma^0\,u$, $(A\cdot B)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$, abbiamo

$$\begin{aligned}
&Tr\left\{\sum_{r,s}\left[\bar{u}_l^{(s)}(q)\ (1-\gamma_5)\ v_\nu^{(r)}(k)\right]\left[\bar{u}_l^{(s)}(q)\ (1-\gamma_5)\ v_\nu^{(r)}(k)\right]^\dagger\right\} = \\
&\quad = Tr\sum_{r,s}\bar{u}_l^{(s)}(q)\ (1-\gamma_5)\ v_\nu^{(r)}(k)\ \ \bar{v}_\nu^{(r)}(k)\,\gamma^0\ (1-\gamma_5)\ \gamma^0\,u_l^{(s)}(q)
\end{aligned} \tag{4.410}$$

Ma $Tr(A\cdot B\cdot C) = Tr(B\cdot C\cdot A)$, dunque

$$\begin{aligned}
&\sum_{r,s}|\bar{u}_l^{(s)}(q)\ (1-\gamma_5)\ v_\nu^{(r)}(k)|^2 = \\
&\quad = Tr\left\{\left[\sum_s u_l^{(s)}(q)\bar{u}_l^{(s)}(q)\right](1-\gamma_5)\ \left[\sum_r v_\nu^{(r)}(b)\bar{v}_\nu^{(r)}(k)\right](1+\gamma_5)\right\}
\end{aligned} \tag{4.411}$$

dove si è usato il fatto che γ^0 e γ_5 anticommutano, mentre $\gamma_0^2 = I$.
D'altronde, come sappiamo (si ricordi che il neutrino ha massa nulla ...)

$$\sum_s u_l^{(s)}(q)\bar{u}_l^{(s)}(q) = \not{q} + m; \qquad\qquad \sum_r v_\nu^{(r)}(b)\bar{v}_\nu^{(r)}(k) = \not{k} \tag{4.412}$$

e quindi

$$\begin{aligned}
\sum_{r,s} |\bar{u}_l^{(s)}(q)\ (1-\gamma_5)\ v_\nu^{(r)}(k)|^2 &= Tr\,[(\not{q}+m)(1-\gamma_5)\ \not{k}\,(1+\gamma_5)] = \\
&= Tr\left[(\not{q}+m)\ \not{k}\,(1+\gamma_5)^2\right] = 2\,Tr\,[\not{q}+m)\ \not{k}\,(1+\gamma_5] = \\
&= 2\,Tr\,[\not{q}\,\not{k}+\not{q}\,\not{k}\,\gamma_5+m\,\not{k}+m\,\not{k}\,\gamma_5] \qquad (4.413)
\end{aligned}$$

ma d'altronde

$$Tr(\gamma_\mu\,\gamma_\nu) = 4\,\delta_{\mu\nu} \qquad (4.414)$$
$$Tr(\gamma_\mu\,\gamma_\nu\,\gamma_5) = 0 \qquad (4.415)$$
$$Tr(\gamma_\mu) = 0 \qquad (4.416)$$
$$Tr(\gamma_\mu\,\gamma_5) = 0 \qquad (4.417)$$

per cui, in definitiva, risulta[264]

$$m^2\ \sum_{r,s} |\bar{u}_l^{(s)}(q)\ (1-\gamma_5)\ v_\nu^{(r)}(k)|^2 = 8\,m^2\,(k\cdot q) \qquad (4.418)$$

e dunque, nel caso in cui non interessa lo stato di spin del leptone carico l^-, abbiamo

$$\begin{aligned}
\overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{G_F^2}{2}\ |f_\pi|^2\,cos^2\theta_C\ \left\{m^2\sum_{r,s}|\bar{u}_l^{(s)}(q)\ (1-\gamma_5)\ v_\nu^{(r)}(k)|^2\right\} = \\
&= 4\,m^2\ G_F^2\ |f_\pi|^2\,cos^2\theta_C\,(k\cdot q) \qquad (4.419)
\end{aligned}$$

per cui abbiamo

$$d\Gamma = \frac{1}{2M}\ 4\,m^2\ G_F^2\ |f_\pi|^2\,cos^2\theta_C\ (k\cdot q)\ \frac{1}{32\pi^2}\ \frac{M^2-m^2}{M^2}\ d\Omega_{CM} \qquad (4.420)$$

ma

$$\begin{aligned}
(k+q)^2 = M^2 \quad &\Rightarrow \quad M^2 = 0 + 2\,(k\cdot q) + m^2 \quad \Rightarrow \\
&\Rightarrow \quad 2\,(k\cdot q) = M^2 - m^2 = 2M\,E_\nu \qquad (4.421)
\end{aligned}$$

dove E_ν e l'energia[265] del neutrino nel sistema del CM.
Sostituendo nella (4.419), otteniamo quindi

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = 4M\ \ G_F^2\ |f_\pi|^2\,cos^2\theta_C\,m^2 E_\nu = 2m^2\ \ G_F^2\ |f_\pi|^2\,cos^2\theta_C\,(M^2-m^2) \qquad (4.422)$$

e dunque

$$d\Gamma = \frac{1}{2M}\ \left(2\,m^2\ G_F^2\ |f_\pi|^2\,cos^2\theta_C\ (M^2-m^2)\right)\ \frac{1}{32\pi^2}\ \frac{M^2-m^2}{M^2}\ d\Omega_{CM} \qquad (4.423)$$

[264]Si noti che il contributo legato alla presenza della γ_5 è nullo.

[265]Si ricordi, infatti, che l'energia nel CM del neutrino è pari a $E_\nu = \frac{s+m_\nu^2-m^2}{2\sqrt{s}} = \frac{M^2-m^2}{2M}$ ...

da cui, integrando sull'angolo solido (il decadimento, come è ovvio che debba essere, è isotropo nel CM), si ha finalmente che

$$\begin{aligned}\Gamma &= \frac{1}{2M}\, 2\,m^2\, G_F^2\, |f_\pi|^2 \,cos^2\theta_C\, (M^2-m^2)\,\frac{1}{32\pi^2}\,\frac{M^2-m^2}{M^2}\,4\pi = \\ &= M\,m^2\, G_F^2\, |f_\pi|^2\, cos^2\theta_C\,\frac{1}{8\pi}\,\left(\frac{M^2-m^2}{M^2}\right)^2 \qquad (4.424)\end{aligned}$$

Questa relazione consente, in particolare, di determinare il rapporto fra i BR dei due decadimenti in elettrone-neutrino e muone-neutrino. Abbiamo

$$\begin{aligned}R_\pi &\equiv \frac{\Gamma(\pi^-\to e^-\,\bar\nu_e)}{\Gamma(\pi^-\to \mu^-\,\bar\nu_\mu)} = \left(\frac{m_e}{m_\mu}\right)^2 \left(\frac{M_\pi^2-m_e^2}{M_\pi^2-m_\mu^2}\right)^2 = \\ &= \left(\frac{0.511}{105.7}\right)^2 \left(\frac{139.6^2-0.511^2}{139.6^2-105.7^2}\right)^2 \approx 2.337\cdot 10^{-5}\times 5.492 \approx \\ &\approx 1.283\cdot 10^{-4} \qquad (4.425)\end{aligned}$$

che, per gli anologhi decadimenti del K, diventa[266]

$$\begin{aligned}R_K &\equiv \frac{\Gamma(K^-\to e^-\,\bar\nu_e)}{\Gamma(K^-\to \mu^-\,\bar\nu_\mu)} = \left(\frac{m_e}{m_\mu}\right)^2 \left(\frac{M_K^2-m_e^2}{M_K^2-m_\mu^2}\right)^2 \approx 2.337\cdot 10^{-5}\times 1.098 \approx \\ &\approx 2.567\cdot 10^{-5} \qquad (4.427)\end{aligned}$$

Questi risultati mostrano come il decadimento in elettrone-neutrino sia estremamente sfavorito rispetto a quello in muone-neutrino, nonostante il vantaggio del maggior spazio delle fasi a disposizione. La ragione sta nella conservazione del momento angolare, nello spin nullo del mesone e nel fatto che la struttura vettoriale della corrente debole carica implica che la chiralità della particella e della antiparticella prodotte/assorbite debbano essere le stesse e quindi, nel limite di massa nulla, le loro elicità debbano essere opposte.
E' soltanto per via che i leptoni carichi hanno massa che essi possono essere prodotti in uno stato di elicità opposto a quanto stabilirebbe, per massa nulla, il proiettore chirale; ma questa possibilità è pesata, nell'ampiezza del processo, con la massa stessa del leptone carico.

Vogliamo che questo punto sia ben chiaro: la soppressione di elicità, descritta, per esempio, dal fattore (4.427) nasce sia dal fatto che il mesone che decade ha spin zero come dal carattere vettoriale della corrente (presenza della γ^μ ...) e non

[266]Lo SM, tenendo conto di correzioni di ordine superiore, fornisce, rispettivamente

$$R_\pi = 1.235\cdot 10^{-4};\qquad R_K = 2.47\cdot 10^{-5} \qquad (4.426)$$

tanto dalla presenza nella corrente stessa del proiettore chirale $\chi_- = \frac{1-\gamma_5}{2}$.
Per rendercene conto, consideriamo infatti una generica corrente vettoriale[267]

$$J^\mu(x) = \bar\psi_a(x)\,\gamma^\mu\,\psi_b(x) \tag{4.431}$$

e supponiamo per esempio che, nel processo in cui essa è coinvolta, questa corrente sia responsabile della creazione della particella a e della antiparticella b (ricordiamo che ψ possiede l'operatore di creazione di antiparticelle, mentre $\bar\psi$ quello di creazione delle particelle), potendo essere, beninteso, anche che a e b siano la stessa particella (come accade in QED).
Ricordando che $\chi_+ + \chi_- = I$ e che $(\chi_\pm)^2 = \chi_\pm$, abbiamo intanto che

$$\begin{aligned} J^\mu &= \bar\psi_a\,\gamma^\mu\,(\chi_+\psi_b) + \bar\psi_a\,\gamma^\mu\,(\chi_-\psi_b) = \bar\psi_a\,\gamma^\mu\,[(\chi_+)^2\psi_b] + \bar\psi_a\,\gamma^\mu\,[(\chi_-)^2\psi_b] = \\ &= (\bar\psi_a\,\chi_-)\,\gamma^\mu\,(\chi_+\,\psi_b) + (\bar\psi_a\,\chi_+)\,\gamma^\mu\,(\chi_-\,\psi_b) \end{aligned} \tag{4.432}$$

dove si è usato il fatto che $\gamma^\mu\,\chi_\pm = \chi_\mp\,\gamma^\mu$.
Ponendo adesso[268], come al solito

$$\psi_R \equiv \chi_+\,\psi \quad \Leftrightarrow \quad \bar\psi_R = \bar\psi\,\chi_-; \qquad\qquad \psi_L \equiv \chi_-\,\psi \quad \Leftrightarrow \quad \bar\psi_L = \bar\psi\,\chi_+ \tag{4.434}$$

risulta evidentemente che

$$J^\mu = \bar\psi_{R,a}\,\gamma^\mu\,\psi_{R,b} + \bar\psi_{L,a}\,\gamma^\mu\,\psi_{L,b} \tag{4.435}$$

[267]Se l'interazione responsabile del decadimento del pione fosse, per esempio, scalare allora, essendo

$$\bar\psi\psi = \bar\psi\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\psi + \bar\psi\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\psi = \bar\psi_L\psi_R + \bar\psi_R\psi_L \tag{4.428}$$

particella e antiparticella prodotte avrebbero chiralità opposte e dunque, nel limite di alta energia, elicità uguali, per cui lo stato finale tenderebbe ad essere compatibile con uno stato di spin zero ...
In questo caso avremmo

$$\mathcal{M} = cost \cdot \bar u_l^{(s)}(q)\; v_\nu^{(r)}(k) \quad \Rightarrow \quad \overline{|\mathcal{M}|^2} = |cost|^2\; 8(k\cdot q) = 4\,|cost|^2(M^2 - m^2) \tag{4.429}$$

ovvero

$$R_\pi \;\equiv\; \frac{\Gamma(\pi^- \to e^-\,\bar\nu_e)}{\Gamma(\pi^- \to \mu^-\,\bar\nu_\mu)} = \left(\frac{M_\pi^2 - m_e^2}{M_\pi^2 - m_\mu^2}\right)^2 \approx 5.492 \tag{4.430}$$

Il fatto che sperimentalmente sia $R_\pi = (1.24\pm)\cdot 10^{-4}$ costituì, ovviamente, un argomento fortissimo a favore di quella vettoriale.
[268]Si ricordi che, visto che γ_5 è reale e simmetrica ed anticommuta con γ^0, risulta

$$\overline{(\chi_\pm\;\psi)} = \bar\psi\,\chi_\mp \tag{4.433}$$

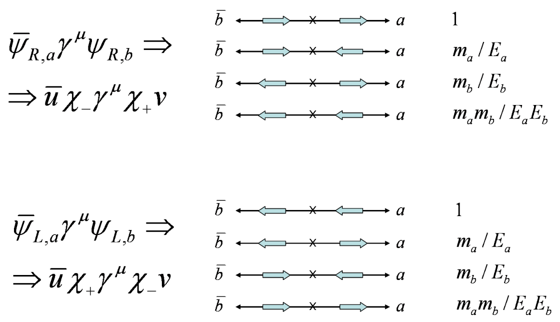


Figure 17: *Ampiezze di elicità associate alla corrente vettoriale*

Ricordando adesso il legame fra proiettori di elicità e di chiralità, i.e.

$$\Sigma_\pm(\vec p)\, u(\vec p) \;=\; \frac{1}{2}\left[1 \pm \gamma_5 \frac{E}{p}\left(1 - \frac{m}{E}\gamma^0\right)\right] u(\vec p) \qquad (4.436)$$

$$\Sigma_\pm(\vec p)\, v(\vec p) \;=\; \frac{1}{2}\left[1 \mp \gamma_5 \frac{E}{p}\left(1 + \frac{m}{E}\gamma^0\right)\right] v(\vec p) \qquad (4.437)$$

ne segue che, almeno nel limite in cui $E >> m$, risulteranno valide le seguenti approssimazioni fra autostati di chiralità definita (R/L) e autostati di elicità definita ($\pm$)

$$u_R \;\approx\; u(+) + \frac{m}{E}\, u(-); \quad u_L \approx u(-) + \frac{m}{E}\, u(+) \qquad (4.438)$$

$$v_R \;\approx\; v(-) - \frac{m}{E}\, v(+); \quad v_L \approx v(+) - \frac{m}{E}\, v(-) \qquad (4.439)$$

per cui, nel caso considerato (creazione della particella a e della antiparticella b), i pesi relativi dei processi descritti dai due termini di cui alla (4.435) risulteranno quelli rappresentati in Fig. 17 che, nel caso particolare in cui, per esempio, la massa della particella b sia nulla, si riducono come in Fig. 18.

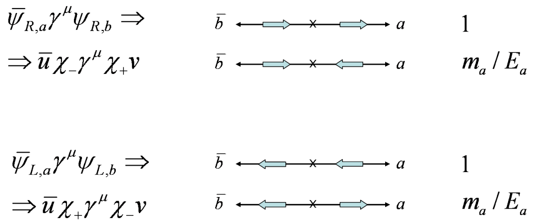


Figure 18: *Ampiezze di elicità associate alla corrente vettoriale, nel caso in cui una massa sia nulla*

In ogni caso, indipendentemente dal valore delle masse delle particelle prodotte, come si vede chiaramente dalla Fig.17, se il sistema delle due particelle considerate trae origine (in onda S, come nel caso di interazioni di contatto) da una particella di spin nullo, la conservazione del momento angolare impone che possano contribuire comunque solo le ampiezze relative a processi con particelle/antiparticelle di elicità uguale, in cui, necessariamente, una delle due è soppressa del fattore m/E ...
Nel caso poi delle interazioni deboli, per via della struttura $V - A$, accade che sia presente solo il termine L ... ma questo fatto non ha rilevanza diretta sulla questione della soppressione di elicità, bensì si limita soltanto a dimezzare i casi possibili !

Vediamo adesso come si modificano i risultati ottenuti in precedenza, nel caso in cui il neutrino sia una particella di Dirac di massa $\mu \neq 0$.
Iniziamo occupandoci di $\mathcal{M}$: il punto di partenza è chiaramente l'espressione (4.404), i.e.

$$\mathcal{M} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}}\, f_\pi\, cos\theta_C\, \left[\bar{u}_l^{(s)}(q)\, \not{q}\, (1-\gamma_5)\, v_\nu^{(r)}(k) + \bar{u}_l^{(s)}(q)\, (1+\gamma_5)\, \not{k}\, v_\nu^{(r)}(k)\right] =$$
$$= -\frac{G_F}{\sqrt{2}}\, f_\pi\, cos\theta_C\, \left[m\, \bar{u}_l^{(s)}(q)(1-\gamma_5)\, v_\nu^{(r)}(k) - \mu\, \bar{u}_l^{(s)}(q)\, (1+\gamma_5) v_\nu^{(r)}(k)\right] \quad (4.440)$$

dove abbiamo usato il fatto che $\bar{u}_l^{(s)}(q)\, \not{q} = m\, \bar{u}_l^{(s)}(q)$ e che $\not{k}\, v_\nu^{(r)}(k) = -\mu\, v_\nu^{(r)}(k)$.
Poniamo allora

$$R = m(1-\gamma_5) - \mu(1+\gamma_5) = (m-\mu) - \gamma_5(m+\mu) = R^\dagger \quad (4.441)$$

risulta così

$$\mathcal{M} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}}\, f_\pi\, cos\theta_C\, \left[\bar{u}_l^{(s)}(q)\, R\, v_\nu^{(r)}(k)\right] \quad (4.442)$$

da cui ricaviamo

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{G_F^2}{2}\, |f_\pi|^2\, cos^2\theta_C\, \sum_{r,s} |\bar{u}_l^{(s)}(q)\, R\, v_\nu^{(r)}(k)|^2 \quad (4.443)$$

ma, al solito, possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
\sum_{r,s} |\bar{u}\, R\, v|^2 &= \sum_{r,s} (\bar{u}\, R\, v)\cdot(\bar{u}\, R\, v)^* = \sum_{r,s} (\bar{u}\, R\, v)\cdot(\bar{u}\, R\, v)^\dagger = \\
&= Tr\left[\sum_{r,s} \bar{u}\, R\, v\, v^\dagger\, R^\dagger\, \bar{u}^\dagger\right] = Tr\left[\sum_{r,s} \bar{u}\, R\, v\, \bar{v}\gamma^0\, R\, \gamma^0\, u\right] = \\
&= Tr\left\{\left(\sum_s u_l^{(s)}(q)\, \bar{u}_l^{(s)}(q)\right)\, R\, \left(\sum_r v_\nu^{(r)}(k)\, \bar{v}_\nu^{(r)}(k)\right)\, \gamma^0 R \gamma^0\right\} = \\
&= Tr\left\{(\not{q} + m)\, R\, (\not{k} - \mu)\, \hat{R}\right\}
\end{aligned} \quad (4.444)$$

dove abbiamo definito

$$\hat{R} \equiv \gamma^0\, R\, \gamma^0 = (m-\mu) + \gamma_5(m+\mu) \quad (4.445)$$

Siccome sia R che $\hat{R}$ hanno un numero pari di matrici γ, gli unici termini che possono contribuire alla traccia (4.444) sono

$$-m\, \mu\, Tr(R\, \hat{R}) + Tr(\not{q} R\, \not{k} \hat{R}) \quad (4.446)$$

Risulta

$$\begin{aligned}
-m\, \mu\, Tr(R\, \hat{R}) &= -m\, \mu\, Tr\left\{[(m-\mu) - \gamma_5(m+\mu)][(m-\mu) + \gamma_5(m+\mu)]\right\} = \\
&= -m\, \mu [4(m-\mu)^2 - 4(m+\mu)^2] = 16\, m^2 \mu^2
\end{aligned} \quad (4.447)$$

mentre è (si ricordi che $Tr(\gamma_5\, \gamma^\alpha \gamma^\beta) = 0$)

$$\begin{aligned} Tr(\not{q} R \not{k} \hat{R}) &= Tr\left\{\not{q}\,[(m-\mu) - \gamma_5(m+\mu)]\, \not{k}\,[(m-\mu)+\gamma_5(m+\mu)]\right\} = \\ &= Tr\left\{(m-\mu)^2\, \not{q}\, \not{k} - (m+\mu)^2\, \not{q}\gamma_5\, \not{k}\gamma_5\right\} = \\ &= 4(m-\mu)^2(qk) + 4(m+\mu)^2(qk) = 8(m^2+\mu^2)(qk) \qquad (4.448) \end{aligned}$$

per cui, in definitiva, risulta

$$\sum_{r,s} |\bar{u}_l^{(s)}(q)\, R\, v_\nu^{(r)}(k)|^2 = 8(m^2+\mu^2)(qk) + 16\, m^2\mu^2 \qquad (4.449)$$

e dunque, finalmente[269]

$$\begin{aligned} \overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{G_F^2}{2}\, |f_\pi|^2 cos^2\theta_C \;\cdot\; 8\left[(m^2+\mu^2)(qk) + 2\, m^2\mu^2\right] = \\ &= 4\, G_F^2\, |f_\pi|^2 cos^2\theta_C \;\cdot\; \left[(m^2+\mu^2)(qk) + 2\, m^2\mu^2\right] = \\ &= 4\, G_F^2\, |f_\pi|^2 cos^2\theta_C \;\cdot\; \left\{m^2[\mu^2 + (qk)] + \mu^2[m^2 + (qk)]\right\} = \\ &= 2\, G_F^2\, |f_\pi|^2 cos^2\theta_C \;\cdot\; \left\{m^2(2\mu^2 + M^2 - m^2 - \mu^2) + \mu^2(2m^2 + M^2 - m^2 - \mu^2)\right\} = \\ &= 2\, G_F^2\, |f_\pi|^2 cos^2\theta_C \;\cdot\; \left\{m^2 2ME_\nu + \mu^2 2ME_l\right\} = \\ &= 4M\, G_F^2\, |f_\pi|^2 cos^2\theta_C \;\cdot\; \left\{m^2 E_\nu + \mu^2 E_l\right\} \qquad (4.450) \end{aligned}$$

dove E_ν ed E_l sono, rispettivamente, le energie nel centro di massa del neutrino e del leptone (da confrontare con la (4.422), ottenuta direttamente nel caso in cui $\mu = 0$).
Per quanto riguarda infine $d\Gamma$, occorre tenere conto della massa del neutrino anche nell'elemento di angolo solido $d\Phi$: si ha

$$\begin{aligned} d\Phi &= \frac{1}{16\pi^2}\frac{M^2-m^2}{2M^2}\, d\Omega_{CM} \to \frac{1}{16\pi^2}\frac{\sqrt{(M^2-m^2-\mu^2)^2 - 4m^2\mu^2}}{2M^2}\, d\Omega_{CM} \\ &= \frac{1}{16\pi^2}\frac{b_l}{\sqrt{s}}\, d\Omega_{CM} \qquad (4.451) \end{aligned}$$

[269]In generale, per la conservazione del quadriimpulso espressa dalla (4.403), abbiamo

$$P = k + q$$

e dunque

$$P - k = q \Rightarrow M^2 + \mu^2 - 2(P\cdot k) = m^2 \Rightarrow M^2 - m^2 + \mu^2 = 2(P\cdot k)$$

che, nel sistema del CM, diviene

$$2ME_\nu = M^2 - m^2 + \mu^2$$

e, analogamente

$$2ME_l = M^2 - \mu^2 + m^2$$

dove b_l è il modulo dell'impulso spaziale del leptone carico e dell'antineutrino, visti nel sistema del CM. Risulta quindi

$$\begin{aligned} d\Gamma &= \frac{1}{2M}\,\overline{|\mathcal{M}|^2}\,d\Phi = \\ &= \frac{1}{2M}\cdot 4M\,G_F^2\;|f_\pi|^2\,cos^2\theta_C\;\cdot\;\left\{m^2E_\nu+\mu^2E_l\right\}\cdot\frac{1}{16\pi^2}\,\frac{b_l}{M}\,d\Omega_{CM} \end{aligned}$$

ovvero, integrando sull'angolo solido, abbiamo infine

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{1}{2\pi}\,G_F^2\;|f_\pi|^2\,cos^2\theta_C\,\left\{m^2E_\nu+\mu^2E_l\right\}\;\frac{b_l}{M} = \\ &= \frac{1}{4\pi}\,G_F^2\;|f_\pi|^2\,cos^2\theta_C\,\frac{(M^2-m^2-\mu^2)(m^2+\mu^2)+4\,m^2\mu^2}{M^2}\,b_l = \\ &= \frac{1}{4\pi}\,G_F^2\;|f_\pi|^2\,cos^2\theta_C\,\frac{m^2(M^2-m^2)+\mu^2(M^2+2m^2-\mu^2)}{M^2}\,\cdot \\ &\cdot\;\;\frac{\sqrt{(M^2-m^2-\mu^2)^2-4m^2\mu^2}}{2M} \end{aligned} \tag{4.452}$$

che, nel limite di massa nulla del neutrino riproduce la (4.424), risultando infatti

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{1}{4\pi}\,G_F^2\;|f_\pi|^2\,cos^2\theta_C\,\frac{m^2(M^2-m^2)+\mu^2(M^2+2m^2-\mu^2)}{M^2}\,\cdot \\ &\cdot\;\;\frac{\sqrt{(M^2-m^2-\mu^2)^2-4m^2\mu^2}}{2M} \\ &\to \frac{1}{4\pi}\,G_F^2\;|f_\pi|^2\,cos^2\theta_C\,\frac{m^2(M^2-m^2)}{M^2}\cdot\frac{(M^2-m^2)}{2M} = \\ &= \frac{Mm^2}{8\pi}\,G_F^2\;|f_\pi|^2\,cos^2\theta_C\,\left(\frac{M^2-m^2}{M^2}\right)^2 \end{aligned} \tag{4.453}$$

Fin qui abbiamo sempre ignorato lo stato di spin delle particelle prodotte. E' però molto istruttivo vedere che cosa accade a $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ quando, per esempio, si fissi lo stato di spin del leptone carico l^-.
Inizieremo assumendo di nuovo che la massa del neutrino sia nulla.
Occorre ripartire dall'espressione (4.404) dell'elemento di matrice $\mathcal{M}$, ma per avere l'ampiezza di transizione verso lo stato di spin scelto, occorre inserire adesso nell'espressione dell'elemento di matrice l'opportuno proiettore di spin sullo stato voluto del leptone[270] carico

$$\Pi = \frac{1+\gamma_5 \not{N}}{2} \tag{4.455}$$

descritto dal quadrivettore N^μ, le cui proprietà generali, lo ricordiamo, sono che

$$(Nq) = 0; \qquad N^2 = -1 \tag{4.456}$$

Si ha dunque

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= -\frac{G_F}{\sqrt{2}}\, f_\pi\, cos\theta_C \, \Big[\bar{u}_l^{(s)}(q)\Pi \not{q}\,(1-\gamma_5)\; v_\nu^{(r)}(k) + \\ &+ \; \bar{u}_l^{(s)}(q)\,\Pi\,(1+\gamma_5)\, \not{k}\; v_\nu^{(r)}(k)\Big] \end{aligned} \tag{4.457}$$

ovvero, essendo la massa del neutrino nulla ($\rightarrow \not{k}\; v_\nu^{(r)}(k) = 0$), risulta adesso

$$\mathcal{M} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}}\, f_\pi\, cos\theta_C \, \Big[\bar{u}_l^{(s)}(q)\Pi \not{q}\,(1-\gamma_5)\; v_\nu^{(r)}(k)\Big] \tag{4.458}$$

Ma i proiettori di spin commutano con i proiettori $\Lambda_\pm$ e dunque[271]

$$\Pi(\not{q}+m) = (\not{q}+m)\Pi \Rightarrow \Pi \not{q} = \not{q}\Pi \tag{4.459}$$

per cui, essendo $\bar{u}_l^{(s)}(q)\not{q} = m\,\bar{u}_l^{(s)}(q)$, abbiamo infine

$$\mathcal{M} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}}\, f_\pi\, cos\theta_C \, \Big[m\,\bar{u}_l^{(s)}(q)\,\Pi\,(1-\gamma_5)\; v_\nu^{(r)}(k)\Big] \tag{4.460}$$

---

[270] Si ricordi che (idem per lo spinore v ...)

$$\begin{aligned} \overline{(\Pi\, u)} &= (\Pi\, u)^\dagger \gamma^0 = u^\dagger\, \Pi^\dagger \gamma^0 = \bar{u}\gamma^0 \Pi^\dagger \gamma^0 = \bar{u}\gamma^0 \frac{1+\not{N}^\dagger \gamma_5}{2}\gamma^0 = \bar{u}\frac{1-\gamma^0\not{N}^\dagger\gamma^0\gamma_5}{2} = \\ &= \bar{u}\frac{1-\not{N}\gamma_5}{2} = \bar{u}\frac{1+\gamma_5\not{N}}{2} = \bar{u}\,\Pi \end{aligned} \tag{4.454}$$

[271] Come è noto, infatti, essendo $(Nq) = 0$, si ha

$$\gamma_5 \not{N}\cdot\not{q} = \gamma_5\, N_\alpha q_\beta \gamma^\alpha\gamma^\beta = \gamma_5\, N_\alpha q_\beta[-\gamma^\beta\gamma^\alpha + 2\delta^{\alpha\beta}] = -\gamma_5\, \not{q}\cdot\not{N} + 2\gamma_5(Nq) = \not{q}\cdot\gamma_5\not{N}$$

e dunque il modulo quadro complessivo dell'ampiezza di transizione verso quel dato stato di spin del leptone carico scelto sarà dato da

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} \;=\; m^2 \,\frac{G_F^2}{2}\, |f_\pi|^2 \,cos^2\theta_C \,\sum_{r,s} |\bar{u}_l^{(s)}(q)\,\Pi\,(1-\gamma_5)\; v_\nu^{(r)}(k)|^2 \tag{4.461}$$

Con l'uso del proiettore di spin abbiamo recuperato interamente la possibilità di far uso dei proiettori $\Lambda_\pm$ e quindi, in definitiva, la potenza dell'uso delle tracce dei prodotti delle matrici gamma che abbiamo visto all'opera fino ad ora. Si ha

$$\begin{aligned}
&\sum_{r,s} |\bar{u}_l^{(s)}(q)\,\Pi\,(1-\gamma_5)\; v_\nu^{(r)}(k)|^2 = \\
=\;& \sum_{r,s} [\bar{u}\,\Pi\,(1-\gamma_5)\; v]\,[\bar{u}\,\Pi\,(1-\gamma_5)\; v]^* = \sum_{r,s} [\bar{u}\,\Pi\,(1-\gamma_5)\; v]\,[\bar{u}\,\Pi\,(1-\gamma_5)\; v]^\dagger = \\
=\;& Tr\left\{\sum_{r,s} [\bar{u}\,\Pi\,(1-\gamma_5)\; v]\,[\bar{u}\,\Pi\,(1-\gamma_5)\; v]^\dagger\right\} = \\
=\;& Tr\left\{\sum_{r,s} \bar{u}\,\Pi\,(1-\gamma_5)\; v\,v^\dagger\,(1-\gamma_5)\,\Pi^\dagger\,\bar{u}^\dagger\right\} = \\
=\;& Tr\left\{\sum_{r,s} \bar{u}\,\Pi\,(1-\gamma_5)\; v\,\bar{v}\,\gamma^0\,(1-\gamma_5)\,\gamma^0\Pi\gamma^0\,\gamma^0 u\right\} = \\
=\;& Tr\left\{\left(\sum_s u_l^{(s)}(q)\;\bar{u}_l^{(s)}(q)\right)\Pi\,(1-\gamma_5)\,\left(\sum_r v_\nu^{(r)}(k)\;\bar{v}_\nu^{(r)}(k)\right)\,(1+\gamma_5)\,\Pi\right\} = \\
=\;& Tr\left\{(m+\not{q})\;\Pi\,(1-\gamma_5)\;(\not{k})\;(1+\gamma_5)\,\Pi\right\} = Tr\left\{\Pi(m+\not{q})\,\Pi\,(1-\gamma_5)^2\;\;\not{k}\right\} = \\
=\;& 2Tr\left\{(m+\not{q})\,\Pi^2\,(1-\gamma_5)\;\;\not{k}\right\} = 2Tr\left\{(m+\not{q})\,\Pi\,(1-\gamma_5)\;\;\not{k}\right\}
\end{aligned} \tag{4.462}$$

dove si è usato il fatto che

$$\bar{u}^\dagger = \gamma^0\,u, \quad \Pi^\dagger = \gamma^0\Pi\gamma^0, \quad (1-\gamma_5)^2 = 2(1-\gamma_5), \quad \Pi^2 = \Pi, \quad \Pi\;\not{q} = \not{q}\;\Pi$$
$$\sum_s u^{(s)}(q)\;\bar{u}^{(s)}(q) = \not{q}\;+\,m, \qquad \sum_r v^{(r)}(k)\;\bar{v}^{(r)}(k) = \not{k}$$

Risulta quindi dalla (4.462), ricordando la definizione di Π, che

$$\begin{aligned}
&\sum_{r,s} |\bar{u}_l^{(s)}(q)\,\Pi\,(1-\gamma_5)\; v_\nu^{(r)}(k)|^2 = Tr\left\{(m+\not{q})\,(1+\gamma_5\,\not{N})\,(1-\gamma_5)\;\not{k}\right\} = \\
=\;& Tr\left\{m(1+\gamma_5\,\not{N})\,(1-\gamma_5)\;\not{k} + \not{q}(1+\gamma_5\,\not{N})\,(1-\gamma_5)\;\not{k}\right\} = \\
=\;& Tr\left\{m(1-\gamma_5)\;\not{k} + m\,\gamma_5\,\not{N}\,(1-\gamma_5)\;\not{k} + \not{q}\gamma_5\,\not{N}\,(1-\gamma_5)\;\not{k} + \not{q}\,(1-\gamma_5)\;\not{k}\right\}
\end{aligned}$$

ma i termini con un numero dispari di γ hanno traccia nulla, per cui il primo ed il terzo addendo dell'espressione di sopra danno contributo nullo alla traccia, e quindi risulta che

$$\sum_{r,s} |\bar{u}_l^{(s)}(q)\,\Pi\,(1-\gamma_5)\; v_\nu^{(r)}(k)|^2 = Tr\left\{m\,\gamma_5\,\not{N}\,(1-\gamma_5)\;\not{k} + \not{q}\,(1-\gamma_5)\;\not{k}\right\} \tag{4.463}$$

ma

$$\gamma_5 \not{N}\,(1-\gamma_5) = -\not{N}\,\gamma_5(1-\gamma_5) = \not{N}\,(1-\gamma_5) \tag{4.464}$$

e ricordando che la traccia del prodotto di due γ per la γ_5 è nulla, ecco che si ha

$$\begin{aligned}\sum_{r,s} |\bar{u}_l^{(s)}(q)\,\Pi\,(1-\gamma_5)\ v_\nu^{(r)}(k)|^2 &= Tr\,\{m\ \not{N}\,(1-\gamma_5)\ \not{k} + \not{q}\,(1-\gamma_5)\ \not{k}\} = \\ &= Tr\,\{m\ \not{N}\ \not{k} + \not{q}\ \not{k}\} = 4m(N\cdot k) + 4(q\cdot k) \equiv 4(r_+\cdot k)\end{aligned} \tag{4.465}$$

dove si è posto, per definizione[272],

$$r_+^\mu \equiv q^\mu + m\,N^\mu \tag{4.466}$$

Sostituendo nella (4.461), si ottiene dunque

$$\begin{aligned}\overline{|\mathcal{M}|^2} &= m^2\ \frac{G_F^2}{2}\ |f_\pi|^2\,cos^2\theta_C\ \sum_{r,s} |\bar{u}_l^{(s)}(q)\,\Pi\,(1-\gamma_5)\ v_\nu^{(r)}(k)|^2 = \\ &= m^2\ \frac{G_F^2}{2}\ |f_\pi|^2\,cos^2\theta_C\ (4r_+\cdot k) = 2m^2\ G_F^2\ |f_\pi|^2\,cos^2\theta_C\ (r_+\cdot k)\end{aligned} \tag{4.467}$$

Osserviamo intanto che il quadrivettore r_+ definito dalla (4.466) è comunque un quadrivettore light-like, essendo $N^2 = -1$ e $q\cdot N = 0$. Ricordando che anche il quadrimpulso dell'antineutrino è light-like, possiamo scegliere N in modo che sia

$$N^\mu = \frac{1}{m}\left(\frac{m^2}{(q\cdot k)}\,k^\mu - q^\mu\right) \quad\Rightarrow\quad r_+^\mu = \frac{m^2}{(q\cdot k)}\,k^\mu \tag{4.468}$$

allora $(r_+\cdot k)$ sarà nullo. Questo significa che la polarizzazione associata a N^μ <u>non</u> potrà essere prodotta nel decadimento e quindi che il decadimento produrrà solo lo stato puro corrispondente alla polarizzazione opposta a questa.

Per vedere quale sia questa polarizzazione è opportuno utilizzare ancora una volta il fatto che $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ è un invariante relativistico e considerarlo nel riferimento del CM del sistema, quindi in quello dove il pione è fermo. In questo riferimento, quanto agli impulsi delle particelle originate dal decadimento, usando le formula consuete, abbiamo che

$$l^-:\ q = (E, b\,\vec{n}); \qquad \bar{\nu}:\ k = (b, -b\,\vec{n}) \tag{4.469}$$

con

$$b = \frac{M^2-m^2}{2M}; \qquad E = \frac{M^2+m^2}{2M} \tag{4.470}$$

[272]Evidentemente se al termine precedente si somma quello corrispondente alla polarizzazione opposta, a cui corrisponde $-N^\mu$, ritroviamo la quantità già ottenuta nel caso non polarizzato, ovvero $8q\cdot k$.

dove M è la massa del mesone ed m è quella del leptone carico.
Il quadrivettore che descrive l'elicità positiva del leptone nel riferimento del CM è allora, come sappiamo, il seguente

$$N = \frac{1}{m}(b, E\,\vec{n}) \tag{4.471}$$

per cui, per l'elicità negativa, si ha

$$\begin{aligned} r &= q + m(-N) = (E, b\,\vec{n}) - (b, E\,\vec{n}) = (E-b, (b-E)\,\vec{n}) = \\ &= (E-b)(1, -\vec{n}) \end{aligned} \tag{4.472}$$

il quale ha prodotto scalare nullo con il quadrivettore $k = b(1, -\vec{n})$ essendo light-like e ad esso proporzionale.

Questo dimostra che il leptone negativo originato dal decadimento è prodotto, nel CM del decadimento, in uno stato di elicità positiva, ovvero è polarizzato nella sua direzione di volo (sempre visto dal riferimento del CM del sistema), i.e. esso ha elicità *opposta* a quella che, per una particella di massa trascurabile, stabilirebbe il proiettore chirale χ_- che compare nella lagrangiana che descrive le interazioni deboli di corrente carica.

Questa conclusione è esatta nell'ipotesi in cui la massa del neutrino sia nulla.
Ma vediamo che succede nel caso in cui $\mu \neq 0$. Il punto di partenza è sempre l'elemento di matrice (4.404) che, nel caso in cui $\mu \neq 0$, ha condotto alla (4.442), i.e.

$$\mathcal{M} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}}\; f_\pi\, cos\theta_C\; \left[\bar{u}_l^{(s)}(q)\, R\; v_\nu^{(r)}(k)\right] \tag{4.473}$$

Quando si imponga al leptone carico una polarizzazione $\Pi = \frac{1+\gamma_5 \not{N}}{2}$, questo, avendo posto

$$R \equiv (m - \mu) - \gamma_5(m + \mu) \tag{4.474}$$

diventa

$$\mathcal{M} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}}\; f_\pi\, cos\theta_C\; \left[\bar{u}_l^{(s)}(q)\,\Pi\, R\; v_\nu^{(r)}(k)\right] \tag{4.475}$$

da cui

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} \;=\; \frac{G_F^2}{2}\; |f_\pi|^2\, cos^2\theta_C\; \sum_{r,s} |\bar{u}_l^{(s)}(q)\,\Pi\, R\; v_\nu^{(r)}(k)|^2 \tag{4.476}$$

e la sommatoria, stavolta, diventa

$$
\begin{aligned}
& \sum_{r,s} |\bar{u}\,\Pi\,R\;v|^2 = \sum_{r,s} (\bar{u}\,\Pi\,R\;v)\cdot(\bar{u}\,\Pi\,R\;v)^* = \sum_{r,s} (\bar{u}\,\Pi\,R\;v)\cdot(\bar{u}\,\Pi\,R\;v)^\dagger = \\
= \;& Tr\left[\sum_{r,s} \bar{u}\,\Pi\,R\;v\,v^\dagger\,R^\dagger\,\Pi^\dagger\,\bar{u}^\dagger\right] = Tr\left[\sum_{r,s} \bar{u}\,\Pi\,R\;v\,\bar{v}\gamma^0\,R\,\Pi^\dagger\,\gamma^0\,u\right] = \\
= \;& Tr\left\{\left(\sum_s u_l^{(s)}(q)\,\bar{u}_l^{(s)}(q)\right)\,\Pi\,R\,\left(\sum_r v_\nu^{(r)}(k)\,\bar{v}_\nu^{(r)}(k)\right)\,\gamma^0 R \gamma^0\,\Pi\right\} = \\
= \;& Tr\left\{(\not{q}+m)\,\Pi\,R\;(\not{k}-\mu)\;\hat{R}\,\Pi\right\} = Tr\left\{\Pi\;(\not{q}+m)\,\Pi\,R\;(\not{k}-\mu)\;\hat{R}\right\} = \\
= \;& Tr\left\{(\not{q}+m)\,\Pi\,R\;(\not{k}-\mu)\;\hat{R}\right\} \qquad (4.477)
\end{aligned}
$$

dove abbiamo usato il fatto che $\Pi\;(\not{q}+m) = (\not{q}+m)\;\Pi$ e che $\Pi^2 = \Pi$.
Questa traccia è fatta da quattro termini, che sono i seguenti:

$$
1): \quad Tr\left\{\not{q}\,\Pi\,R\;\not{k}\,\hat{R}\right\} = Tr\left\{\not{q}\;\Pi\,R^2\;\not{k}\right\} \qquad (4.478)
$$

$$
2): \quad m\,Tr\left\{\Pi\,R\;\not{k}\,\hat{R}\right\} = m\,Tr\left\{\Pi\,R^2\;\not{k}\right\} \qquad (4.479)
$$

$$
3): \quad -\mu\,Tr\left\{\not{q}\,\Pi\,R\,\hat{R}\right\} \qquad (4.480)
$$

$$
4): \quad -m\,\mu\,Tr\left\{\Pi\,R\,\hat{R}\right\} \qquad (4.481)
$$

dove

$$
\begin{aligned}
R^2 &= (m-\mu)^2 + (m+\mu)^2 - 2\gamma_5(m^2-\mu^2) = \\
&= 2(m^2+\mu^2) - 2\gamma_5(m^2-\mu^2) \qquad (4.482) \\
R\,\hat{R} &= (m-\mu)^2 - (m+\mu)^2 = -4\,m\,\mu \qquad (4.483)
\end{aligned}
$$

Quindi, quanto al primo termine, abbiamo

$$
\begin{aligned}
Tr\left\{\not{q}\;\Pi\,R^2\;\not{k}\right\} &= Tr\left\{\not{q}(1+\gamma_5\;\not{N})\;\left[(m^2+\mu^2) - \gamma_5(m^2-\mu^2)\right]\;\not{k}\right\} = \\
&= Tr\left\{\not{q}(m^2+\mu^2)\;\not{k}\right\} = 4\,(m^2+\mu^2)(q\cdot k) \qquad (4.484)
\end{aligned}
$$

mentre dal secondo termine otteniamo

$$
\begin{aligned}
m\,Tr\left\{\Pi\,R^2\;\not{k}\right\} &= m\,Tr\left\{(1+\gamma_5\;\not{N})\;\left[(m^2+\mu^2) - \gamma_5(m^2-\mu^2)\right]\;\not{k}\right\} = \\
&= m\,Tr\left\{\gamma_5\;\not{N}\,(-\gamma_5(m^2-\mu^2))\;\not{k}\right\} = \\
&= 4\,m\,(m^2-\mu^2)(N\cdot k) \qquad (4.485)
\end{aligned}
$$

Quanto al terzo termine esso non contribuisce, infatti

$$
-\mu\,Tr\left\{\not{q}\,\Pi\,R\,\hat{R}\right\} = \frac{-\mu}{2}\,Tr\left\{\not{q}(1+\gamma_5\;\not{N})\,(-4m\mu)\right\} = 0 \qquad (4.486)
$$

mentre il quarto termine fornisce

$$-m\,\mu\,Tr\left\{\Pi\,R\,\hat{R}\right\} = -\frac{m\,\mu}{2}\,Tr\left\{(1+\gamma_5\,\not{N})\,(-4m\mu)\right\} = 8\,m^2\,\mu^2 \qquad (4.487)$$

Quindi, se $r_\pm^\mu \equiv q^\mu \pm mN^\mu$, risulta infine che

$$\begin{aligned}\sum_{r,s}|\bar{u}\,\Pi\,R\;v|^2 &= 4\,(m^2+\mu^2)(q\cdot k) + 4\,m\,(m^2-\mu^2)(N\cdot k) + 8\,m^2\,\mu^2 &(4.488)\\ &= 4\,(m^2(q\cdot k + m\,N\cdot k) + 4\,\mu^2(q\cdot k - m\,N\cdot k) + 8\,m^2\,\mu^2 = \\ &= 4\,m^2(r_+\cdot k) + 4\,\mu^2(r_-\cdot k) + 8\,m^2\,\mu^2 &(4.489)\end{aligned}$$

ovvero abbiamo[273]

$$\begin{aligned}\overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{G_F^2}{2}\,|f_\pi|^2\,cos^2\theta_C\,\sum_{r,s}|\bar{u}_l^{(s)}(q)\,\Pi\,R\;v_\nu^{(r)}(k)|^2\\ &= 2\,G_F^2\,|f_\pi|^2\,cos^2\theta_C\,\left[m^2(r_+\cdot k) +\,\mu^2(r_-\cdot k) + 2\,m^2\,\mu^2\right] \qquad (4.492)\end{aligned}$$

Siccome $r_\pm$ sono quadrivettori light-like con parte temporale positiva, essendo k time-like, le quantità $(r_\pm\cdot k)$ sono sempre strettamente positive[274].
Questo significa che il leptone carico uscente, prescindendo dallo stato dell'antineutrino, *non* è in uno stato di spin puro poiché non è completamente polarizzato. Lo stato finale è uno stato *entangled* e, visto che il pione ha spin nullo e che il decadimento avviene in onda S essendo l'interazione "di contatto", la conservazione del momento angolare impone che ci sia completa correlazione fra le elicità[275] dei due leptoni le quali, però, risultano adesso possibili entrambe:

[273]Si osservi che

- sommando sui due stati di polarizzazione descritti dai quadrivettori N e $-N$ otteniamo di nuovo la (4.449)

$$\sum_{r,s}|\bar{u}_l^{(s)}(q)\,R\;v_\nu^{(r)}(k)|^2 = 8(m^2+\mu^2)(qk) + 16\,m^2\mu^2 \qquad (4.490)$$

- ponendo $\mu = 0$ otteniamo nuovamente la (4.465), (si ricordi che, per $\mu\to 0$, abbiamo che $R\to m\,\chi_-$ ...)

$$\sum_{r,s}|\bar{u}_l^{(s)}(q)\,\Pi\,m\,(1-\gamma_5)\;v_\nu^{(r)}(k)|^2 = 4\,m^2\,(r_+\cdot k) \qquad (4.491)$$

[274]Evidentemente, se indichiamo con $\hat{r}_\pm^0$ le componenti temporali (positive !) dei quadrivettori $r_\pm$ nel riferimento di quiete dell'antineutrino, la quantità scalare che stiamo considerando vale

$$m^2(r_+\cdot k) +\,\mu^2(r_-\cdot k) + 2\,m^2\,\mu^2 =\, m^2\,\mu\,\hat{r}_+^0 +\,\mu^2\,\mu\,\hat{r}_-^0 + 2\,m^2\,\mu^2 > 0$$

[275]Rispetto al caso del neutrino con massa nulla in cui lo stato finale era rappresentato da un unico vettore di stato, adesso lo stato finale può essere descritto in termini di due vettori di stato in cui, alternativamente, un leptone ha l'elicità "sbagliata". I due stati si realizzano con le proprie opportune probabilità e quindi si sommano in modo incoerente (si sommano le probabilità e non le ampiezze ...).

evidentemente, quindi, se prescindiamo dallo stato di spin dell'antineutrino, il leptone carico può essere descritto solo come una miscela statistica di stati per cui non appare completamente polarizzato non essendo in uno stato puro.

Riguardo ai due stati di elicità negativa e positiva del leptone carico, da quanto sopra discende evidentemente che essi sono prodotti nel seguente rapporto

$$R_{-/+} = \frac{m^2(r_- \cdot k) + \mu^2(r_+ \cdot k) + 2\, m^2\, \mu^2}{m^2(r_+ \cdot k) + \mu^2(r_- \cdot k) + 2\, m^2\, \mu^2} \tag{4.493}$$

ma, nelle solite notazioni, abbiamo

$$q = (E_l, b\,\vec{n}); \quad k = (E_\nu, -b\,\vec{n}); \quad N = \frac{1}{m}(b, E_l\,\vec{n}) \tag{4.494}$$

e dunque

$$r_+ \equiv q + m\,N = (E_l + b)(1, \vec{n}); \quad r_- \equiv q - m\,N = (E_l - b)(1, -\vec{n}) \tag{4.495}$$

per cui

$$k \cdot r_+ \;=\; (E_l + b)(E_\nu + b) \approx M\,2b \approx M\,\frac{M^2 - m^2}{M} = M^2 - m^2 \tag{4.496}$$

$$k \cdot r_- \;=\; (E_l - b)(E_\nu - b) = \frac{m^2}{E_l + b}\frac{\mu^2}{E_\nu + b} = \frac{m^2\mu^2}{k \cdot r_+} \approx \frac{m^2\mu^2}{M^2 - m^2} \tag{4.497}$$

Sostituendo, si ha allora che

$$R_{-/+} = \frac{m^2\frac{m^2\mu^2}{M^2-m^2} + \mu^2(M^2 - m^2) + 2m^2\mu^2}{m^2(M^2 - m^2) + \mu^2\frac{m^2\mu^2}{M^2-m^2} + 2m^2\mu^2} \tag{4.498}$$

ovvero, essendo nel caso attuale $\mu^2 << m^2$, $\mu^2 << M^2 - m^2$, ricaviamo infine che

$$\begin{aligned} R_{-/+} \;&\approx\; \frac{\mu^2\left[\frac{m^4}{M^2-m^2} + M^2 - m^2 + 2m^2\right]}{m^2(M^2 - m^2)} = \\ &=\; \frac{\mu^2\frac{m^4+M^4-m^4}{M^2-m^2}}{m^2(M^2 - m^2)} = \frac{\mu^2}{m^2}\left(\frac{M^2}{M^2 - m^2}\right)^2 \end{aligned} \tag{4.499}$$

che mostra comunque il carattere "quasi" polarizzato del leptone uscente anche nel caso di massa del neutrino non nulla (purché molto minore di quella del leptone carico).

Verifichiamo infine, per concludere l'argomento, la correlazione fra le elicità del leptone e dell'antineutrino.
Per questo, ripartiamo dall'elemento di matrice (4.404) che, nel caso in cui $\mu \neq 0$, ha condotto alla (4.442), i.e.

$$\mathcal{M} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}}\, f_\pi\, cos\theta_C\, \left[\bar{u}_l^{(s)}(q)\, R\, v_\nu^{(r)}(k)\right] \tag{4.500}$$

dove $R \equiv (m-\mu) - \gamma_5(m+\mu) = R^\dagger$.
Imponendo che lo stato di spin del leptone carico sia quello che è definito attraverso il proiettore $\Pi = \frac{1+\gamma_5 \not{N}}{2}$ e che lo stato di spin del leptone neutro sia quello definito attraverso il proiettore $\Xi = \frac{1+\gamma_5 \not{\eta}}{2}$, l'elemento di matrice che descrive il processo diventa

$$\mathcal{M} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}}\, f_\pi\, cos\theta_C\, \left[\bar{u}_l^{(s)}(q)\, \Pi\, R\, \Xi\; v_\nu^{(r)}(k)\right] \tag{4.501}$$

da cui otteniamo

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{G_F^2}{2}\, |f_\pi|^2\, cos^2\theta_C\, \sum_{r,s} |\bar{u}_l^{(s)}(q)\, \Pi\, R\, \Xi\, v_\nu^{(r)}(k)|^2 \tag{4.502}$$

e la sommatoria diventa ora[276]

$$\begin{aligned}
&\sum_{r,s} |\bar{u}\,\Pi\, R\,\Xi\, v|^2 = \sum_{r,s} (\bar{u}\,\Pi\, R\,\Xi\, v)\cdot(\bar{u}\,\Pi\, R\,\Xi\, v)^\dagger = \\
&= Tr\left[\sum_{r,s} \bar{u}\,\Pi\, R\,\Xi\, v\, v^\dagger\, \Xi^\dagger R^\dagger\, \Pi^\dagger\, \bar{u}^\dagger\right] = Tr\left[\sum_{r,s} \bar{u}\,\Pi\, R\,\Xi\, v\, \bar{v}\gamma^0 \Xi^\dagger\, R\,\Pi^\dagger\,\gamma^0\, u\right] = \\
&= Tr\left\{\left(\sum_s u_l^{(s)}(q)\,\bar{u}_l^{(s)}(q)\right)\Pi\, R\,\Xi\left(\sum_r v_\nu^{(r)}(k)\,\bar{v}_\nu^{(r)}(k)\right)\Xi\,\gamma^0 R\gamma^0\,\Pi\right\} = \\
&= Tr\left\{(\not{q}+m)\,\Pi\, R\,\Xi\;(\not{k}-\mu)\;\Xi\,\hat{R}\,\Pi\right\} = Tr\left\{\Pi\;(\not{q}+m)\,\Pi\, R\,\Xi\;(\not{k}-\mu)\;\Xi\,\hat{R}\right\} = \\
&= Tr\left\{(\not{q}+m)\,\Pi\, R\;(\not{k}-\mu)\;\Xi\,\hat{R}\right\} \equiv \sum_{r,s} |\bar{u}\,\Pi\, R\,\Xi\, v|^2
\end{aligned} \tag{4.503}$$

Questa traccia è fatta dei quattro termini seguenti

$$1): \quad Tr\left\{\not{q}\Pi\, R\;\not{k}\;\Xi\,\hat{R}\right\} \tag{4.504}$$

$$2): \quad m\,Tr\left\{\Pi\, R\;\not{k}\;\Xi\,\hat{R}\right\} \tag{4.505}$$

$$3): \quad -\mu\,Tr\left\{\not{q}\Pi\, R\;\Xi\,\hat{R}\right\} \tag{4.506}$$

$$4): \quad -m\,\mu\,Tr\left\{\Pi\, R\;\Xi\,\hat{R}\right\} \tag{4.507}$$

---

[276]Si ricordi che

$$\begin{array}{ll}
R \equiv (m-\mu) - \gamma_5(m+\mu) = R^\dagger; & \hat{R} \equiv (m-\mu) + \gamma_5(m+\mu) \\
\gamma^0\Xi^\dagger\gamma^0 = \Xi; \quad \Xi^2 = \Xi & \gamma^0\Pi^\dagger\gamma^0 = \Pi; \quad \Pi^2 = \Pi \\
\Pi(\not{q}+m) = (\not{q}+m)\Pi; & \Xi(\not{k}-\mu) = (\not{k}-\mu)\Xi
\end{array}$$

e risulta

$$
\begin{aligned}
\Pi\, R &= \frac{1}{2}(1+\gamma_5 \not{N})[(m-\mu)-\gamma_5(m+\mu)] = \\
&= \frac{1}{2}\left[(m-\mu)I-(m+\mu)\gamma_5+(m-\mu)\gamma_5 \not{N}+(m+\mu) \not{N}\right] \quad (4.508)\\
\Xi\, \hat{R} &= \frac{1}{2}(1+\gamma_5 \not{n})[(m-\mu)+\gamma_5(m+\mu)] = \\
&= \frac{1}{2}\left[(m-\mu)I+(m+\mu)\gamma_5+(m-\mu)\gamma_5 \not{n}-(m+\mu) \not{n}\right] \quad (4.509)
\end{aligned}
$$

I contributi non nulli al primo termine sono solo i seguenti (per ogni termine in $\Pi\, R$ esiste un solo termine in $\Xi\, \hat{R}$ che consente un contributo non nullo alla traccia ...)

$$
\begin{aligned}
Tr\left\{\not{q}\Pi\, R\, \not{k}\, \Xi\, \hat{R}\right\} &= \frac{1}{4}Tr\,\{\not{q}(m-\mu)\, \not{k}(m-\mu)- \not{q}(m+\mu)\gamma_5\, \not{k}(m+\mu)\gamma_5 + \\
&+ \not{q}(m-\mu)\gamma_5\, \not{N}\, \not{k}(m+\mu)\gamma_5\, \not{n}- \not{q}(m+\mu)\, \not{N}\, \not{k}(m+\mu)\, \not{n}\} = \\
&= \frac{4}{4}\left\{(m-\mu)^2+(m+\mu)^2\right\}(q\cdot k) + \\
&+ \frac{1}{4}[(m-\mu)^2-(m+\mu)^2]\, Tr\,\{\not{q}\, \not{N}\, \not{k}\, \not{n}\}
\end{aligned}
$$

ma

$$
\begin{aligned}
Tr\,\{\not{q}\, \not{N}\, \not{k}\, \not{n}\} &= q_\alpha N_\beta k_\nu n_\rho\, Tr\left\{\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\nu\gamma^\rho\right\} = \\
&= 4\, q_\alpha N_\beta k_\nu n_\rho\, (\delta^{\alpha\beta}\delta^{\nu\rho}+\delta^{\alpha\rho}\delta^{\beta\nu}-\delta^{\alpha\nu}\delta^{\beta\rho}) = \\
&= 4[(q\cdot N)(k\cdot n)+(q\cdot n)(k\cdot N)-(q\cdot k)(n\cdot N)] \quad (4.510)
\end{aligned}
$$

e siccome $(q\cdot N)=(k\cdot n)=0$, abbiamo infine che

$$
\begin{aligned}
& Tr\left\{\not{q}\Pi\, R\, \not{k}\, \Xi\, \hat{R}\right\} = \\
= \;& 2(m^2+\mu^2)(q\cdot k)-4m\mu(q\cdot n)(k\cdot N)+4m\mu(q\cdot k)(n\cdot N) \quad (4.511)
\end{aligned}
$$

Veniamo ora al secondo termine: abbiamo

$$
\begin{aligned}
m\,Tr\left\{\Pi\,R\,\not{k}\,\Xi\,\hat{R}\right\} &= \frac{m}{4}\,Tr\,\{-(m-\mu)\,\not{k}(m+\mu)\,\not{n} - (m+\mu)\gamma_5\,\not{k}(m-\mu)\gamma_5\,\not{n} + \\
&+ (m-\mu)\gamma_5\,\not{N}\,\not{k}(m+\mu)\gamma_5 + (m+\mu)\,\not{N}\,\not{k}(m-\mu)\} = \\
&= \frac{4m}{4}\left\{-(m^2-\mu^2)(k\cdot n) + (m^2-\mu^2)(k\cdot n) + \right. \\
&+ \left.(m^2-\mu^2)(k\cdot N) + (m^2-\mu^2)(k\cdot N)\right\} = \\
&= 2\,m\,(m^2-\mu^2)(k\cdot N) \qquad (4.512)
\end{aligned}
$$

Quanto al terzo termine, analogamente risulta

$$
\begin{aligned}
-\mu\,Tr\left\{\not{q}\,\Pi\,R\,\Xi\,\hat{R}\right\} &= -\frac{\mu}{4}\,Tr\,\{-\,\not{q}(m-\mu)(m+\mu)\,\not{n} - \not{q}(m+\mu)\gamma_5(m-\mu)\gamma_5\,\not{n} + \\
&+ \not{q}(m-\mu)\gamma_5\,\not{N}(m+\mu)\gamma_5 + \not{q}(m+\mu)\,\not{N}(m-\mu)\} = \\
&= -\frac{4\mu}{4}\left\{-(m^2-\mu^2)(n\cdot q) - (m^2-\mu^2)(n\cdot q) + \right. \\
&- \left.(m^2-\mu^2)(N\cdot q) + (m^2-\mu^2)(N\cdot q)\right\} = \\
&= 2\,\mu\,(m^2-\mu^2)(n\cdot q) \qquad (4.513)
\end{aligned}
$$

Ed infine, circa l'ultimo termine, abbiamo

$$
\begin{aligned}
-m\,\mu\,Tr\left\{\Pi\,R\,\Xi\,\hat{R}\right\} &= -\frac{m\mu}{4}\,Tr\,\{(m-\mu)(m-\mu) - (m+\mu)\gamma_5(m+\mu)\gamma_5 + \\
&+ (m-\mu)\gamma_5\,\not{N}(m-\mu)\gamma_5\,\not{n} - (m+\mu)\,\not{N}(m+\mu)\,\not{n}\} = \\
= -\frac{4m\mu}{4}&\left\{(m-\mu)^2 - (m+\mu)^2 - (m-\mu)^2(n\cdot N) - (m+\mu)^2(n\cdot N)\right\} = \\
= m\mu&\left\{4m\mu + 2(m^2+\mu^2)(n\cdot N)\right\} = 4m^2\mu^2 + 2m\mu(m^2+\mu^2)(n\cdot N) \qquad (4.514)
\end{aligned}
$$

per cui, combinando insieme i quattro risultati, otteniamo[277] dunque che

$$
\begin{aligned}
\sum_{r,s}|\bar{u}_l^{(s)}(q)\,\Pi\,R\,\Xi\,v_\nu^{(r)}(k)|^2 &= 2(m^2+\mu^2)(q\cdot k) - 4m\mu(q\cdot n)(k\cdot N) + \\
&+ 4m\mu(q\cdot k)(n\cdot N) + 2m(m^2-\mu^2)(k\cdot N) + 2\mu(m^2-\mu^2)(n\cdot q) \\
&+ 4m^2\mu^2 + 2m\mu(m^2+\mu^2)(n\cdot N) \qquad (4.516)
\end{aligned}
$$

[277] Come verifica del risultato ottenuto, osserviamo che se sommiamo il risultato per la polarizzazione dell'antineutrino descritta dal quadrivettore n con quello relativo alla polarizzazione ad essa opposta, descritta dal quadrivettore $-n$, otteniamo la (4.488), i.e.

$$
\sum_{r,s}|\bar{u}\,\Pi\,R\,v|^2 = 4\,(m^2+\mu^2)(q\cdot k) + 4\,m\,(m^2-\mu^2)(N\cdot k) + 8\,m^2\,\mu^2 \qquad (4.515)
$$

da cui, finalmente, si ha

$$\begin{aligned}
\overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{G_F^2}{2}\,|f_\pi|^2\,cos^2\theta_C\,\sum_{r,s}|\bar{u}_l^{(s)}(q)\,\Pi\,R\,\Xi\,v_\nu^{(r)}(k)|^2 = G_F^2\,|f_\pi|^2\,cos^2\theta_C\,\cdot\\
&\cdot\,\Big\{(m^2+\mu^2)(q\cdot k) - 2m\mu(q\cdot n)(k\cdot N) + 2m\mu(q\cdot k)(n\cdot N) +\\
&+\,m(m^2-\mu^2)(k\cdot N) + \mu(m^2-\mu^2)(n\cdot q) +\\
&+\,2m^2\mu^2 + m\mu(m^2+\mu^2)(n\cdot N)\Big\}
\end{aligned} \tag{4.517}$$

Questo risultato, fornendo $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ in funzione sia dello stato di polarizzazione del leptone carico e che di quello neutro, ci permette di verificare la correlazione diretta che esiste fra le elicità dei due leptoni nel sistema[278] del CM.
Poniamoci dunque nel CM del decadimento, dove abbiamo

$$k = (\mathcal{E}, b\,\vec{n}); \qquad q = (E, -b\,\vec{n}) \tag{4.518}$$

$$\mathcal{E} = \frac{M^2+\mu^2-m^2}{2M}; \qquad E = \frac{M^2+m^2-\mu^2}{2M} \tag{4.519}$$

$$b = \frac{\sqrt{(M^2-m^2-\mu^2)^2-4m^2\mu^2}}{2M} \tag{4.520}$$

essendo $\vec{n}$ la direzione di volo dell'antineutrino.
Iniziamo fissando l'elicità dell'antineutrino in modo che essa sia positiva ($\lambda = +1$): come è noto, questo implica che il quadrivettore che individua questo stato di spin sia

$$n = \frac{1}{\mu}\,(b, \mathcal{E}\,\vec{n}) \tag{4.521}$$

Determiniamo il valore di $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ dalla (4.517) imponendo che, per quanto riguarda invece il leptone carico, la sua elicità sia negativa ($\lambda = -1$), i.e.

$$N = -\frac{1}{m}\,(b, -E\,\vec{n}) \tag{4.522}$$

In queste ipotesi, quanto ai prodotti scalari che entrano nella (4.517), risulta

$$(q\cdot k) = E\,\mathcal{E} + b^2 = \frac{M^2-m^2-\mu^2}{2} \tag{4.523}$$

$$(q\cdot n) = \frac{1}{\mu}(E\,b + b\,\mathcal{E}) = \frac{b}{\mu}(E+\mathcal{E}) = \frac{bM}{\mu} \tag{4.524}$$

$$(k\cdot N) = -\frac{1}{m}(\mathcal{E}\,b + E\,b) = -\frac{b}{m}(E+\mathcal{E}) = -\frac{bM}{m} \tag{4.525}$$

$$(n\cdot N) = -\frac{1}{m\mu}(b^2 + E\,\mathcal{E}) = -\frac{1}{2m\mu}(M^2-m^2-\mu^2) \tag{4.526}$$

[278]Si ricordi che mentre il risultato (4.517) è invariante di Lorentz, la descrizione degli stati di elicità non lo è e necessita quindi di definire il riferimento in cui viene compiuta.

per cui, sostituendo nella (4.517), abbiamo

$$
\begin{aligned}
\overline{|\mathcal{M}|^2} &= G_F^2\,|f_\pi|^2\,cos^2\theta_C\Big\{(m^2+\mu^2)(q\cdot k)-2m\mu(q\cdot n)(k\cdot N)+\\
&+\ 2m\mu(q\cdot k)(n\cdot N)+m(m^2-\mu^2)(k\cdot N)+\ \mu(m^2-\mu^2)(n\cdot q)+\\
&+\ 2m^2\mu^2+m\mu(m^2+\mu^2)(n\cdot N)\Big\}=\\
&= G_F^2\,|f_\pi|^2\,cos^2\theta_C\left\{(m^2+\mu^2)\frac{M^2-m^2-\mu^2}{2}+2m\mu\,\frac{bM}{\mu}\,\frac{bM}{m}-\right.\\
&-\ 2m\mu\,\frac{M^2-m^2-\mu^2}{2}\,\frac{1}{2m\mu}(M^2-m^2-\mu^2)-m(m^2-\mu^2)\,\frac{bM}{m}+\\
&+\ \left.\mu(m^2-\mu^2)\,\frac{bM}{\mu}+2m^2\mu^2-m\mu(m^2+\mu^2)\frac{1}{2m\mu}(M^2-m^2-\mu^2)\right\}=\\
&= G_F^2\,|f_\pi|^2\,cos^2\theta_C\left\{2M^2b^2-\ \frac{(M^2-m^2-\mu^2)^2}{2}\ +2m^2\mu^2\right\}=\\
&= G_F^2\,|f_\pi|^2\,cos^2\theta_C\left\{\ \frac{(M^2-m^2-\mu^2)^2}{2}\ -2m^2\mu^2\right.\\
&-\ \left.\frac{(M^2-m^2-\mu^2)^2}{2}\ +2m^2\mu^2\right\}=0
\end{aligned}
\tag{4.527}
$$

La configurazione di spin richiesta è dunque impossibile.
Altrettanto impossibile è la configurazione opposta, in cui entrambe le elicità sono cambiate di segno: la dimostrazione formale di questo segue immediatamente da quanto sopra, visto che gli unici termini lineari in n ed N presenti nella (4.527) si elidono l'un l'altro (gli altri termini sono funzioni pari dei quadrivettori di spin e dunque non cambiano).
Possono esistere, quindi, solo le configurazioni in cui le elicità λ dei due leptoni sono entrambe positive o entrambe negative.
Iniziamo dal caso in cui siano entrambe positive. Rispetto al caso precedente occorre solo cambiare il segno ad N, ovvero prendere adesso

$$N=\frac{1}{m}\,(b,-E\,\vec{n}) \tag{4.528}$$

cambiando, nella (4.527), i segni a tutti i prodotti scalari che coinvolgono il solo quadrivettore N. Si ha

$$
\begin{aligned}
\overline{|\mathcal{M}|^2}\Big|_{\lambda=+1} &= G_F^2\,|f_\pi|^2\,cos^2\theta_C\left\{(m^2+\mu^2)\frac{M^2-m^2-\mu^2}{2}-2m\mu\,\frac{bM}{\mu}\,\frac{bM}{m}+\right.\\
&+\ 2m\mu\,\frac{M^2-m^2-\mu^2}{2}\,\frac{1}{2m\mu}(M^2-m^2-\mu^2)+m(m^2-\mu^2)\,\frac{bM}{m}+\\
&+\ \left.\mu(m^2-\mu^2)\,\frac{bM}{\mu}+2m^2\mu^2+m\mu(m^2+\mu^2)\frac{1}{2m\mu}(M^2-m^2-\mu^2)\right\}=
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= G_F^2\ |f_\pi|^2\, cos^2\theta_C \Big\{(m^2+\mu^2)(M^2-m^2-\mu^2) - 2M^2b^2 + \\
&+ \ \frac{(M^2-m^2-\mu^2)^2}{2} + 2bM(m^2-\mu^2) + 2m^2\mu^2\Big\} = \\
&= G_F^2\ |f_\pi|^2\, cos^2\theta_C \left\{(m^2+\mu^2)(M^2-m^2-\mu^2) - \frac{(M^2-m^2-\mu^2)^2}{2} + \right. \\
&+ \left. 2m^2\mu^2 + \frac{(M^2-m^2-\mu^2)^2}{2} + 2bM(m^2-\mu^2) + 2m^2\mu^2\right\} = \\
&= G_F^2\ |f_\pi|^2\, cos^2\theta_C \cdot \\
&\quad \cdot \Big\{(m^2+\mu^2)(M^2-m^2-\mu^2) + 2bM(m^2-\mu^2) + 2m^2\mu^2\Big\} \qquad (4.529)
\end{aligned}
$$

che, nel caso in cui entrambe le elicità siano invece negative, diventa[279]

$$
\begin{aligned}
\overline{|\mathcal{M}|^2}\Big|_{\lambda=-1} &= G_F^2\ |f_\pi|^2\, cos^2\theta_C \cdot \\
&\cdot \Big\{(m^2+\mu^2)(M^2-m^2-\mu^2) - 2bM(m^2-\mu^2) + 2m^2\mu^2\Big\} \qquad (4.530)
\end{aligned}
$$

Le due espressioni differiscono per il termine $2bM(m^2-\mu^2)$ che ha il segno del valore comune delle due elicità λ.
Nell'ipotesi in cui $M >> m, \mu$ possiamo approssimare questo termine nel modo seguente

$$
\begin{aligned}
2bM(m^2-\mu^2) &= (m^2-\mu^2)\sqrt{(M^2-m^2-\mu^2)^2 - 4m^2\mu^2} \approx \\
&\approx (m^2-\mu^2)(M^2-m^2-\mu^2)\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2m\mu}{M^2-m^2-\mu^2}\right)^2\right] = \\
&= (m^2-\mu^2)(M^2-m^2-\mu^2) - \frac{2m^2\mu^2\,(m^2-\mu^2)}{M^2-m^2-\mu^2} \qquad (4.531)
\end{aligned}
$$

per cui, sostituendo, si ha

$$
\begin{aligned}
\overline{|\mathcal{M}|^2}\Big|_{\lambda=\pm 1} &= G_F^2\ |f_\pi|^2\, cos^2\theta_C \left\{ (M^2-m^2-\mu^2)\Big[(m^2+\mu^2) \pm (m^2-\mu^2)\Big] + \right. \\
&+ \left. 2m^2\mu^2\left[1 \mp \frac{m^2-\mu^2}{M^2-m^2-\mu^2}\right]\right\} \qquad (4.532)
\end{aligned}
$$

dalla quale si ricava in particolare che, sempre se $M >> m, \mu$ allora, con buona approssimazione, risulta

$$
\frac{\overline{|\mathcal{M}|^2}\Big|_{\lambda=+1}}{\overline{|\mathcal{M}|^2}\Big|_{\lambda=-1}} \approx \left(\frac{m}{\mu}\right)^2 \qquad (4.533)
$$

[279]Solo i termini lineari in n o N cambiano segno ...

4.6.2 *Il decadimento del muone*

Il decadimento del muone[280]

$$\mu^-(P) \to e^-(p) + \bar{\nu}_e(k) + \nu_\mu(K) \tag{4.534}$$

è un tipico processo debole, descritto nell'ambito del MS dal grafico di fig.19.

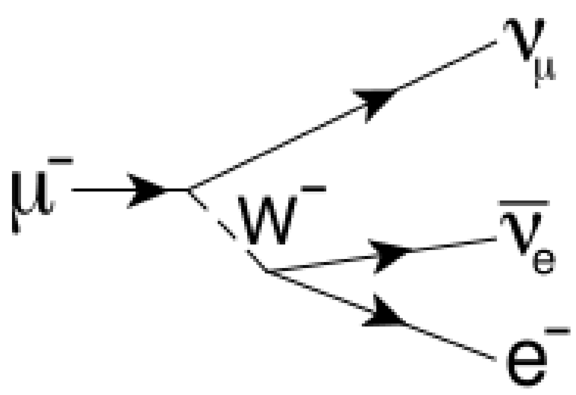


Figure 19: *Diagramma di Feynman relativo al decadimento del muone*

Nell'ambito della Teoria di Fermi, la quale è in grado di descrivere perfettamente, al primo ordine perturbativo, il processo in questione, il termine di densità lagrangiana responsabile del decadimento è il seguente

$$\mathcal{L}_w(x) = -\frac{G_F}{\sqrt{2}}\, J_\alpha^{\dagger(e)}(x)\, J^\alpha_{(\mu)}(x) \tag{4.535}$$

dove risulta[281]

$$\begin{aligned} J_\alpha^{\dagger(e)}(x) &= \bar{\psi}_{(e)}(x)\,\gamma_\alpha\,(1-\gamma_5)\,\psi_{(\nu_e)}(x) \equiv \bar{e}\,\gamma_\alpha\,(1-\gamma_5)\,\nu_e &(4.536)\\ J^\alpha_{(\mu)}(x) &= \bar{\psi}_{(\nu_\mu)}(x)\,\gamma^\alpha\,(1-\gamma_5)\,\psi_{(\mu)}(x) \equiv \bar{\nu}_\mu\,\gamma^\alpha\,(1-\gamma_5)\,\mu &(4.537)\end{aligned}$$

La larghezza di decadimento $d\Gamma$, in generale, è data, come sappiamo, dalla ben nota relazione

$$d\Gamma = \frac{1}{2S+1}\,\frac{1}{2E}\,\overline{|\mathcal{M}|^2}\,d\Phi \tag{4.538}$$

[280] Prenderemo come esempio concreto quello del muone negativo; ma le conclusioni tratte sono immediatamente estendibili al decadimento del muone positivo ...

[281] Per semplicità di notazione, indichiamo nel seguito il campo di Dirac delle varie particelle direttamente con il nome delle particelle stesse.

dove S è lo spin della particella che decade (quindi $S = 1/2$, nel caso del muone), E è l'energia della stessa nel riferimento inerziale in cui viene studiato il processo, mentre $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ è la somma sugli stati di spin iniziali e finali dei moduli quadri degli elementi di matrice invarianti che contribuiscono al decadimento e infine $d\Phi$ fornisce l'elemento di spazio delle fasi invariante associato allo stato finale.
Considereremo il processo di decadimento nel riferimento del sistema del centro di massa (CM), dove E coincide quindi con la stessa massa M del muone, per cui possiamo scrivere

$$d\Gamma_{CM} = \frac{1}{4M}\, \overline{|\mathcal{M}|^2}\, d\Phi \tag{4.539}$$

Al primo ordine perturbativo risulta (si ricordi la nota precedente la (4.328))

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= <out|\mathcal{L}(0)|in>= \\ &= -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \left[\left(\bar{u}^{(r)}_{(e)}(p)\, \gamma_\alpha (1-\gamma_5)\, v^{(b)}_{(\nu_e)}(k) \right) \cdot \left(\bar{u}^{(a)}_{(\nu_\mu)}(K)\, \gamma^\alpha (1-\gamma_5)\, u^{(s)}_{(\mu)}(P) \right) \right] \end{aligned} \tag{4.540}$$

Quanto a $\overline{|\mathcal{M}|^2}$, sulla base della (4.377), possiamo comunque concludere immediatamente che

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{G_F^2}{2}\, L^{(e)}_{\alpha\beta} \cdot L^{\alpha\beta}_{(\mu)} = 128\, G_F^2\, (pK)(kP) \tag{4.541}$$

Veniamo adesso allo spazio delle fasi invariante $d\Phi$ per il decadimento (4.534). Dalla definizione abbiamo che

$$\begin{aligned} d\Phi &= (2\pi)^4\, \delta^4(P-p-k-K)\, \frac{d^3K}{(2\pi)^3 2E_K}\, \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E_k}\, \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^5}\, \delta^4(P-p-k-K)\, \frac{d^3K}{2E_K}\, \frac{d^3k}{2E_k}\, \frac{d^3p}{2E_p} \end{aligned} \tag{4.542}$$

dove P, K, p, k sono, rispettivamente, i quadrimpulsi del muone, del suo neutrino, dell'elettrone e del suo (anti)neutrino.

Riguardo adesso alla larghezza di decadimento $d\Gamma_{CM}$ di cui alla (4.539), siccome i due neutrini non sono osservati, possiamo integrare sui loro impulsi, ottenendo

$$\begin{aligned} d\Gamma_{CM} &= \frac{1}{4M}\, \overline{|\mathcal{M}|^2}\, d\Phi \;\; \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{1}{4M}\, \frac{d^3p}{2E_p} \int \frac{d^3K}{2E_K}\, \frac{d^3k}{2E_k}\, \frac{1}{(2\pi)^5}\, \delta^4(P-p-k-K)\; 128\, G_F^2\, p_\alpha P_\beta K^\alpha k^\beta = \\ &= \frac{32\, G_F^2}{M}\, \frac{1}{(2\pi)^5}\, \frac{d^3p}{2E_p}\, p_\alpha P_\beta \int \frac{d^3K}{2E_K} \frac{d^3k}{2E_k} K^\alpha k^\beta \delta^4(P-p-k-K) \end{aligned} \tag{4.543}$$

Definiamo adesso il momento trasferito dal muone all'elettrone, i.e. il quadrivettore

$$q \equiv P - p \tag{4.544}$$

il quale, per la presenza della delta di conservazione corrisponde, evidentemente, al quadrimpulso totale[282] associato al sistema dei due neutrini, i.e.

$$q = P - p = k + K \tag{4.545}$$

Poniamo quindi

$$I^{\alpha\beta} \equiv \int \frac{d^3K}{2E_K}\frac{d^3k}{2E_k} K^\alpha k^\beta \delta^4(q - k - K) \tag{4.546}$$

Questo tensore, che ha le dimensioni del quadrato di un'energia, avendo i neutrini massa nulla, può dipendere solo, attraverso il quadrivettore q, dalle quantità $q^2\delta^{\alpha\beta}$ e $q^\alpha q^\beta$.
Questi due tensori non sono ortogonali fra loro nella metrica di Minkowski, per cui, per l'analisi del tensore $I^{\alpha\beta}$, è preferibile usare i due tensori seguenti, linearmente dipendenti dalle precedenti ma tra loro ortogonali[283]

$$q^2\delta^{\alpha\beta} + 2\,q^\alpha q^\beta; \qquad q^2\delta^{\alpha\beta} - 2\,q^\alpha q^\beta \tag{4.547}$$

Da quanto sopra, segue dunque che possiamo scrivere

$$I^{\alpha\beta} = A(q^2\delta^{\alpha\beta} + 2\,q^\alpha q^\beta) + B(q^2\delta^{\alpha\beta} - 2\,q^\alpha q^\beta) \tag{4.548}$$

dove A e B devono essere quantità scalari adimensionali.
Per esplicitare questi coefficienti, cominciamo moltiplicando la (4.548) per la quantità $q^2\delta_{\alpha\beta} - 2\,q_\alpha q_\beta$. Si ha

$$\begin{aligned} I^{\alpha\beta}(q^2\delta_{\alpha\beta} - 2\,q_\alpha q_\beta) &= (q^2\delta_{\alpha\beta} - 2\,q_\alpha q_\beta)\Big(A(q^2\delta^{\alpha\beta} + 2\,q^\alpha q^\beta) + B(q^2\delta^{\alpha\beta} - 2\,q^\alpha q^\beta)\Big) = \\ &= B\left(4(q^2)^2 + 4(q^2)^2 - 4(q^2)^2\right) = 4B\,(q^2)^2 \end{aligned} \tag{4.549}$$

D'altronde

$$I^{\alpha\beta}(q^2\delta_{\alpha\beta} - 2\,q_\alpha q_\beta) = \int \frac{d^3K}{2E_K}\frac{d^3k}{2E_k} K^\alpha k^\beta (q^2\delta_{\alpha\beta} - 2\,q_\alpha q_\beta)\ \delta^4(q - k - K) \tag{4.550}$$

---

[282]Essendo k e K quadrivettori time-like con parte temporale positiva, ne segue sia che $q^0 = E_k + E_K > 0$ come pure che $q^2 \geq 0$.

[283]Infatti

$$\left(q^2\delta^{\alpha\beta} + 2\,q^\alpha q^\beta\right)\left(q^2\delta_{\alpha\beta} - 2\,q_\alpha q_\beta\right) = 4\,(q^2)^2 - 2\,(q^2)^2 + 2\,(q^2)^2 - 4\,(q^2)^2 = 0$$

ma

$$K^\alpha k^\beta (q^2\delta_{\alpha\beta} - 2\, q_\alpha q_\beta) = q^2(kK) - 2(qK)(qk) \tag{4.551}$$

D'altronde, avendo assunto che i neutrini abbiano massa nulla, risulta che

$$\begin{aligned} q^2 &= (k+K)^2 = K^2 + k^2 + 2(kK) = 2(kK) &(4.552)\\ qK &= (k+K)\cdot K = (kK) + K^2 = (kK) &(4.553)\\ qk &= (k+K)\cdot k = k^2 + (kK) = (kK) &(4.554)\end{aligned}$$

per cui, in definitiva, si ha

$$K^\alpha k^\beta (q^2\delta_{\alpha\beta} - 2\, q_\alpha q_\beta) = q^2(kK) - 2(qK)(qk) = 2(kK)^2 - 2(kK)^2 = 0 \tag{4.555}$$

e quindi se ne conclude che il coefficiente B nella (4.548) deve essere nullo.
Nell'ipotesi di neutrini di massa nulla, il tensore $I^{\alpha\beta}$ è dunque del tipo

$$I^{\alpha\beta} = A(q^2\delta^{\alpha\beta} + 2\, q^\alpha q^\beta) \tag{4.556}$$

e, per conoscere il valore della quantità scalare A possiamo procedere di nuovo moltiplicando il tensore stesso per $(q^2\delta_{\alpha\beta} + 2\, q_\alpha q_\beta)$ e ricordando che

$$(q^2\delta^{\alpha\beta} + 2\, q^\alpha q^\beta)(q^2\delta_{\alpha\beta} + 2\, q_\alpha q_\beta) = 4\,(q^2)^2 + 2\, q^2 q^2 + 2\, q^2 q^2 + 4\, q^2 q^2 = 12(q^2)^2 \tag{4.557}$$

Si ha allora

$$\begin{aligned} 12A(q^2)^2 &= I^{\alpha\beta}(q^2\delta_{\alpha\beta} + 2\, q_\alpha q_\beta) = \\ &= \int \frac{d^3K}{2E_K}\frac{d^3k}{2E_k} K^\alpha k^\beta (q^2\delta_{\alpha\beta} + 2\, q_\alpha q_\beta)\, \delta^4(q-k-K) &(4.558)\end{aligned}$$

Ma per quanto visto prima, risulta

$$\begin{aligned} K^\alpha k^\beta (q^2\delta_{\alpha\beta} + 2\, q_\alpha q_\beta) &= q^2(kK) + 2(qK)(qk) = 2(kK)^2 + 2(kK)^2 = \\ &= 4\,(kK)^2 = (q^2)^2 &(4.559)\end{aligned}$$

D'altronde $q = P - p$ non dipende dalle variabili di integrazione k e K, quindi

$$\begin{aligned} &12\, A\, (q^2)^2 = (q^2)^2 \int \frac{d^3K}{2E_K}\frac{d^3k}{2E_k}\, \delta^4(q-k-K) \\ &\Rightarrow\ 12\, A = \int \frac{d^3K}{2E_K}\frac{d^3k}{2E_k}\, \delta^4(q-k-K) &(4.560)\end{aligned}$$

Integrando sull'impulso spaziale dell'antineutrino elettronico d^3k, otteniamo

$$\begin{aligned} 12\, A &= \int \frac{d^3K}{2E_K}\frac{1}{2\hat{E}}\, \delta(q^0 - E_K - \hat{E}) = \\ &= \int \frac{d^3K}{2|\vec{K}|}\frac{1}{2|\vec{q}-\vec{K}|}\, \delta(q^0 - |\vec{K}| - |\vec{q}-\vec{K}|) &(4.561)\end{aligned}$$

dove abbiamo tenuto conto che l'energia del neutrino muonico (masse dei neutrini nulle) è pari a $E_K = |\vec{K}|$, mentre quella dell'antineutrino elettronico $\hat{E}$, anch'essa pari al modulo del suo impulso spaziale, per via dell'integrazione in d^3k in presenza della delta di conservazione degli impulsi spaziali, ha condotto all'identificazione $\vec{k} = \vec{q} - \vec{K}$ e dunque a $\hat{E} \equiv |\vec{q} - \vec{K}|$.

L'integrale (4.561) è uno scalare di Lorentz e dunque può essere valutato indifferentemente in qualsiasi sistema di riferimento. Scegliamo quello del CM del sistema dei due neutrini, nel quale, evidentemente $\vec{q} = 0$ e dunque $\vec{K} = -\vec{k} \;\; \Rightarrow \;\; |\vec{K}| = |\vec{k}|$. In questo riferimento la (4.561) diviene

$$12\,A \;\; = \;\; \int \frac{d^3K}{4|\vec{K}|^2}\,\delta(q^0 - 2|\vec{K}|) \tag{4.562}$$

Passando adesso in coordinate polari e ponendo $x = |\vec{K}|$, abbiamo[284,285]

$$12\,A = \int_0^\infty x^2 dx\,\frac{1}{4x^2}\int d\Omega\,\delta(q^0 - 2x) = \frac{4\pi}{4}\int_0^\infty dx\;\delta(q^0 - 2x) = \frac{\pi}{2} \;\;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow A = \frac{\pi}{24} \tag{4.570}$$

e dunque, finalmente, risulta

$$I^{\alpha\beta} \;\; = \;\; \int \frac{d^3K}{2E_K}\frac{d^3k}{2E_k}K^\alpha k^\beta \delta^4(q-k-K) = A(q^2\delta^{\alpha\beta} + 2\,q^\alpha q^\beta) =$$
$$= \;\; \frac{\pi}{24}(q^2\delta^{\alpha\beta} + 2\,q^\alpha q^\beta) \tag{4.571}$$

Sostituendo allora nell'espressione (4.543) della larghezza di decadimento l'espressione di cui sopra, abbiamo

$$d\Gamma_{CM} \;\; = \;\; \frac{32\,G_F^2}{M}\,\frac{1}{(2\pi)^5}\,\frac{d^3p}{2E_p}\,p_\alpha P_\beta \int \frac{d^3K}{2E_K}\frac{d^3k}{2E_k}K^\alpha k^\beta \delta^4(P-p-k-K) =$$

[284] Si ricordi che q^0, in quanto somma delle energie dei due neutrini, è certamente positivo.

[285] Se non avessimo fatto l'ipotesi di lavorare nel sistema di riferimento dove i due neutrini hanno impulsi uguali ed opposti, allora l'integrale da fare sarebbe comunque stato il seguente

$$12\,A \;\; = \;\; \int \frac{d^3K}{2|\vec{K}|}\frac{1}{2|\vec{q} - \vec{K}|}\,\delta(q^0 - |\vec{K}| - |\vec{q} - \vec{K}|) \tag{4.563}$$

che, in coordinate polari, prendendo $\vec{q}$ come asse polare e ponendo $x \equiv |\vec{K}|$ ed $y = |\vec{q}|$, diviene

$$12\,A \;\; = \;\; \int_0^\infty \frac{x^2dx}{2x}\int d\Omega \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2-2xy\,cos\theta}}\,\delta\left(q^0 - x - \sqrt{x^2+y^2-2xy\,cos\theta}\right) \tag{4.564}$$

Consideriamo adesso l'argomento della delta, fissato l'angolo polare θ, come funzione di x. Come sappiamo, nel caso in cui la funzione $f(x)$ abbia un unico zero per $x = \bar{x}$, allora risulta

$$\delta(f(x)\,dx = dz\,\delta(z)\,\frac{dx}{df}\bigg|_{f(\bar{x})=0} \tag{4.565}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{32\,G_F^2}{M}\,\frac{1}{(2\pi)^5}\,\frac{d^3p}{2E_p}\,p_\alpha P_\beta \frac{\pi}{24}(q^2\delta^{\alpha\beta}+2\,q^\alpha q^\beta) = \\
&= \frac{G_F^2}{M}\,\frac{1}{\pi^5}\,\frac{\pi}{24}\,\frac{d^3p}{2E_p}\left(q^2(pP)+2(qp)(qP)\right) = \\
&= \frac{G_F^2}{24\pi^4\,M}\,\frac{d^3p}{2E_p}\left(q^2(pP)+2(qp)(qP)\right) \qquad (4.572)
\end{aligned}$$

D'altronde, nel riferimento del CM del muone dove stiamo valutando $d\Gamma_{CM}$, detta $E \equiv E_p$ l'energia dell'elettrone, possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
(pq) &= p(P-p) = (pP) - m^2 = EM - m^2 \approx EM && (4.573)\\
(pP) &= EM && (4.574)\\
q^2 &= (P-p)(P-p) = M^2 + m^2 - 2(pP) \approx M^2 - 2EM && (4.575)\\
(qP) &= (P-p)P = M^2 - pP = M^2 - EM && (4.576)
\end{aligned}$$

---

per cui serve di conoscere dove la funzione f si annulla, i.e. risolvere l'equazione

$$\begin{aligned}
f(\bar{x}) = 0 \quad &\Rightarrow \quad q^0 - x = \sqrt{x^2+y^2-2xy\,cos\theta} \;\Rightarrow \\
&\Rightarrow \;(q^0)^2 + x^2 - 2q^0x = x^2+y^2-2xy\,cos\theta \;\Rightarrow \\
&\Rightarrow \;(q^0)^2 - y^2 = 2x(q^0 - y\,cos\theta) \;\Rightarrow\; \bar{x} = \frac{(q^0)^2-y^2}{2(q^0-y\,cos\theta)} \qquad (4.566)
\end{aligned}$$

Quanto poi alla derivata, evidentemente è

$$\begin{aligned}
f(x) &= q^0 - x - \sqrt{x^2+y^2-2xy\,cos\theta} \;\Rightarrow \\
\frac{df}{dx} &= -1 + \frac{y\,cos\theta - x}{\sqrt{x^2+y^2-2xy\,cos\theta}} \qquad (4.567)
\end{aligned}$$

la quale, calcolata per $x=\bar{x}$, diviene

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=\bar{x}} = -1 + \frac{y\,cos\theta - x}{q^0 - x} = \frac{y\,cos\theta - q^0}{q^0-x} \qquad (4.568)$$

e dunque

$$\begin{aligned}
12\,A &= \int_0^\infty \frac{x^2dx}{2x}\int d\Omega \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2-2xy\,cos\theta}}\,\delta\left(q^0 - x - \sqrt{x^2+y^2-2xy\,cos\theta}\right) = \\
&= \frac{1}{4}\int d\Omega\; x\,dx \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-2xy\,cos\theta}}\delta(f(x)) = \frac{1}{4}\int d\Omega\;\bar{x}\,\frac{1}{q^0-\bar{x}}\;\frac{q^0-\bar{x}}{y\,cos\theta - q^0} = \\
&= -\frac{1}{4}\int d\Omega\;\frac{(q^0)^2-y^2}{2(q^0-y\,cos\theta)^2} = -\frac{2\pi}{8}((q^0)^2-y^2)\int_1^{-1} d(-cos\theta)\,\frac{1}{(q^0-y\,cos\theta)^2} = \\
&= \frac{2\pi}{8}\left((q^0)^2-y^2\right)\int_{-1}^1 dz\,\frac{1}{(q^0+yz)^2} = \frac{2\pi}{8}\left((q^0)^2-y^2\right)\left(-\frac{1}{y}\right)\left[\frac{1}{q^0+y}-\frac{1}{q^0-y}\right] = \\
&= \frac{2\pi}{8}\left((q^0)^2-y^2\right)\left(-\frac{1}{y}\right)\frac{-2y}{(q^0)^2-y^2} = \frac{4\pi}{8} = \frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; A = \frac{\pi}{24} \qquad (4.569)
\end{aligned}$$

in accordo con la (4.570).

e quindi, sostituendo, risulta

$$\begin{aligned} d\Gamma_{CM} &= \frac{G_F^2}{24\pi^4\,M}\,\frac{d^3p}{2E}\left[\left(M^2-2EM\right)EM+2EM\left(M^2-EM\right)\right]= \\ &= \frac{G_F^2}{24\pi^4\,M}\,\frac{d^3p}{2E}\left[3EM^3-4(EM)^2\right] \end{aligned} \tag{4.577}$$

da cui, semplificando, passando in coordinate polari e integrando sulle variabili angolari, ricaviamo

$$\begin{aligned} d\Gamma_{CM} &= \frac{G_F^2}{24\pi^4\,M}\,\frac{d^3p}{2E}\left[3EM^3-4(EM)^2\right]=\frac{G_F^2}{48\pi^4}\;p^2dp\,d\Omega\left[3M^2-4EM\right]= \\ &= \frac{G_F^2}{12\pi^3}\,p^2dp\,\left[3M^2-4EM\right]\approx\frac{G_F^2}{12\pi^3}\,\left[3M^2-4EM\right]\;E^2dE \end{aligned} \tag{4.578}$$

dove l'ultimo passaggio è fatto nell'ipotesi, di nuovo, di poter confondere l'impulso p con l'energia E dell'elettrone.

E' conveniente adesso definire il parametro adimensionale ϵ nel modo seguente

$$\epsilon\equiv\frac{2E}{M}\quad\Leftrightarrow E=\frac{M\epsilon}{2}\quad\rightarrow\quad d\epsilon=\frac{2}{M}\,dE\quad\Leftrightarrow\quad dE=\frac{M}{2}d\epsilon \tag{4.579}$$

Esso può variare solo fra 0 ed 1, essendo l'energia massima dell'elettrone nel CM quella per cui i due neutrini sono colineari e dunque formano un sistema con massa invariante nulla, cioè tali da possedere, insieme, una energia pari al modulo del loro impulso, uguale peraltro a quello dell'elettrone, i.e. a $p=E=M/2$. Sostituendo ϵ nell'espressione della larghezza di decadimento (4.578), si ha infine

$$\begin{aligned} d\Gamma_{CM} &= \frac{G_F^2}{12\pi^3}\,\left[3M^2-4EM\right]\;E^2dE=\frac{G_F^2}{12\pi^3}\,\left[3M^2-4M\,\frac{M\epsilon}{2}\right]\left(\frac{M\epsilon}{2}\right)^2\,\frac{M}{2}d\epsilon= \\ &= \frac{G_F^2}{12\pi^3}\,M^2[3-2\epsilon]M^3\,\frac{1}{8}\,\epsilon^2\,d\epsilon=\frac{G_F^2}{96\pi^3}\,M^5[3-2\epsilon]\,\epsilon^2\,d\epsilon \end{aligned} \tag{4.580}$$

D'altronde, posto $f(\epsilon)\equiv(3-2\epsilon)\,\epsilon^2$, abbiamo che

$$\int f(\epsilon)\,d\epsilon=\int[3-2\epsilon]\,\epsilon^2\,d\epsilon=3\cdot\left.\frac{\epsilon^3}{3}\right|_0^1-2\cdot\left.\frac{\epsilon^4}{4}\right|_0^1=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \tag{4.581}$$

quindi, quanto alla larghezza complessiva Γ del decadimento, possiamo concludere che essa vale

$$\Gamma_{CM}=\int\frac{G_F^2}{96\pi^3}\,M^5[3-2\epsilon]\,\epsilon^2\,d\epsilon=\frac{1}{192\pi^3}\,G_F^2\,M^5 \tag{4.582}$$

Nel sistema di riferimento in cui il muone decade a riposo, lo spettro dell'energia dell'elettrone emesso è descritto in fig.20 dalla funzione $f(\epsilon)\equiv f(2E/M)$, in ottimo accordo con i risultati sperimentali[286] ottenuti originariamente dal gruppo di M.Bardon et al. al sincrociclotrone di Nevis (NY Columbia University), per quanto concerne il decadimento del muone positivo.

[286] M. Bardon, P. Norton, J. Peoples, A.M. Sachs, J. Lee Franzini: *Measurement of the momentum spectrum of positrions from muon decay*; Phys. Rev. Lett. 14, 449 (1965)

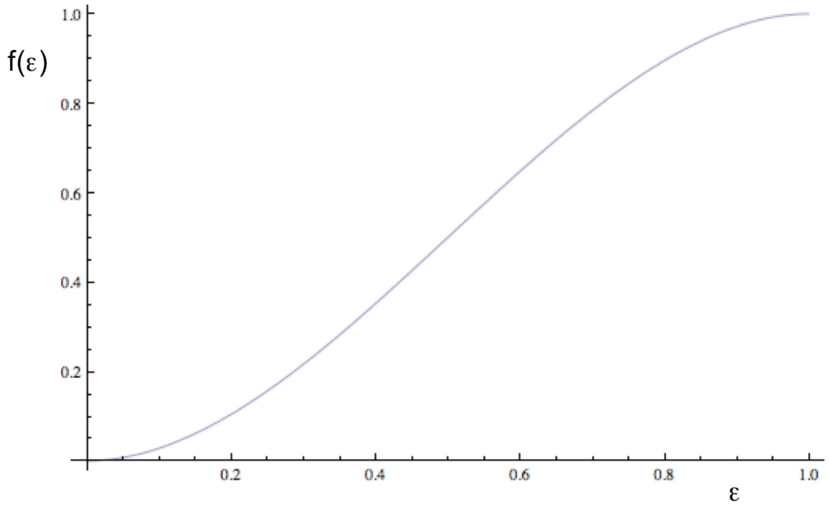


Figure 20: *Distribuzione dell'energia dell'elettrone di decadimento del mu*

Fino a questo momento abbiamo trattato il caso del decadimento del muone non polarizzato[287].

[287]In realtà quando abbiamo esplicitato la (4.572) abbiamo trascurato la massa m dell'elettrone ovvero abbiamo operato come se questo avesse massa nulla.
Si dimostra che l'effetto della massa dell'elettrone comporta una riduzione della rate di decadimento Γ per il fattore

$$\rho \equiv \left[(1-\mu^8) - 8\mu^2(1-\mu^4) - 24\mu^4 ln\,\mu\right] \tag{4.583}$$

dove $\mu \equiv m/M$ cioè rappresenta il rapporto fra la massa dell'elettrone e quella del muone.
Ripartiamo infatti dalla (4.572), i.e. dalla relazione

$$d\Gamma_{CM} = \frac{G_F^2}{24\pi^4\,M}\,\frac{d^3p}{2E_p}\left[q^2(pP) + 2(qp)(qP)\right] \tag{4.584}$$

Valutando gli invarianti nel sistema del CM, detta E l'energia dell'elettrone ed M la massa del muone, abbiamo

$$q^2 = (P-p)^2 = M^2 + m^2 - 2ME \tag{4.585}$$
$$pP = ME \tag{4.586}$$
$$qp = (P-p)p = Pp - m^2 = ME - m^2 \tag{4.587}$$
$$qP = (P-p)P = M^2 - pP = M^2 - ME \tag{4.588}$$

e dunque

$$d\Gamma_{CM} = \frac{G_F^2}{24\pi^4\,M}\,\frac{d^3p}{2E_p}\left[(M^2+m^2-2ME)ME + 2(ME-m^2)(M^2-ME)\right] \tag{4.589}$$

ma

$$\frac{p^2\,dp}{2E} = p\,\frac{p\,dp}{2E} = p\,\frac{E\,dE}{2E} = \sqrt{E^2-m^2}\,\frac{dE}{2} \tag{4.590}$$

mentre la quantità in parentesi quadra nella (4.589) vale

$$\begin{aligned}&\left[(M^2+m^2-2ME)ME + 2(ME-m^2)(M^2-ME)\right] = \\ =\;& 3M^3E + 3m^2ME - 4M^2E^2 - 2m^2M^2\end{aligned} \tag{4.591}$$

Quanto poi all'energia dell'elettrone, essa varia fra m (elettrone anch'esso fermo nel CM) ed $\hat{E}$, raggiunta quando i due neutrini sono emessi paralleli e quindi con massa invariante complessiva ancora nulla. Questo caso è equivalente a quello di un decadimento a due corpi in cui uno dei due, quello costituito dai due neutrini, ha massa invariante nulla (essendo colineari) ed energia complessiva k, coincidente con il modulo dell'impulso spaziale sia del sistema dei due neutrini che dell'elettrone. In questo caso, la conservazione dell'energia impone che

$$k + \sqrt{m^2+k^2} = M \;\Rightarrow\; k = \frac{M^2-m^2}{2M} \;\Rightarrow\; \hat{E} = M - k = \frac{M^2+m^2}{2M} \tag{4.592}$$

E' conveniente, stavolta, usare come scala dell'energia direttamente la massa dell'elettrone: ponendo allora (si osservi che questa scala e quella usata a suo tempo trattando il caso in cui l'elettrone veniva assunto di massa nulla, differiscono del fattore $1/2\mu = M/(2m)$)

$$E = m\,\epsilon \qquad e \qquad \mu = \frac{m}{M} \tag{4.593}$$

possiamo riscrivere la (4.591) nel modo seguente

$$\begin{aligned} & 3M^3E + 3m^2ME - 4M^2E^2 - 2m^2M^2 = 3M^3m\epsilon + 3m^2Mm\epsilon - 4M^2m^2\epsilon^2 - 2m^2M^2 = \\ = \; & 3M^4\mu\epsilon + 3M^4\mu^3\epsilon - 4M^4\mu^2\epsilon^2 - 2M^4\mu^2 = M^4\left[3\mu\epsilon + 3\mu^3\epsilon - 4\mu^2\epsilon^2 - 2\mu^2\right] \end{aligned} \tag{4.594}$$

e dunque risulta

$$d\Gamma_{CM} = \frac{G_F^2}{24\pi^4\,M}\,\frac{p^2dp\,d\Omega}{2E_p}\,M^4\left[3\mu\epsilon + 3\mu^3\epsilon - 4\mu^2\epsilon^2 - 2\mu^2\right] \tag{4.595}$$

ma siccome $d\Gamma_{CM}$ non dipende dalle variabili angolari, si può integrare nell'angolo solido: se poi si ricorda che

$$\begin{aligned} \frac{p^2dp}{2E_p} &= \frac{p\,pdp}{2E_p} = \frac{p\,EdE}{2E} = \frac{1}{2}p\,dE = \frac{1}{2}\,\sqrt{E^2 - m^2}dE = \frac{1}{2}m^2\sqrt{\epsilon^2 - 1}\,d\epsilon = \\ &= M^2\,\frac{\mu^2}{2}\sqrt{\epsilon^2 - 1}\,d\epsilon \end{aligned} \tag{4.596}$$

evidentemente si ottiene

$$\begin{aligned} d\Gamma_{CM} &= \frac{G_F^2}{24\pi^4\,M}\,4\pi\,M^2\,\frac{\mu^2}{2}\sqrt{\epsilon^2 - 1}\,M^4\left[3\mu\epsilon + 3\mu^3\epsilon - 4\mu^2\epsilon^2 - 2\mu^2\right]\,d\epsilon = \\ &= \frac{G_F^2}{12\pi^3}\,M^5\,\mu^2\,\sqrt{\epsilon^2 - 1}\,\left[3\mu\epsilon + 3\mu^3\epsilon - 4\mu^2\epsilon^2 - 2\mu^2\right]\,d\epsilon \end{aligned} \tag{4.597}$$

dove, vista la definizione data di ϵ e la massima energia possibile per l'elettrone, questa variabile varia fra 1 ed ϵ_M dato da

$$\epsilon_M = \frac{M^2 + m^2}{2mM} = \frac{1 + \mu^2}{2\mu} \tag{4.598}$$

Volendo adesso calcolare la larghezza totale Γ_{CM}, occorre evidentemente integrare la (4.597). Gli integrali che occorre calcolare sono elencati di seguito.

- $\int_1^{\epsilon_M} d\epsilon\sqrt{\epsilon^2 - 1}$: abbiamo

$$\int_1^{\epsilon_M} d\epsilon\sqrt{\epsilon^2 - 1} = \frac{1}{2}\left\{\epsilon_M\sqrt{\epsilon_M^2 - 1} - log\left[\epsilon_M + \sqrt{\epsilon_M^2 - 1}\right]\right\} \tag{4.599}$$

- $\int_1^{\epsilon_M} d\epsilon\,\epsilon\sqrt{\epsilon^2 - 1}$: risulta

$$\int_1^{\epsilon_M} d\epsilon\,\epsilon\sqrt{\epsilon^2 - 1} = \frac{1}{3}\left(\epsilon_M^2 - 1\right)^{3/2} \tag{4.600}$$

- $\int_1^{\epsilon_M} d\epsilon\,\epsilon^2\sqrt{\epsilon^2 - 1}$: abbiamo

$$\int_1^{\epsilon_M} d\epsilon\,\epsilon^2\sqrt{\epsilon^2 - 1} = \frac{1}{8}\left\{\epsilon_M\sqrt{\epsilon_M^2 - 1}\left(2\epsilon_M^2 - 1\right) - log\left[\epsilon_M + \sqrt{\epsilon_M^2 - 1}\right]\right\} \tag{4.601}$$

Supponiamo adesso, invece, che il muone sia polarizzato (ovvero si trovi in uno stato puro ...) e che n^μ rappresenti il quadrivettore di spin che descrive, nel riferimento assegnato, la polarizzazione del muone, ovvero che lo stato del muone sia autostato del proiettore di spin

$$\Pi = \frac{1+\gamma_5 \not{n}}{2} \tag{4.610}$$

Allora, nella espressione (4.540) dell'elemento di matrice, potremo poi continuare

---

D'altronde

$$\begin{aligned}
\epsilon_M^2 - 1 &= \left(\frac{1+\mu^2}{2\mu}\right)^2 - 1 = \left(\frac{1-\mu^2}{2\mu}\right)^2 && (4.602)\\
\epsilon_M + \sqrt{\epsilon_M^2 - 1} &= \frac{1+\mu^2}{2\mu} + \frac{1-\mu^2}{2\mu} = \frac{1}{\mu} && (4.603)\\
\epsilon_M \sqrt{\epsilon_M^2 - 1} &= \frac{1+\mu^2}{2\mu}\cdot\frac{1-\mu^2}{2\mu} = \frac{1-\mu^4}{4\mu^2} && (4.604)\\
2\epsilon_M^2 - 1 &= (\epsilon_M^2 - 1) + \epsilon_M^2 = \frac{1+\mu^4}{2\mu^2} && (4.605)
\end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned}
\int_1^{\epsilon_M} d\epsilon \sqrt{\epsilon^2 - 1} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1-\mu^4}{4\mu^2} + ln\,\mu\right) && (4.606)\\
\int_1^{\epsilon_M} d\epsilon\, \epsilon \sqrt{\epsilon^2 - 1} &= \frac{1}{3}\left(\frac{1-\mu^2}{2\mu}\right)^3 && (4.607)\\
\int_1^{\epsilon_M} d\epsilon\, \epsilon^2 \sqrt{\epsilon^2 - 1} &= \frac{1}{8}\left(\frac{1-\mu^4}{4\mu^2}\cdot\frac{1+\mu^4}{2\mu^2} + ln\,\mu\right) && (4.608)
\end{aligned}$$

per cui, quanto alla larghezza di decadimento Γ_{CM}, dalla (4.597) abbiamo infine che

$$\begin{aligned}
\Gamma_{CM} &= \frac{G_F^2}{12\pi^3} M^5 \mu^2 \left[\frac{1}{3}\left(\frac{1-\mu^2}{2\mu}\right)^3 (3\mu + 3\mu^3) - 4\mu^2\,\frac{1}{8}\frac{1-\mu^8}{8\mu^4} - 4\mu^2\,\frac{1}{8}\,ln\mu - 2\mu^2\frac{1}{2}\left(\frac{1-\mu^4}{4\mu^2} + ln\,\mu\right)\right] =\\
&= \frac{G_F^2}{12\pi^3} M^5 \mu^2 \left[\frac{(1-\mu^2)^3}{8\mu^3}\mu(1+\mu^2) - \frac{1-\mu^8}{16\mu^2} - \frac{1}{2}\mu^2 ln\mu - \frac{1-\mu^4}{4} - \mu^2 ln\,\mu\right] =\\
&= \frac{G_F^2}{12\pi^3} M^5 \mu^2 \left[\frac{(1-\mu^2)^2(1-\mu^4)}{8\mu^2} - \frac{1-\mu^8}{16\mu^2} - \frac{3}{2}\mu^2 ln\,\mu - \frac{1-\mu^4}{4}\right] =\\
&= \frac{G_F^2}{12\pi^3} M^5 \frac{1}{8}\left[(1-\mu^2)^2(1-\mu^4) - \frac{1}{2}(1-\mu^8) - 12\mu^4\,ln\,\mu - 2\mu^2(1-\mu^4)\right] =\\
&= \frac{G_F^2}{12\pi^3} M^5 \frac{1}{8}\left[(1+\mu^4)(1-\mu^4) - 2\mu^2(1-\mu^4) - \frac{1}{2}(1-\mu^8) - 12\mu^4\,ln\,\mu - 2\mu^2(1-\mu^4)\right] =\\
&= \frac{G_F^2}{12\pi^3} M^5 \frac{1}{16}\left[(1-\mu^8) - 8\mu^2(1-\mu^4) - 24\mu^4\,ln\,\mu\right] =\\
&= \frac{G_F^2}{192\pi^3} M^5 \left[(1-\mu^8) - 8\mu^2(1-\mu^4) - 24\mu^4\,ln\,\mu\right] && (4.609)
\end{aligned}$$

a sommare sugli stati di spin del muone, pur di sostituire al posto di $u^{(s)}_{(\mu)}(P)$ lo stato proiettato, i.e. $\Pi\, u^{(s)}_{(\mu)}(P)$, ottenendo quindi

$$\mathcal{M} \;=\; -\frac{G_F}{\sqrt{2}}\left[\left(\bar{u}^{(r)}_{(e)}(p)\,\gamma_\alpha(1-\gamma_5)\,v^{(b)}_{(\nu_e)}(k)\right)\cdot\left(\bar{u}^{(a)}_{(\nu_\mu)}(K)\,\gamma^\alpha(1-\gamma_5)\,\Pi\,u^{(s)}_{(\mu)}(P)\right)\right] \quad (4.611)$$

Quanto a $\overline{|\mathcal{M}|^2}$, possiamo al solito scriverlo come

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{G_F^2}{2}\; L^{(e)}_{\alpha\beta}\cdot\hat{L}^{\alpha\beta}_{(\mu)} \quad (4.612)$$

dove il tensore $L^{(e)}_{\alpha\beta}$ è definito come

$$L^{(e)}_{\alpha\beta} \;=\; \sum_{r,b}\left(\bar{u}^{(r)}_{(e)}(p)\,\gamma_\alpha(1-\gamma_5)\,v^{(b)}_{(\nu_e)}(k)\right)\left(\bar{u}^{(r)}_{(e)}(p)\,\gamma_\beta(1-\gamma_5)\,v^{(b)}_{(\nu_e)}(k)\right)^* \quad (4.613)$$

essendo p il quadrimpulso dell'elettrone e k quello del suo antineutrino.
Il calcolo fornisce[288]

$$L^{(e)}_{\alpha\beta} \;=\; 8\;[p_\alpha k_\beta + p_\beta k_\alpha - (p\cdot k)\delta_{\alpha\beta} + i\,\epsilon_{\alpha\beta\sigma\tau}\,p^\sigma k^\tau] \quad (4.621)$$

[288] Il calcolo di $L^{(e)}_{\alpha\beta}$ è del tutto analogo a quello svolto nel caso dello scattering di Cowan e Reines. Per completezza, comunque, lo riportiamo qui di seguito. Abbiamo

$$\begin{aligned}
L^{(e)}_{\alpha\beta} &= \sum_{r,b}\left(\bar{u}^{(r)}_{(e)}(p)\,\gamma_\alpha(1-\gamma_5)\,v^{(b)}_{(\nu_e)}(k)\right)\left(\bar{u}^{(r)}_{(e)}(p)\,\gamma_\beta(1-\gamma_5)\,v^{(b)}_{(\nu_e)}(k)\right)^* =\\
&= Tr\left\{\sum_{r,b}\left(\bar{u}^{(r)}_{(e)}(p)\,\gamma_\alpha(1-\gamma_5)\,v^{(b)}_{(\nu_e)}(k)\right)\left(\bar{u}^{(r)}_{(e)}(p)\,\gamma_\beta(1-\gamma_5)\,v^{(b)}_{(\nu_e)}(k)\right)^\dagger\right\} =\\
&= Tr\left\{\sum_{r,b}\left(\bar{u}^{(r)}_{(e)}(p)\,\gamma_\alpha(1-\gamma_5)\,v^{(b)}_{(\nu_e)}(k)\right)\left(v^{\dagger(b)}_{(\nu_e)}(k)\,(1-\gamma_5^\dagger)\,\gamma_\beta^\dagger\,(\bar{u}^{(r)}_{(e)}(p))^\dagger\right)\right\} =\\
&= Tr\left\{\sum_{r,b}\bar{u}^{(r)}_{(e)}(p)\,\gamma_\alpha(1-\gamma_5)\,v^{(b)}_{(\nu_e)}(k)\;\;\bar{v}^{(b)}_{(\nu_e)}(k)\gamma^0\,(1-\gamma_5)\,\gamma_\beta^\dagger\,\gamma^0 u^{(r)}_{(e)}(p)\right\} =\\
&= Tr\left\{\left(\sum_r u^{(r)}_{(e)}(p)\;\bar{u}^{(r)}_{(e)}(p)\right)\gamma_\alpha(1-\gamma_5)\left(\sum_b v^{(b)}_{(\nu_e)}(k)\;\bar{v}^{(b)}_{(\nu_e)}(k)\right)(1+\gamma_5)\gamma_\beta\right\} \quad (4.614)
\end{aligned}$$

da cui

$$L^{(e)}_{\alpha\beta} \;=\; Tr\,\{(\not p + m_e)\,\gamma_\alpha(1-\gamma_5)(\not k - m_{\nu_e})(1+\gamma_5)\gamma_\beta\} \quad (4.615)$$

Ma

$$\begin{aligned}
&(1-\gamma_5)(\not k - m_{\nu_e})(1+\gamma_5) = (1-\gamma_5)\,\not k\,(1+\gamma_5) - m_{\nu_e}(1-\gamma_5)(1+\gamma_5) =\\
&= \not k\,(1+\gamma_5)^2 = 2\,\not k\,(1+\gamma_5) \quad (4.616)
\end{aligned}$$

per cui risulta

$$L^{(e)}_{\alpha\beta} \;=\; Tr\,\{(\not p + m_e)\,\gamma_\alpha\,2\,\not k\,(1+\gamma_5)\gamma_\beta\} =$$

Per quanto riguarda il tensore $\hat{L}^{\alpha\beta}_{(\mu)}$, data la presenza del proiettore di spin, non possiamo ispirarci al risultato precedente e occore ricalcolarlo. Si ha

$$\begin{aligned}
\hat{L}^{\alpha\beta}_{(\mu)} &\equiv \sum_{a,s} \left(\bar{u}^{(a)}_{(\nu_\mu)}(K)\,\gamma^\alpha(1-\gamma_5)\,\Pi u^{(s)}_{(\mu)}(P)\right)\left(\bar{u}^{(a)}_{(\nu_\mu)}(K)\,\gamma^\beta(1-\gamma_5)\,\Pi u^{(s)}_{(\mu)}(P)\right)^* = \\
&= \sum_{a,s} Tr\left\{\left(\bar{u}^{(a)}_{(\nu_\mu)}(K)\,\gamma^\alpha(1-\gamma_5)\,\Pi u^{(s)}_{(\mu)}(P)\right)\left(\bar{u}^{(a)}_{(\nu_\mu)}(K)\,\gamma^\beta(1-\gamma_5)\,\Pi u^{(s)}_{(\mu)}(P)\right)^\dagger\right\} = \\
&= \sum_{a,s} Tr\left\{\left(\bar{u}^{(a)}_{(\nu_\mu)}(K)\,\gamma^\alpha(1-\gamma_5)\,\Pi u^{(s)}_{(\mu)}(P)\right)\left(\bar{u}^{(s)}_{(\mu)}(P)\,\gamma^0\Pi^\dagger(1-\gamma_5)(\gamma^\beta)^\dagger\gamma^0 u^{(a)}_{(\nu_\mu)}(K)\right)\right\}
\end{aligned}$$

ma, ricordando che $(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$ e che le quattro γ^μ anticommutano con la γ_5, abbiamo evidentemente che

$$\begin{aligned}
\Pi^\dagger &= \left(\frac{1+\gamma_5\; \not{n}}{2}\right)^\dagger = \frac{1+\not{n}^\dagger\gamma_5}{2} = \frac{1+\gamma^0\;\not{n}\gamma^0\gamma_5}{2} = \\
&= \gamma^0\left(\frac{1-\not{n}\gamma_5}{2}\right)\gamma^0 = \gamma^0\left(\frac{1+\gamma_5\;\not{n}}{2}\right)\gamma^0 = \gamma^0\,\Pi\,\gamma^0 \qquad (4.622)
\end{aligned}$$

e dunque

$$\begin{aligned}
\hat{L}^{\alpha\beta}_{(\mu)} &= \sum_{a,s} Tr\left\{\left(\bar{u}^{(a)}_{(\nu_\mu)}(K)\,\gamma^\alpha(1-\gamma_5)\,\Pi u^{(s)}_{(\mu)}(P)\right)\left(\bar{u}^{(s)}_{(\mu)}(P)\,\gamma^0\Pi^\dagger(1-\gamma_5)(\gamma^\beta)^\dagger\gamma^0 u^{(a)}_{(\nu_\mu)}(K)\right)\right\} = \\
&= \sum_{a,s} Tr\left\{\left(\bar{u}^{(a)}_{(\nu_\mu)}(K)\,\gamma^\alpha(1-\gamma_5)\,\Pi u^{(s)}_{(\mu)}(P)\right)\left(\bar{u}^{(s)}_{(\mu)}(P)\,\gamma^0\gamma^0\Pi\gamma^0(1-\gamma_5)\gamma^0\gamma^\beta\gamma^0\gamma^0 u^{(a)}_{(\nu_\mu)}(K)\right)\right\} \\
&= \sum_{a,s} Tr\left\{\bar{u}^{(a)}_{(\nu_\mu)}(K)\,\gamma^\alpha(1-\gamma_5)\,\Pi u^{(s)}_{(\mu)}(P)\bar{u}^{(s)}_{(\mu)}(P)\,\Pi\gamma^0(1-\gamma_5)\gamma^0\gamma^\beta u^{(a)}_{(\nu_\mu)}(K)\right\} \\
&= \sum_{a,s} Tr\left\{\bar{u}^{(a)}_{(\nu_\mu)}(K)\,\gamma^\alpha(1-\gamma_5)\,\Pi u^{(s)}_{(\mu)}(P)\bar{u}^{(s)}_{(\mu)}(P)\,\Pi(1+\gamma_5)\gamma^\beta u^{(a)}_{(\nu_\mu)}(K)\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2Tr\{\not{p}\gamma_\alpha\;\not{k}(1+\gamma_5)\gamma_\beta + m_e\,\gamma_\alpha\;\not{k}(1+\gamma_5)\gamma_\beta\} = \\
&= 2Tr\{\not{p}\gamma_\alpha\;\not{k}\gamma_\beta + \not{p}\gamma_\alpha\;\not{k}\gamma_5\gamma_\beta + m_e\,\gamma_\alpha\;\not{k}\gamma_\beta + m_e\,\gamma_\alpha\;\not{k}\gamma_5\gamma_\beta\} = \\
&= 2Tr\{\not{p}\gamma_\alpha\;\not{k}\gamma_\beta + \not{p}\gamma_\alpha\;\not{k}\gamma_5\gamma_\beta\} \qquad (4.617)
\end{aligned}$$

dove si è usato il fatto che la traccia di un numero dispari di matrici γ^α è comunque nulla. D'altronde

$$\begin{aligned}
&Tr\{\not{p}\gamma_\alpha\;\not{k}\gamma_\beta\} = p^\sigma k^\tau Tr\{\gamma_\sigma\gamma_\alpha\gamma_\tau\gamma_\beta\} = p^\sigma k^\tau\; 4(\delta_{\sigma\alpha}\delta_{\tau\beta} + \delta_{\sigma\beta}\delta_{\alpha\tau} - \delta_{\sigma\tau}\delta_{\alpha\beta}) = \\
&= 4\,[p_\alpha k_\beta + p_\beta k_\alpha - (p\cdot k)\delta_{\alpha\beta}] \qquad (4.618) \\
&Tr\{\not{p}\gamma_\alpha\;\not{k}\gamma_5\gamma_\beta\} = p^\sigma k^\tau Tr\{\gamma_\sigma\gamma_\alpha\gamma_\tau\gamma_5\gamma_\beta\} = -p^\sigma k^\tau Tr\{\gamma_\sigma\gamma_\alpha\gamma_\tau\gamma_\beta\gamma_5\} = \\
&= -4i\,p^\sigma k^\tau\,\epsilon_{\sigma\alpha\tau\beta} = 4i\,p^\sigma k^\tau\,\epsilon_{\alpha\beta\sigma\tau} \qquad (4.619)
\end{aligned}$$

e quindi risulta infine

$$\begin{aligned}
L^{(e)}_{\alpha\beta} &= 2\,Tr\{\not{p}\gamma_\alpha\;\not{k}\gamma_\beta + \not{p}\gamma_\alpha\;\not{k}\gamma_5\gamma_\beta\} = \\
&= 8\;[p_\alpha k_\beta + p_\beta k_\alpha - (p\cdot k)\delta_{\alpha\beta} + i\;\epsilon_{\alpha\beta\sigma\tau}\,p^\sigma k^\tau] \qquad (4.620)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{a,s} Tr\left\{u^{(a)}_{(\nu_\mu)}(K)\bar{u}^{(a)}_{(\nu_\mu)}(K)\,\gamma^\alpha(1-\gamma_5)\,\Pi u^{(s)}_{(\mu)}(P)\bar{u}^{(s)}_{(\mu)}(P)\,\Pi(1+\gamma_5)\gamma^\beta\right\} \\
&= Tr\left\{(\not K + m)\,\gamma^\alpha(1-\gamma_5)\;\Pi\,(\not P + M)\,\Pi\,(1+\gamma_5)\gamma^\beta\right\} \qquad (4.623)
\end{aligned}$$

dove m è la massa del neutrino muonico mentre M è quella del muone stesso. D'altronde, come sappiamo, il proiettore di spin commuta con il proiettore sugli stati a energia positiva/negativa, e dunque

$$\Pi\,(\not P + M) = (\not P + M)\,\Pi \qquad (4.624)$$

Siccome poi, essendo Π un proiettore, risulta $\Pi^2 = \Pi$, ecco che possiamo concludere che

$$\begin{aligned}
\hat{L}^{\alpha\beta}_{(\mu)} &= Tr\left\{(\not K + m)\,\gamma^\alpha(1-\gamma_5)\;\Pi\,(\not P + M)\,\Pi\,(1+\gamma_5)\gamma^\beta\right\} = \\
&= Tr\left\{(\not K + m)\,\gamma^\alpha(1-\gamma_5)\,(\not P + M)\,\Pi\,(1+\gamma_5)\gamma^\beta\right\} = \\
&= Tr\left\{(\not K + m)\,\gamma^\alpha(1-\gamma_5)\,(\not P + M)\,\Pi\,\gamma^\beta\,(1-\gamma_5)\right\} = \\
&= Tr\left\{(1-\gamma_5)(\not K + m)\,\gamma^\alpha(1-\gamma_5)\,(\not P + M)\,\Pi\,\gamma^\beta\right\} \qquad (4.625)
\end{aligned}$$

Osserviamo ora che

$$\begin{aligned}
&(1-\gamma_5)\;\not K\,\gamma^\alpha(1-\gamma_5) = \not K\,(1+\gamma_5)\,\gamma^\alpha(1-\gamma_5) = \not K\,\gamma^\alpha(1-\gamma_5)^2 = \\
&= 2\;\not K\,\gamma^\alpha(1-\gamma_5) \qquad (4.626)
\end{aligned}$$

mentre

$$(1-\gamma_5)\,m\,\gamma^\alpha(1-\gamma_5) = m\,(1-\gamma_5)\,\gamma^\alpha(1-\gamma_5) = m\,\gamma^\alpha(1+\gamma_5)(1-\gamma_5) = 0 \qquad (4.627)$$

dunque

$$\begin{aligned}
\hat{L}^{\alpha\beta}_{(\mu)} &= Tr\left\{(1-\gamma_5)(\not K + m)\,\gamma^\alpha(1-\gamma_5)\,(\not P + M)\,\Pi\,\gamma^\beta\right\} = \\
&= 2\,Tr\left\{\not K\,\gamma^\alpha(1-\gamma_5)\,(\not P + M)\,\Pi\,\gamma^\beta\right\} = 2\,Tr\left\{\gamma^\beta\;\not K\,\gamma^\alpha(1-\gamma_5)\,(\not P + M)\,\Pi\right\} = \\
&= Tr\left\{\gamma^\beta\;\not K\,\gamma^\alpha(1-\gamma_5)\,(\not P + M)\,(1+\gamma_5\,\not n)\right\} \qquad (4.628)
\end{aligned}$$

D'altronde abbiamo già visto che la traccia del prodotto di un numero dispari di γ è nulla, per cui, espandendo $(\not P + M)\,(1+\gamma_5\,\not n)$, ne ricaviamo che

$$\begin{aligned}
\hat{L}^{\alpha\beta}_{(\mu)} &= Tr\left\{\gamma^\beta\;\not K\,\gamma^\alpha(1-\gamma_5)\,(\not P + M)\,(1+\gamma_5\,\not n)\right\} = \\
&= Tr\left\{\gamma^\beta\;\not K\,\gamma^\alpha(1-\gamma_5)\;\not P\right\} + MTr\left\{\gamma^\beta\;\not K\,\gamma^\alpha(1-\gamma_5)\,\gamma_5\,\not n\right\} \qquad (4.629)
\end{aligned}$$

Il primo termine è metà di quello non polarizzato, mentre il secondo termine vale

$$\begin{aligned}
&MTr\left\{\gamma^\beta\;\not K\,\gamma^\alpha(1-\gamma_5)\,\gamma_5\,\not n\right\} = MTr\left\{\gamma^\beta\;\not K\,\gamma^\alpha(\gamma_5 - 1)\;\not n\right\} = \\
&= -MTr\left\{\gamma^\beta\;\not K\,\gamma^\alpha(1-\gamma_5)\;\not n\right\} \qquad (4.630)
\end{aligned}$$

per cui, definendo il quadrivettore R seguente

$$R \equiv P - M\,n \tag{4.631}$$

abbiamo semplicemente che

$$L^{\alpha\beta}_{(\mu)} = 4\,\left[K^\alpha R^\beta + K^\beta R^\alpha - (K\cdot R)\delta^{\alpha\beta} + i\,\epsilon^{\alpha\beta\sigma\tau}\,K_\sigma R_\tau\right] \tag{4.632}$$

da cui si ricava infine, in perfetta analogia con la (4.541) ottenuta nel caso non polarizzato, che

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = 64\,G_F^2\,(pK)(kR) \tag{4.633}$$

ovvero un'espressione che, a parte la sostituzione $P \to R$ è la metà di quanto ottenuto nel caso non polarizzato. Questo non deve meravigliare in quanto $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ è la somma sugli stati di spin dei moduli quadri degli elementi di matrice e, nel caso non polarizzato[289], quanto al muone, questi stati indipendenti sono evidentemente due, mentre nel caso polarizzato, esso è naturalmente uno solo ...
Venendo adesso all'espressione di $d\Gamma_{CM}$, stavolta non dobbiamo, ovviamente, mediare sugli stati di spin iniziali visto che esso è uno solo, e dunque abbiamo

$$d\Gamma_{CM} = \frac{1}{2M}\,\overline{|\mathcal{M}|^2}\,d\Phi \tag{4.634}$$

ovvero, per quanto già visto in precedenza (cfr. (4.543)), risulta

$$d\Gamma_{CM} \;=\; \frac{32\,G_F^2}{M}\,\frac{1}{(2\pi)^5}\,\frac{d^3p}{2E_p}\,p_\alpha R_\beta \int \frac{d^3K}{2E_K}\frac{d^3k}{2E_k}K^\alpha k^\beta \delta^4(P-p-k-K) \tag{4.635}$$

Definendo al solito

$$q \equiv P - p = K + k \tag{4.636}$$

e integrando sugli impulsi dei neutrini, essendo per la (4.571) che

$$I^{\alpha\beta} \;=\; \int \frac{d^3K}{2E_K}\frac{d^3k}{2E_k}K^\alpha k^\beta\delta^4(q-k-K) = \frac{\pi}{24}(q^2\delta^{\alpha\beta} + 2\,q^\alpha q^\beta) \tag{4.637}$$

otteniamo, in accordo con la (4.572)

$$\begin{aligned} d\Gamma_{CM} &= \frac{32\,G_F^2}{M}\,\frac{1}{(2\pi)^5}\,\frac{d^3p}{2E_p}\,p_\alpha R_\beta \frac{\pi}{24}(q^2\delta^{\alpha\beta} + 2\,q^\alpha q^\beta) = \\ &= \frac{G_F^2}{24\pi^4\,M}\,\frac{d^3p}{2E_p}\left[q^2(pR) + 2(qp)(qR)\right] \end{aligned} \tag{4.638}$$

[289]Il caso non polarizzato si ottiene sommando i due $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ corrispondenti alle due polarizzazioni ortogonali individuate rispettivamente dai proiettori $\Pi = \Pi_+ = \frac{1+\gamma_5\,\not{n}}{2}$ e $\Pi_- = \frac{1-\gamma_5\,\not{n}}{2}$. Il primo $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ è proporzionale, come abbiamo visto, a $R = R_+ = P - M\,n$ mentre il secondo, evidentemente, è proporzionale a $R_- = P + M\,n$ e dunque la loro somma dipende da $2P$ ovvero vale appunto $128\,G_F^2\,(pK)(kP)$, in accordo con quanto già ottenuto appunto nel caso non polarizzato.

D'altronde, nel riferimento del CM abbiamo già visto che

$$q^2 = (P-p)^2 = M^2 + m^2 - 2EM \approx M^2 - 2EM \tag{4.639}$$

mentre abbiamo

$$pR = p(P - Mn) = pP - M\,pn = EM + M|\vec{p}|cos\theta \tag{4.640}$$

dove abbiamo usato il fatto che, nel CM, il quadrivettore di spin del muone ha la struttura $n = (0, \vec{n})$ con $\vec{n}$ versore opportuno, e abbiamo indicato con θ l'angolo fra il vettore $\vec{n}$ e la parte spaziale $\vec{p}$ del quadrimpulso p dell'elettrone.
Analogamente risulta

$$qp = (P-p)p = EM - m^2 \approx EM \tag{4.641}$$

mentre, quanto a qR, si ha (si ricordi che $Pn = 0$ e che stiamo trascurando di nuovo la massa dell'elettrone in confronto alla sua energia)

$$\begin{aligned} qR &= (P-p)R = (P-p)(P-Mn) = M^2 - EM - M|\vec{p}|cos\theta \\ &\approx M^2 - EM(1+cos\theta) \end{aligned} \tag{4.642}$$

dunque

$$\begin{aligned} d\Gamma_{CM} &= \frac{G_F^2}{24\pi^4\,M}\,\frac{d^3p}{2E_p}\left[q^2(pR) + 2(qp)(qR)\right] = \\ &= \frac{G_F^2}{24\pi^4\,M}\,\frac{d^3p}{2E_p}\left[(M^2-2EM)EM(1+cos\theta) + 2EM\left(M^2 - EM(1+cos\theta)\right)\right] = \\ &= \frac{G_F^2}{48\pi^4\,M}\,\frac{p^2\,dp\,d\Omega}{E_p}\left[(1+cos\theta)(EM^3 - 4E^2M^2) + 2EM^3\right] \end{aligned} \tag{4.643}$$

D'altronde, nell'approssimazione in cui si trascura la massa dell'elettrone in confronto alla sua energia, abbiamo che $p^2\,dp = p\,E\,dE \approx E^2\,dE$, per cui, sostituendo ed integrando nell'angolo azimutale, otteniamo che

$$d\Gamma_{CM} = \frac{G_F^2}{24\pi^3\,M}\,E\,dE\,sin\theta\,d\theta\left[(1+cos\theta)(EM^3 - 4E^2M^2) + 2EM^3\right] \tag{4.644}$$

Definendo adesso, al solito, la quantità adimensionale ϵ nel modo seguente

$$\epsilon \equiv \frac{2E}{M} \tag{4.645}$$

risulta[290]

$$
\begin{aligned}
d\Gamma_{CM} &= \frac{G_F^2}{24\pi^3\, M}\left(\frac{M}{2}\right)^2 \epsilon\, d\epsilon\, sin\theta\, d\theta \left[(1+cos\theta)\left(\frac{M}{2}M^3\epsilon - M^4\epsilon^2\right) + M^4\epsilon\right] = \\
&= \frac{G_F^2}{96\pi^3} M^5\epsilon^2\, d\epsilon\, sin\theta\, d\theta \left[(1+cos\theta)\left(\frac{1}{2}-\epsilon\right)+1\right] = \\
&= \frac{G_F^2}{192\pi^3} M^5\, sin\theta\, d\theta\, \left[(3-2\epsilon)+(1-2\epsilon)cos\theta\right]\, \epsilon^2\, d\epsilon \qquad (4.647)
\end{aligned}
$$

Integrando questa espressione in $d\epsilon$ fra 0 e 1, otteniamo la distribuzione angolare dell'elettrone rispetto alla direzione di polarizzazione del muone nel suo CM, a prescindere dall'energia dell'elettrone stesso.
Poiché $\int_0^1 \epsilon^2\, d\epsilon = 1/3$ e $\int_0^1 \epsilon^3\, d\epsilon = 1/4$, risulta

$$
\begin{aligned}
d\Gamma_{CM} &= \frac{G_F^2}{96\pi^3} M^5\, sin\theta\, d\theta \left[(1+cos\theta)\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{3}\right] = \\
&= \frac{G_F^2}{96\pi^3}\frac{M^5}{12}\, sin\theta\, d\theta\, [-(1+cos\theta)+4] = \\
&= \frac{G_F^2}{96\pi^3}\frac{M^5}{12}\, sin\theta\, d\theta\, (3-cos\theta) = \frac{G_F^2}{96\pi^3}\frac{M^5}{4}\, sin\theta\, d\theta \left(1-\frac{cos\theta}{3}\right) = \\
&= \frac{G_F^2}{192\pi^3} M^5\, \frac{1}{2}\, sin\theta\, d\theta \left(1-\frac{cos\theta}{3}\right) \qquad (4.648)
\end{aligned}
$$

da cui è facile riconoscere che risulta

$$
\left(\frac{d\Gamma_{CM}}{d\Omega}\right)_{pol} = \left(\frac{d\Gamma_{CM}}{d\Omega}\right)_{unpol} \frac{1}{2}\left(1-\frac{cos\theta}{3}\right) \qquad (4.649)
$$

Questo risultato vale, come si è visto, se integriamo su tutto lo spettro dell'elettrone. La (4.647) mostra chiaramente però che, se l'energia E dell'elettrone è inferiore ad $M/4$, ovvero se $\epsilon < 1/2$, allora $\frac{d^2\Gamma_{CM}}{d\epsilon\; d(-cos\theta)}$ è massima per $\theta = 0$ e minima per $\theta = \pi$, mentre se $1/2 < \epsilon < 1$ ovvero per energie superiori ad $M/4$, accade l'opposto.

[290]Integrando in $d\theta$, poiché $\int_0^\pi sin\theta\, d\theta\, cos\theta = 0$ e $\int_0^\pi sin\theta\, d\theta = 2$, dalla (4.647) ricaviamo

$$
\begin{aligned}
d\Gamma_{CM} &= \frac{G_F^2}{96\pi^3} M^5\epsilon^2\, d\epsilon \left[2(\frac{1}{2}-\epsilon)+2\right] = \\
&= \frac{G_F^2}{96\pi^3} M^5\epsilon^2\, d\epsilon\, (3-2\epsilon) \qquad (4.646)
\end{aligned}
$$

cioè lo stesso risultato ottenuto nel caso non polarizzato ...

Se lo spettro dell'elettrone viene integrato a partire da $\epsilon = 0$ fino al valore $x \leq 1$, allora risulta che

$$\begin{aligned}
\frac{d\Gamma_{CM}}{d(-cos\theta)} &= \frac{G_F^2}{96\pi^3} M^5 \left[(1 + cos\theta) \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) + \frac{x^3}{3} \right] = \\
&= \frac{G_F^2}{192\pi^3} M^5 \, x^3 \, \left[\left(1 - \frac{x}{2} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{x}{2} \right) \, cos\theta \right]
\end{aligned} \tag{4.650}$$

Questa espressione, rispetto a θ, è massima per $\theta = 0$ solo se $x < 2/3$, è indipendente da θ (isotropa) per $x = 2/3$ e risulta minima per $\theta = 0$ (e massima, invece, per $\theta = \pi$) quando $x > 2/3$.

In particolare, l'asimmetria legata alla violazione della parità è massimizzata se lo spettro viene integrato fra $1/2 \leq \epsilon \leq 1$ perché in questa regione essa è tutta dello stesso segno e lo spazio delle fasi, comunque, è maggiore che nel caso in cui $\epsilon \leq 1/2$.

Questa è una delle ragioni per le quali, nell'esperimento di Garwin e Lederman sulla evidenza della violazione della parità nel decadimento[291] del pione e del muone, lo spettro di energia dei positroni rivelati è quello superiore a $25\, MeV$.

[291] L'esperimento in questione studiò i decadimenti del pione e del muone positivi, ma la conclusione tratta adesso resta valida anche in quel caso, solo che le elicità si scambiano di segno.

4.6.3 *Il decadimento del neutrone*

Tratteremo qui sia il neutrone che il protone come se fossero due particelle di Dirac, senza struttura interna.
Il processo che vogliamo studiare è il decadimento debole

$$n(P,s) \to p(K,a) + e^-(p,r) + \bar{\nu}(k,b) \tag{4.651}$$

dove P, K, p e k sono, rispettivamente, i quadrimpulsi del neutrone, protone, elettrone e antineutrino elettronico, mentre s, a, r, b individuano i rispettivi stati di spin.
Se indichiamo con M la massa del neutrone, come sappiamo, risulta

$$d\Gamma_{CM} = \frac{1}{4M}\,\overline{|\mathcal{M}|^2}\,d\Phi \tag{4.652}$$

dove abbiamo tenuto conto dello spin del neutrone, abbiamo assunto che esso fosse non polarizzato e, al solito, abbiamo indicato con $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ la somma dei moduli quadri degli elementi di matrice su tutti gli stati di spin iniziali e finali. Ciascun elemento di matrice, il cui modulo quadro entra nella somma, è definito dal seguente termine della Lagrangiana debole di corrente carica

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{G_F}{\sqrt{2}}\left[\bar{\psi}_p(x)\gamma^\mu(1-\gamma_5)\psi_n(x)\right]\left[\bar{\psi}_e(x)\gamma^\mu(1-\gamma_5)\psi_\nu(x)\right] \tag{4.653}$$

e dunque, per quanto già visto riguardo al decadimento del muone, è

$$\mathcal{M} \;=\; -\frac{G_F}{\sqrt{2}}\left(\bar{u}^{(r)}_{(e)}(p)\,\gamma_\mu(1-\gamma_5)\,v^{(b)}_{(\nu)}(k)\right)\cdot\left(\bar{u}^{(a)}_p(K)\,\gamma^\mu(1-\gamma_5)\,u^{(s)}_n(P)\right) \tag{4.654}$$

Il confronto con quanto ottenuto nel caso del decadimento del muone, tenuto presente che, come abbiamo visto, i termini di massa non contribuiscono a $\overline{|\mathcal{M}|^2}$, ci permette di concludere immediatamente che, anche in questo caso, sarà

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = 128\,G_F^2\,(pK)(kP) \tag{4.655}$$

Venendo ora all'elemento differenziale dello spazio delle fasi invariante, esso, per sua definizione, è il seguente

$$d\Phi \;=\; (2\pi)^4\,\delta^4(P-p-k-K)\,\frac{d^3K}{(2\pi)^3 2E_K}\,\frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E_k}\,\frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E} \tag{4.656}$$

dove abbiamo indicato con E_K l'energia del protone, con E_k l'energia dell'antineutrino e con E l'energia dell'elettrone.
Assumendo quindi di non osservare lo stato del protone e dell'antineutrino e trattando la massa di quest'ultimo come se fosse nulla, quanto alla larghezza di decadimento avremo

$$d\Gamma_{CM} = \frac{128\,G_F^2}{4M}\frac{d^3p}{2E}\frac{1}{2\pi^5}\,p_\alpha P_\beta\int\frac{d^3K}{2E_K}\frac{d^3k}{2k}\,K^\alpha k^\beta\delta^4(P-p-k-K) \tag{4.657}$$

ovvero, ponendo

$$q = P - p \tag{4.658}$$

e definendo come abbiamo fatto quando abbiamo trattato il decadimento del muone

$$I^{\alpha\beta} \equiv \int \frac{d^3K}{2E_K} \frac{d^3k}{2k} \, K^\alpha k^\beta \delta^4(P - p - k - K) \tag{4.659}$$

possiamo riscrivere la larghezza del decadimento nel modo seguente

$$d\Gamma_{CM} = \frac{32\, G_F^2}{M} \frac{d^3p}{2E} \frac{1}{2\pi^5} \; p_\alpha P_\beta I^{\alpha\beta} \tag{4.660}$$

La quantità $I^{\alpha\beta}$ è un tensore di Lorentz che può dipendere solo dal quadrivettore q^α (e da invarianti, come q^2 e le masse quadre delle particelle sul cui impulso viene fatta l'integrazione, ovvero, in questo caso, dalla sola massa quadra del protone $\hat{M}^2$), dunque sarà del tipo

$$I^{\alpha\beta} = f \cdot q^\alpha q^\beta + g \cdot \delta^{\alpha\beta} \tag{4.661}$$

dove f e g saranno, per quanto detto sopra, opportune funzioni[292] di q^2 ed $\hat{M}^2$. Osserviamo ora che

$$\begin{aligned} I^{\alpha\beta}\, \delta_{\alpha\beta} &= f \cdot q^2 + 4g & (4.663)\\ I^{\alpha\beta}\, q_\alpha\, q_\beta &= f \cdot (q^2)^2 + g \cdot q^2 & (4.664) \end{aligned}$$

e per questa strada, valutando cioè le due quantità (4.663) e (4.664), sarà possibile determinare le espressioni delle funzioni f e g.
Iniziamo dunque considerando la quantità $I^{\alpha\beta}\, \delta_{\alpha\beta}$. Abbiamo

$$I^{\alpha\beta}\, \delta_{\alpha\beta} = \int \frac{d^3K}{2E_K} \frac{d^3k}{2k} \, (Kk) \delta^4(q - k - K) \tag{4.665}$$

La presenza della delta impone che $q = k + K$ e dunque, essendo il neutrino di massa nulla, che

$$q^2 = k^2 + 2(kK) + K^2 = 2(kK) + \hat{M}^2 \quad \Rightarrow \quad 2(kK) = q^2 - \hat{M}^2 \tag{4.666}$$

[292]Nel limite in cui $\hat{M} \to 0$ si dovrà evidentemente ritrovare quanto ottenuto nel caso del decadimento del muone, dove l'integrale era fatto sugli impulsi dei due neutrini, i.e.

$$f \to \frac{\pi}{12}; \qquad\qquad g \to \frac{\pi}{24}\, q^2 \tag{4.662}$$

per cui ricaviamo che, posto $q = (q^0, \vec{Q})$, risulta

$$\begin{aligned} I^{\alpha\beta}\,\delta_{\alpha\beta} &= \frac{q^2 - \hat{M}^2}{2} \int \frac{d^3K}{2E_K} \frac{d^3k}{2k}\, \delta(q^0 - k - E)\, \delta^3(\vec{Q} - \vec{k} - \vec{K}) = \\ &= \frac{q^2 - \hat{M}^2}{8} \int \frac{1}{\tilde{E}} \frac{k^2\, dk\, d\Omega}{k}\, \delta(q^0 - k - \tilde{E}) \end{aligned} \tag{4.667}$$

dove abbiamo integrato sull'impulso spaziale del protone e abbiamo posto

$$\tilde{E} = \sqrt{\hat{M}^2 + |\vec{Q} - \vec{k}|^2} = \sqrt{\hat{M}^2 + Q^2 + k^2 - 2Qkcos\theta} \tag{4.668}$$

Chiaramente la delta restante impone una energia del protone tale che $\tilde{E} = q^0 - \overline{k}$ dove $\overline{k}$ è il valore dell'energia del neutrino che azzera la funzione

$$F \equiv q^0 - k - \tilde{E} = q^0 - k - \sqrt{\hat{M}^2 + Q^2 + k^2 - 2Qkcos\theta} \tag{4.669}$$

e dunque tale che

$$\begin{aligned} q^0 - \overline{k} &= \sqrt{\hat{M}^2 + Q^2 + \overline{k}^2 - 2Q\overline{k}cos\theta} \\ &\Rightarrow\ (q^0)^2 + (\overline{k})^2 - 2q^0\overline{k} = \hat{M}^2 + Q^2 + \overline{k}^2 - 2Q\overline{k}cos\theta \\ &\Rightarrow\ 2\overline{k}(q^0 - Qcos\theta) = (q^0)^2 - \hat{M}^2 - Q^2 \equiv q^2 - \hat{M}^2 \\ &\Rightarrow\ \overline{k} = \frac{q^2 - \hat{M}^2}{2\left[(q^0 - Qcos\theta)\right]} \end{aligned} \tag{4.670}$$

Per poter determinare l'integrale (4.667), occorre valutare la derivata seguente

$$\left.\frac{dF}{dk}\right|_{k=\overline{k}} = -1 - \frac{2k - 2Qcos\theta}{2\tilde{E}} = \frac{-\tilde{E} - \overline{k} + Qcos\theta}{\tilde{E}} \tag{4.671}$$

che, valutata appunto per $k = \overline{k}$, fornisce

$$\left.\frac{dF}{dk}\right|_{k=\overline{k}} = \frac{-q^0 + \overline{k} - \overline{k} + Qcos\theta}{\tilde{E}(\overline{k})} = \frac{Qcos\theta - q^0}{\tilde{E}(\overline{k})} \tag{4.672}$$

Ricordando adesso che

$$\int \delta(f(x))dx = \sum_i \int dx\, \frac{\delta(x - x_i)}{\left|\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i}} \tag{4.673}$$

dove la somma è fatta sugli zeri della funzione data, ecco che abbiamo

$$\begin{aligned} I^{\alpha\beta}\delta_{\alpha\beta} &= \frac{q^2 - \hat{M}^2}{8} \int \frac{1}{\tilde{E}}\, k\, dk\, d\Omega\, \delta(q^0 - k - \tilde{E}) = \\ &= \frac{q^2 - \hat{M}^2}{8} \int d\Omega\, \frac{1}{\tilde{E}(\overline{k})}\, \overline{k}\, \frac{1}{\left|\frac{Qcos\theta - q^0}{\tilde{E}(\overline{k})}\right|} \end{aligned} \tag{4.674}$$

Ma $q^2 > 0$ poiché $q = k + K$ e dunque $q^0 > Q$ per cui il valore assoluto della derivata (4.672) coincide con la sua opposta. Tenendo conto di questo e sostituendo la (4.670) nella (4.674) abbiamo dunque che

$$\begin{aligned} I^{\alpha\beta}\delta_{\alpha\beta} &= \frac{q^2 - \hat{M}^2}{8} \int d\Omega \, \frac{q^2 - \hat{M}^2}{2(q^0 - Qcos\theta)^2} = \frac{(q^2 - \hat{M}^2)^2}{16} \, 2\pi \int \frac{d(-cos\theta)}{(q^0 - Qcos\theta)^2} = \\ &= \frac{2\pi}{16} (q^2 - \hat{M}^2)^2 \int_{-1}^{1} \frac{dz}{(q^0 + Qz)^2} \end{aligned} \tag{4.675}$$

D'altronde, l'integrale della (4.675) vale

$$\int_{-1}^{1} \frac{dz}{(q^0 + Qz)^2} = -\frac{1}{Q} \left(\frac{1}{q^0 + Q} - \frac{1}{q^0 - Q} \right) = -\frac{1}{Q} \, \frac{-2Q}{[(q^0)^2 - Q^2]} = \frac{2}{q^2} \tag{4.676}$$

quindi, sostituendo nella (4.675), otteniamo infine

$$I^{\alpha\beta}\delta_{\alpha\beta} = \frac{\pi}{4} \, \frac{(q^2 - \hat{M}^2)^2}{q^2} \tag{4.677}$$

Veniamo ora a calcolare $I^{\alpha\beta}q_\alpha q_\beta$. Si ha

$$I^{\alpha\beta}q_\alpha q_\beta = \int \frac{d^3K}{2E_K} \frac{d^3k}{k} \, (Kq) \, (kq) \, \delta^4(q - k - K) \tag{4.678}$$

D'altronde

$$q^2 = (K + k)^2 = \hat{M}^2 + 2kK \;\;\Rightarrow\;\; 2kK = q^2 - \hat{M}^2 \tag{4.679}$$

Ma poiché abbiamo assunto che il neutrino abbia massa nulla, ecco che

$$\begin{aligned} & qk = (k + K)k = Kk + k^2 = Kk \;\;\Rightarrow\;\; 2kK = 2qk = q^2 - \hat{M}^2 \Rightarrow \\ & \Rightarrow qk = \frac{q^2 - \hat{M}^2}{2} \end{aligned} \tag{4.680}$$

D'altronde

$$\begin{aligned} & q^2 \equiv qk + qK \;\;\Rightarrow\;\; 2qK = 2q^2 - 2qk = q^2 + \hat{M}^2 \Rightarrow \\ & \Rightarrow qK = \frac{q^2 + \hat{M}^2}{2} \end{aligned} \tag{4.681}$$

Sostituendo nella (4.678) abbiamo quindi che

$$\begin{aligned} I^{\alpha\beta}q_\alpha q_\beta &= \int \frac{d^3K}{2E_K} \frac{d^3k}{k} \, (Kq) \, (kq) \, \delta^4(q - k - K) = \\ &= \frac{1}{4} (q^2 + \hat{M}^2)(q^2 - \hat{M}^2) \int \frac{d^3K}{2E_K} \frac{d^3k}{k} \, \delta^4(q - k - K) \end{aligned} \tag{4.682}$$

Ma abbiamo gia visto che

$$\frac{q^2 - \hat{M}^2}{2} \int \frac{d^3K}{2E_K} \frac{d^3k}{k} \, \delta^4(q - k - K) = I^{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta} = \frac{\pi}{4} \frac{(q^2 - \hat{M}^2)^2}{q^2} \tag{4.683}$$

dunque possiamo concludere che

$$I^{\alpha\beta} q_\alpha q_\beta = \frac{q^2 + \hat{M}^2}{2} I^{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta} = \frac{q^2 + \hat{M}^2}{2} \frac{\pi}{4} \frac{(q^2 - \hat{M}^2)^2}{q^2} \tag{4.684}$$

Osserviamo adesso che, nel limite in cui $\hat{M}^2 \to 0$ ritroviamo quanto ottenuto nel caso del decadimento del muone, dove l'integrazione avveniva sugli impulsi dei due neutrini, infatti si ha

$$I^{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta} = \frac{\pi}{4} \frac{(q^2 - \hat{M}^2)^2}{q^2} \qquad \to \qquad \frac{\pi}{4} \, q^2 \tag{4.685}$$

$$I^{\alpha\beta} q_\alpha q_\beta = \frac{q^2 + \hat{M}^2}{2} \frac{\pi}{4} \frac{(q^2 - \hat{M}^2)^2}{q^2} \qquad \to \qquad \frac{\pi}{8} \, (q^2)^2 \tag{4.686}$$

In quel caso, infatti, avevamo trovato che

$$I^{\alpha\beta} = \frac{\pi}{24} \left(q^2 \delta^{\alpha\beta} + 2 q^\alpha q^\beta \right) \tag{4.687}$$

da cui, appunto

$$I^{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta} = \frac{\pi}{24} \left(4q^2 + 2q^2 \right) = \frac{\pi}{4} \, q^2 \tag{4.688}$$

$$I^{\alpha\beta} q_\alpha q_\beta = \frac{\pi}{24} \left(q^2 q^2 + 2 q^2 q^2 \right) = \frac{\pi}{8} \, (q^2)^2 \tag{4.689}$$

Siamo adesso in grado di esplicitare le funzioni f e g di cui alla (4.661), infatti, dalle (4.663) e (4.664) ricaviamo che

$$q^2 \, I^{\alpha\beta} \, \delta_{\alpha\beta} = f \cdot (q^2)^2 + 4g \cdot q^2 \tag{4.690}$$

$$I^{\alpha\beta} \, q_\alpha \, q_\beta = f \cdot (q^2)^2 + g \cdot q^2 \tag{4.691}$$

e quindi

$$f = \frac{4 \, I^{\alpha\beta} \, q_\alpha \, q_\beta - q^2 \, I^{\alpha\beta} \, \delta_{\alpha\beta}}{3(q^2)^2} \tag{4.692}$$

$$g = \frac{q^2 \, I^{\alpha\beta} \, \delta_{\alpha\beta} - I^{\alpha\beta} \, q_\alpha \, q_\beta}{3q^2} \tag{4.693}$$

Dunque

$$f = \frac{1}{3(q^2)^2} \left(\frac{\pi}{2} \frac{q^2 + \hat{M}^2}{q^2} \, (q^2 - \hat{M}^2)^2 - q^2 \, \frac{\pi}{4} \frac{(q^2 - \hat{M}^2)^2}{q^2} \right) =$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{3(q^2)^2}\,\frac{\pi}{4}\,(q^2-\hat{M}^2)^2\,\frac{2(q^2+\hat{M}^2-q^2)}{q^2} = \\
&= \frac{\pi}{12(q^2)^3}\,(q^2-\hat{M}^2)^2\,(q^2+2\hat{M}^2) \qquad (4.694) \\
g &= \frac{1}{3q^2}\left(q^2\,\frac{\pi}{4}\,\frac{(q^2-\hat{M}^2)^2}{q^2} - \frac{\pi}{8}\,\frac{q^2+\hat{M}^2}{q^2}\,(q^2-\hat{M}^2)^2\right) = \\
&= \frac{1}{3q^2}\,\frac{\pi}{8}\,(q^2-\hat{M}^2)^2\,\frac{2q^2-(q^2+\hat{M}^2)}{q^2} = \\
&= \frac{\pi}{24(q^2)^2}\,(q^2-\hat{M}^2)^3 \qquad (4.695)
\end{aligned}
$$

Riprendendo allora l'espressione (4.660) del rate differenziale di decadimento, otteniamo

$$
\begin{aligned}
d\Gamma_{CM} &= \frac{32\,G_F^2}{M}\,\frac{d^3p}{2E}\,\frac{1}{2\pi^5}\;p_\alpha P_\beta I^{\alpha\beta} = \frac{32\,G_F^2}{(2\pi^5)M}\,\frac{d^3p}{2E}\;p_\alpha P_\beta\left(f\cdot q^\alpha q^\beta + g\cdot\delta^{\alpha\beta}\right) = \\
&= \frac{32\,G_F^2}{(2\pi^5)M}\,\frac{d^3p}{2E}\,\left[f\cdot(pq)(Pq) + g\cdot(pP)\right] \qquad (4.696)
\end{aligned}
$$

Nel riferimento del CM (neutrone fermo) dove stiamo trattando il processo, avendo indicato con M la massa del neutrone, con m la massa dell'elettrone e con E la sua energia, abbiamo

$$
\begin{aligned}
(pP) &= M\,E \qquad (4.697) \\
(pq) &= p(P-p) = M\,E - m^2 \qquad (4.698) \\
(Pq) &= P(P-p) = M^2 - M\,E \qquad (4.699) \\
(qq) &= q^2 = (P-p)^2 = M^2 + m^2 - 2M\,E \qquad (4.700)
\end{aligned}
$$

Usando anche l'identità $d^3p \equiv p^2\,dp\,d\Omega\; = p\,E\,dE\,d\Omega$, si ottiene

$$
\begin{aligned}
d\Gamma_{CM} &= \frac{32\,G_F^2}{(2\pi^5)M}\,\frac{p\,E\,dE\,d\Omega}{2E}\,\Big[f\cdot(M\,E-m^2)(M^2-M\,E) + g\cdot(M\,E)\Big] = \\
&= \frac{G_F^2}{\pi^5\,M}\,\frac{p\,dE\,d\Omega}{2}\,\Big[f\cdot(M\,E-m^2)(M-E) + g\cdot E\Big]\,M = \\
&= \frac{G_F^2}{2\pi^5}\,\Big[f\cdot(M\,E-m^2)(M-E) + g\cdot E\Big]\;p\,dE\,d\Omega \qquad (4.701)
\end{aligned}
$$

Riguardo alle espressioni (4.694) e (4.695) di f e g, si ha

$$
\begin{aligned}
f &= \frac{\pi}{12(q^2)^3}\,(q^2-\hat{M}^2)^2\,(q^2+2\hat{M}^2) = \\
&= \frac{\pi}{12}\,\frac{(M^2+m^2-2ME-\hat{M}^2)^2(M^2+m^2-2ME+2\hat{M}^2)}{(M^2+m^2-2ME)^3} \qquad (4.702)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} g &= \frac{\pi}{24(q^2)^2}\,(q^2-\hat{M}^2)^3 = \\ &= \frac{\pi}{24}\,\frac{(M^2+m^2-2ME-\hat{M}^2)^3}{(M^2+m^2-2ME)^2} \end{aligned} \tag{4.703}$$

Definiamo adesso le seguenti quantità

$$\mu = \frac{m}{M} \quad\Rightarrow\quad m=\mu\,M \tag{4.704}$$

$$\epsilon = \frac{E}{m} \quad\Rightarrow\quad E=M\,\mu\epsilon \tag{4.705}$$

$$\Delta = \frac{M^2-\hat{M}^2}{M^2} \quad\Rightarrow\quad \hat{M}^2=M^2(1-\Delta) \tag{4.706}$$

Abbiamo così che

$$\begin{aligned} f &= \frac{\pi}{12}\,\frac{(M^2+m^2-2ME-\hat{M}^2)^2(M^2+m^2-2ME+2\hat{M}^2)}{(M^2+m^2-2ME)^3} = \\ &= \frac{\pi}{12}\,\frac{M^4(1+\mu^2-2\mu\epsilon-(1-\Delta))^2\,M^2(1+\mu^2-2\mu\epsilon+2(1-\Delta))}{M^6(1+\mu^2-2\mu\epsilon)^3} = \\ &= \frac{\pi}{12}\,\frac{(\mu^2-2\mu\epsilon+\Delta)^2(3+\mu^2-2\mu\epsilon-2\Delta)}{(1+\mu^2-2\mu\epsilon)^3} \end{aligned} \tag{4.707}$$

$$\begin{aligned} g &= \frac{\pi}{24}\,\frac{(M^2+m^2-2ME-\hat{M}^2)^3}{(M^2+m^2-2ME)^2} = \\ &= \frac{\pi}{24}\,\frac{M^6(1+\mu^2-2\mu\epsilon-(1-\Delta))^3}{M^4(1+\mu^2-2\mu\epsilon)^2} = \\ &= \frac{\pi}{24}\,M^2\,\frac{(\mu^2-2\mu\epsilon+\Delta)^3}{(1+\mu^2-2\mu\epsilon)^2} \end{aligned} \tag{4.708}$$

D'altronde, negli stessi simboli, abbiamo

$$(M\,E-m^2)(M-E) = M^3(\mu\epsilon-\mu^2)(1-\mu\epsilon) = M^3\mu(\epsilon-\mu)(1-\mu\epsilon) \tag{4.709}$$

$$E = M\,\mu\epsilon \tag{4.710}$$

$$\begin{aligned} p\,dE &= \sqrt{E^2-m^2}\,dE = M\mu\sqrt{\epsilon^2-1}\,M\mu\,d\epsilon = \\ &= (M\mu)^2\sqrt{\epsilon^2-1}\,d\epsilon \end{aligned} \tag{4.711}$$

per cui otteniamo

$$\begin{aligned} d\Gamma_{CM} &= \frac{G_F^2}{2\pi^5}\left[f\cdot(M\,E-m^2)(M-E)+g\cdot E\right]\,p\,dE\,d\Omega = \\ &= \frac{G_F^2}{2\pi^5}\left[\frac{\pi}{12}\,\frac{(\mu^2-2\mu\epsilon+\Delta)^2(3+\mu^2-2\mu\epsilon-2\Delta)}{(1+\mu^2-2\mu\epsilon)^3}M^3\mu(\epsilon-\mu)(1-\mu\epsilon)+\right. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& +\frac{\pi}{24} M^2 \frac{(\mu^2-2\mu\epsilon+\Delta)^3}{(1+\mu^2-2\mu\epsilon)^2} M\,\mu\epsilon\Big]\,(M\mu)^2\sqrt{\epsilon^2-1}\,d\epsilon\,d\Omega = \\
= \;& \frac{G_F^2}{2\pi^5}\,\frac{\pi}{24}\,4\pi\,M^3\mu\,(M\mu)^2\frac{(\mu^2-2\mu\epsilon+\Delta)^2}{(1+\mu^2-2\mu\epsilon)^2}\,\Big[2(\epsilon-\mu)(1-\mu\epsilon)\frac{3+\mu^2-2\mu\epsilon-2\Delta}{1+\mu^2-2\mu\epsilon}+ \\
& +\epsilon\,(\mu^2-2\mu\epsilon+\Delta)\Big]\,\sqrt{\epsilon^2-1}\,d\epsilon = \\
= \;& \frac{G_F^2}{12\pi^3}M^5\mu^3\frac{(\mu^2-2\mu\epsilon+\Delta)^2}{(1+\mu^2-2\mu\epsilon)^2}\,\Big[2(\epsilon-\mu)(1-\mu\epsilon)\frac{3+\mu^2-2\mu\epsilon-2\Delta}{1+\mu^2-2\mu\epsilon}\;+ \\
& +\epsilon\,(\mu^2-2\mu\epsilon+\Delta)\Big]\,\sqrt{\epsilon^2-1}\;d\epsilon \qquad (4.712)
\end{aligned}
$$

avendo integrato sull'angolo solido.
Dall'espressione trovata si può dedurre immediatamente la distribuzione dell'energia dell'elettrone $I(\epsilon)$:

$$
\begin{aligned}
I(\epsilon) \;=\; & \frac{(\mu^2-2\mu\epsilon+\Delta)^2}{(1+\mu^2-2\mu\epsilon)^2}\,\Big[2(\epsilon-\mu)(1-\mu\epsilon)\frac{3+\mu^2-2\mu\epsilon-2\Delta}{1+\mu^2-2\mu\epsilon}\;+ \\
& +\epsilon\,(\mu^2-2\mu\epsilon+\Delta)\Big]\,\sqrt{\epsilon^2-1} \qquad (4.713)
\end{aligned}
$$

definita nell'intervallo di valori di ϵ

$$1 \leq \epsilon \leq \epsilon_M = \frac{\mu^2+\Delta}{2\mu} \qquad (4.714)$$

dove ϵ_M individua il massimo valore possibile dell'energia dell'elettrone emesso, corrispondente al caso in cui il neutrino non porta via alcuna energia (ricordiamoci che stiamo assumendo per il neutrino un valore nullo della massa ...) ovvero al valore fornito per questa energia dalla cinematica del decadimento a due corpi del neutrone in protone e elettrone. Osserviamo adesso che, da un punto di vista numerico, abbiamo

$$
\begin{aligned}
\mu \;&\equiv\; \frac{m_e}{M} = \frac{0.511}{939.565} = 5.44\times 10^{-4} && (4.715)\\
\Delta \;&\equiv\; \frac{M^2-\hat{M}^2}{M^2} = \frac{0.939565^2-0.938272^2}{0.939565^2} = 2.74\times 10^{-3} && (4.716)\\
\epsilon_M \;&\equiv\; \frac{\mu^2+\Delta}{2\mu} = 2.54 \approx \frac{\Delta}{2\mu} && (4.717)
\end{aligned}
$$

questo significa che, quanto all'integrale di $I(\epsilon)$, possiamo aspettarci qualcosa dell'ordine di

$$\Delta^2\left[\frac{\Delta}{2\mu}+\frac{\Delta}{2\mu}\Delta\right]\frac{\Delta}{2\mu}\frac{\Delta}{2\mu} \approx \frac{1}{8}\frac{\Delta^5}{\mu^3} \qquad (4.718)$$

Valutando dunque numericamente l'integrale seguente, otteniamo

$$C \equiv 8\frac{\mu^3}{\Delta^5}\int_1^{\epsilon_M} I(\epsilon)\,d\epsilon = 0.0946 \qquad (4.719)$$

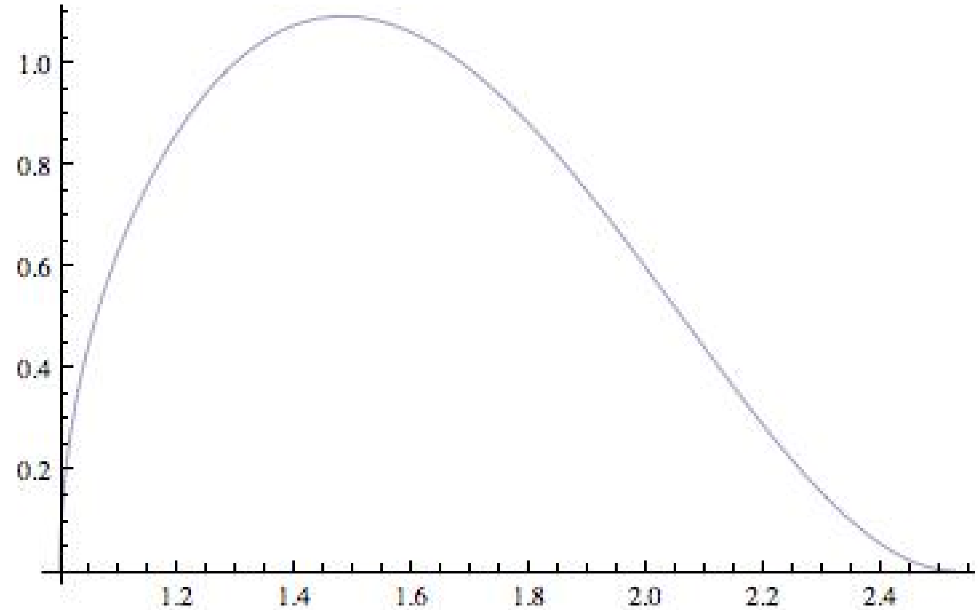


Figure 21: *Spettro normalizzato dell'energia ϵ dell'elettrone di decadimento (in unità di massa elettronica), nell'intervallo $1 \leq \epsilon \leq \epsilon_M \approx 2.54$, nel sistema del CM, ovvero dove il neutrone è a riposo.*

per cui, quanto alla larghezza Γ, possiamo finalmente concludere che[293]

$$\begin{aligned}
\Gamma &= \frac{G_F^2}{12\pi^3} M^5 \mu^3\, C \frac{1}{8}\frac{\Delta^5}{\mu^3} = \frac{G_F^2}{96\pi^3} M^5\, \Delta^5\, C = \\
&= \frac{(1.17\times 10^{-5})^2}{96\pi^3}(0.939)^5 (2.75\times 10^{-3})^5 \times 0.0946 = \\
&\approx \frac{14.87}{2976.6} 10^{-25} = 5.0\times 10^{-28} GeV
\end{aligned} \tag{4.722}$$

[293]Ricordiamo che l'analogo risultato per il decadimento del muone, trascurando la massa dell'elettrone oltre a quella dei neutrini, forniva

$$\Gamma = \frac{G_F^2}{96\pi^3}\, M^5\, \frac{1}{2} \tag{4.720}$$

dove M è la massa del muone.
Tenendo conto anche della massa dell'elettrone ma continuando ad assumere nulle quelle dei neutrini, posto $r = \frac{m_e}{M} \approx 4.87 \times 10^{-3}$, avevamo trovato invece che

$$\Gamma = \frac{G_F^2}{96\pi^3}\, M^5\, \frac{1}{2}\, \left[(1-r^8) - 8r^2(1-r^4) - 24r\, ln\, r\right] \tag{4.721}$$

e siccome $\hbar = 6.58 \times 10^{-25}\, GeV \cdot s$, abbiamo infine

$$\tau = \frac{\hbar}{\Gamma} = \frac{6.58 \times 10^{-25}}{5.0 \times 10^{-28}} \approx 1320s \tag{4.723}$$

In realtà la vita media del neutrone libero è di $885.7 \pm 0.8\, s$ e la discrepanza con il valore ottenuto è dovuta, da un lato al fatto che dovremmo correggere G_F per il coseno dell'angolo di Cabibbo ($G_F \to G_F\, cos\theta_c = G_F \times 0.97425$) e questo tenderebbe a far crescere ulteriormente τ di $cos^2\theta_C \approx 1/0.949$ e dall'altro lato al fatto che dovremmo tener conto che il neutrone e il protone non sono particelle di Dirac senza struttura, per cui esistono dei fattori di forma di cui si deve tenere conto. Nel caso considerato del decadimento del neutrone, è il fattore di forma assiale che aumenta significativamente la sua probabilità di decadimento.

Prima di concludere l'argomento, osserviamo infine che lo spettro $I(\epsilon)$ si annulla come $(\epsilon - \epsilon_M)^2$ (vedi fig. (22)), caratteristica legata all'ipotesi di massa nulla del neutrino emesso. Riprendiamo infatti l'espressione di $I(\epsilon)$: si ha

$$\begin{aligned} I(\epsilon) \;\; &= \;\; \frac{(\mu^2 - 2\mu\epsilon + \Delta)^2}{(1 + \mu^2 - 2\mu\epsilon)^2} \left[2(\epsilon - \mu)(1 - \mu\epsilon) \frac{3 + \mu^2 - 2\mu\epsilon - 2\Delta}{1 + \mu^2 - 2\mu\epsilon} + \right. \\ & \left. + \epsilon\, (\mu^2 - 2\mu\epsilon + \Delta) \right] \sqrt{\epsilon^2 - 1} \end{aligned} \tag{4.724}$$

D'altronde $2\,\mu\,\epsilon_M = \Delta + \mu^2$, quindi possiamo riscrivere $I(\epsilon)$ nel modo seguente

$$\begin{aligned} I(\epsilon) \;\; &= \;\; \frac{4\mu^2(\epsilon_M - \epsilon)^2}{(1 + \mu^2 - 2\mu\epsilon)^2} \left[2(\epsilon - \mu)(1 - \mu\epsilon) \frac{3 + 4\mu^2(\epsilon_M - \epsilon) - 3\Delta}{1 + \mu^2 - 2\mu\epsilon} + \right. \\ & \left. + 4\mu^2\, \epsilon\, (\epsilon_M - \epsilon) \right] \sqrt{\epsilon^2 - 1} \end{aligned} \tag{4.725}$$

Chiaramente il termine in parentesi quadra è regolare per $\epsilon \to \epsilon_M$, come pure

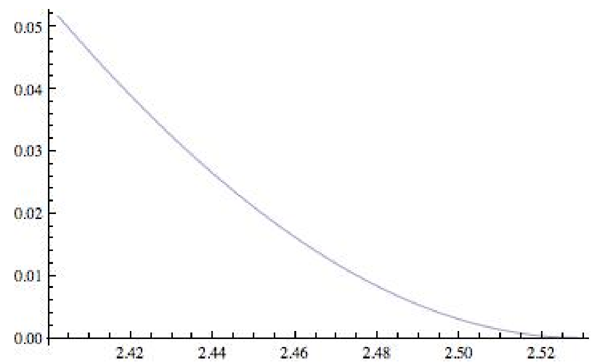


Figure 22: *Andamento dell'energia dell'elettrone in prossimità dell'end-point, nel caso di massa nulla del neutrino.*

il denominatore $(1 + \mu^2 - 2\mu\epsilon)^2$ e il termine $\sqrt{\epsilon^2 - 1}$, per cui risulta evidente, appunto, che per $\epsilon \to \epsilon_M$ lo spettro $I(\epsilon)$ si annulla come $(\epsilon - \epsilon_M)^2$.

4.6.4 *La radiazione Cerenkov: teoria quantistica*

Una particella di carica e e massa m che si muove con velocità costante $\vec{v}$ nel vuoto, coerentemente con le equazioni di Maxwell ed il principio di relatività ristretta, non irraggia alcuna energia elettromagnetica.
Ma che succede se, invece, il moto avviene in un mezzo materiale?
Consideriamo, per esempio, un elettrone che si muove con velocità costante v lungo l'asse z, attraverso un mezzo dielettrico di indice di rifrazione n. Il campo generato dall'elettrone può essere visto come il risultato della sovrapposizione di onde sferiche, dovute al potenziale ritardato, che sono continuamente emesse dall'elettrone in moto, le quali si propagano con velocità c/n, a causa della polarizzabilità del mezzo. E' facile rendersi conto che tutte queste onde emesse saranno in fase fra loro solo lungo la direzione inclinata di un angolo θ con l'asse

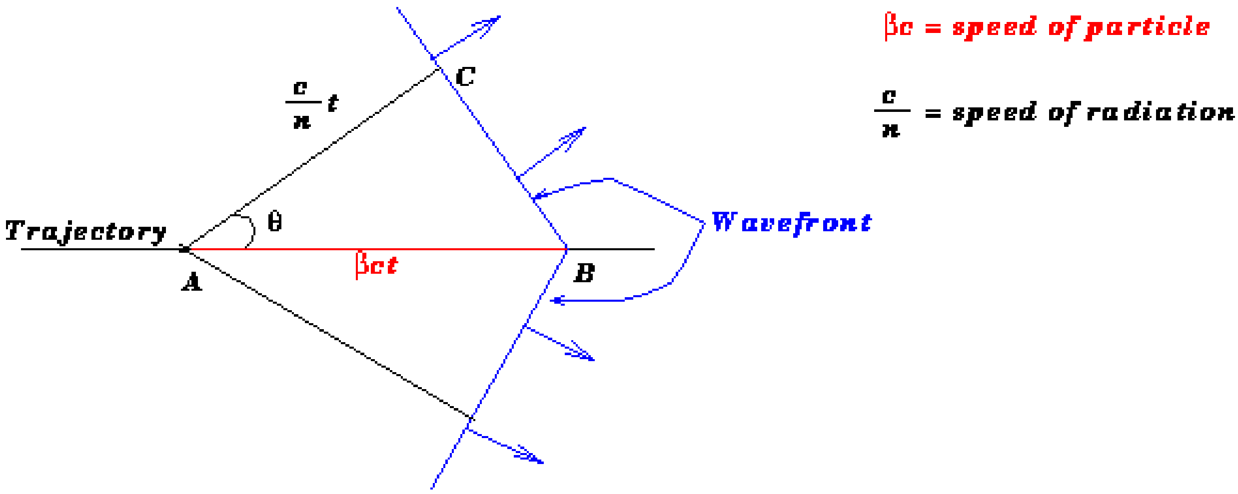


Figure 23: *Moto della particella (AB) e del fronte del suo campo (BC)*

z se e solo se v, n e θ soddisfano la condizione

$$\frac{c}{n} = v\ cos\theta \qquad \Rightarrow \qquad cos\theta = \frac{1}{\beta\, n} \tag{4.726}$$

dove β, al solito, sta per v/c. Mentre ci sarà da attendersi, quindi, radiazione emessa nella direzione θ individuata[294] dalla (4.726), nelle altre direzioni l'interferenza delle varie onde produrrà verosimilmente un risultato globalmente nullo.

[294]Evidentemente la condizione (4.726) potrà essere soddisfatta solo se $\beta\, n > 1$, ovvero solo in mezzi materiali in cui $n > 1$ e per particelle sufficientemente veloci !

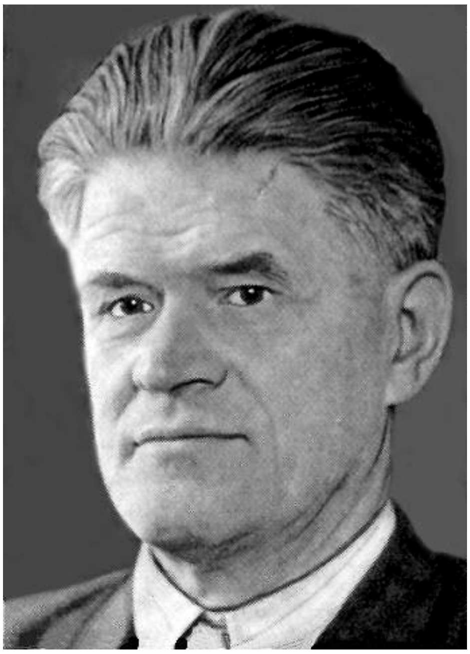


Figure 24: *Pavel Aleksejevic Cerenkov (1904-1990)*

Questo è quanto realmente accade e la radiazione altamente direzionale che viene emessa in queste condizioni è la cosiddetta *radiazione Cerenkov*[295], la cui teoria[296] classica si trova riportata in Appendice: qui riportiamo solo la trattazione quantistica[297].
In realtà, la spiegazione quantistica di cui stiamo parlando, a stretto rigore lo è solo "a metà", nel senso che il fotone che si propaga nel mezzo materiale trasparente di indice di rifrazione $n(\omega)$ viene trattato in modo $efficace$, riassorbendo tutti i processi di scattering con gli atomi del mezzo, appunto, nell'indice di rifrazione. Una conseguenza che ne deriva è che questo "fotone" non viaggia più alla velocità c della luce nel vuoto, ovvero non possiede più una massa nulla bensì, come vedremo, appare avere una massa invariante quadra *negativa* !
Vediamo come questo possa accadere.
Ripartiamo per questo dalle equazioni per i potenziali elettromagnetici, scalare e vettoriale, in un mezzo materiale omogeneo ed isotropo, scritti nella gauge di Lorentz (C.9).

[295]Pavel A. Cerenkov: ...
C.R. Acad. Sci. URSS 8, 451 (1934).
Pavel A. Cerenkov: *Visible radiation produced by electrons moving in a medium with velocities exceeding that of light*, Phys. Rev. 52, 378 (1937)
Per questa scoperta, Cerenkov insieme ai teorici Frank e Tamm che ne spiegarono l'origine, ebbero il Nobel nel 1958.
[296]I. Frank, Ig. Tamm: *Coherent visible radiation of fast electrons passing through matter*, C.R. Acad. Sci. URSS 14, 109 (1937)
[297]J. Schwinger, Wu-Yang Tsai: *Classical and quantum theory of synergic synchrotron-Cerenkov radiation*, Ann. of Phys. 96, 303 (1976)

In assenza di cariche e correnti di conduzione (cfr. Appendice), risulta[298]

$$\nabla^2\Phi - \frac{\epsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = \nabla^2\Phi - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = 0 \tag{4.727}$$

$$\nabla^2\vec{A} - \frac{\epsilon\,\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = \nabla^2\vec{A} - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = 0 \tag{4.728}$$

dove la gauge di Lorentz citata sopra si traduce nella relazione

$$div\,\vec{A} + \frac{\epsilon\mu}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t} = div\,\vec{A} + \frac{n^2}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0 \tag{4.729}$$

Volendo allora scrivere la generica funzione d'onda di un fotone che si propaga nel mezzo considerato, dovremo cercare le soluzioni delle equazioni (4.727) e (4.728). Considerando quelle di impulso definito $\vec{k}$ (onde piane), posto per semplicità

$$A^\mu \equiv (\Phi,\, \vec{A}) \tag{4.730}$$

esse saranno allora della forma ($c = 1$)

$$A^\mu(\vec{x}, t) = a^\mu\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} \tag{4.731}$$

con

$$k^2 = n^2\,\omega^2 \tag{4.732}$$

La quantità $a^\mu \equiv (a^0, \vec{a})$ descrive, come è noto, lo stato di polarizzazione del fotone. Senza perdita di generalità, essa può essere assunta reale e soddisfa la condizione di Lorentz, la quale impone che risulti

$$\vec{k}\cdot\vec{a} - n^2\,\omega\, a^0 = 0 \tag{4.733}$$

Osserviamo adesso che il quadrimpulso q^μ, associato a questo *fotone efficace* che si è così originato, ha, evidentemente, la forma seguente

$$q^\mu = (\omega, \vec{k}) \tag{4.734}$$

da cui segue appunto una massa invariante quadra di segno negativo, pari a

$$q^2 = q^\mu q_\mu = \omega^2 - |\vec{k}|^2 = \omega^2 - n^2\,\omega^2 = \omega^2(1-n^2) < 0 \tag{4.735}$$

E' proprio questo fatto a rendere possibile, da un punto di vista puramente cinematico[299], il "decadimento" della particella carica in moto nel mezzo materiale in un sistema fatto dalla particella stessa ed il "fotone", i.e. il processo schema-

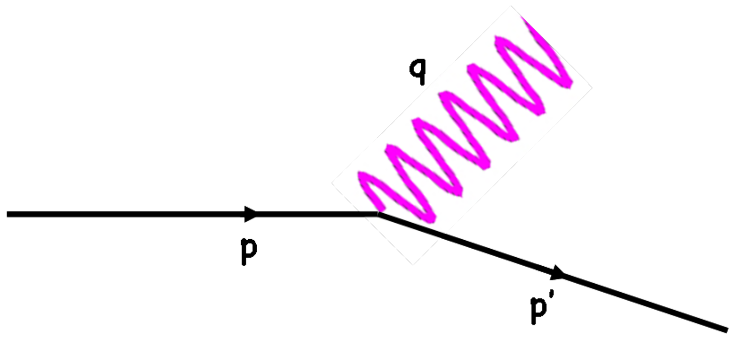


Figure 25: *Grafico di Feynman relativo all'effetto Cerenkov*

tizzato nel grafico di Feynman di fig.25 che, nella teoria quantistica dell'efftto Cerenkov, rappresenta proprio la descrizione del processo in esame.

Partiamo infatti dalla consueta interazione fra la quadricorrente elettrica ed il campo elettromagnetico[300]

$$\mathcal{L}_{int}(x) = e\ J^\mu(x)\, A_\mu(x) \tag{4.739}$$

La probabilità per unità di tempo che il decadimento illustrato in fig.25 avvenga è dato dalla ben nota espressione di cui alla (4.105), i.e.

$$d\Gamma = \frac{1}{2S+1}\,\frac{1}{2E}\,\overline{|\mathcal{M}|^2}\; d\Phi \tag{4.740}$$

---

[298]Abbiamo introdotto esplicitamente l'indice di rifrazione del mezzo al solito modo, cioè attraverso la relazione $n^2 \equiv n^2(\omega) \equiv \epsilon(\omega)\mu(\omega)$, dove sono appunto la costante dielettrica del mezzo $\epsilon = \epsilon(\omega)$ e la sua permeabilità magnetica $\mu = \mu(\omega)$ a dipendere, in generale, dalla frequenza (pulsazione ...) ω della radiazione elettromagnetica.

[299]Si ricordi che se p e p' sono due quadrimpulsi diversi corrispondenti però alla stessa massa M, allora il quadrimpulso $q = p - p'$ è necessariamente space-like. Nel sistema di riferimento in cui p ha la parte spaziale nulla, detta $\vec{k}$ la parte spaziale del quadrivettore p', risulta

$$p = p' + q \quad \Rightarrow \quad (M,\vec{0}) = (E,\vec{k}) + (q^0, -\vec{k}) \quad \Rightarrow \quad q^0 = M - E \tag{4.736}$$

da cui

$$(q^0)^2 - |\vec{k}|^2 = E^2 + M^2 - 2\,M\,E - k^2 = 2\,M^2 - 2\,M\,E = 2\,M(M-E) < 0 \tag{4.737}$$

Per finire, tornando al caso considerato, si osservi che quanto detto sopra implica altresì che l'energia del fotone q^0 risulti negativa nel riferimento in cui la particella carica è ferma! Il riferimento in questione e quello del laboratorio, però , sono tutt'altro che equivalenti visto che laddove la particella è ferma è il mezzo che si sta muovendo ... In ogni caso, questa è un'altra conseguenza del fatto che la quasi-particella rappresentata dal fotone che si propaga nel mezzo materiale, risulta avere, appunto, una massa quadra negativa e, in questo caso, come sappiamo, il segno della componente temporale non è invariante per trasformazioni di Lorentz.

[300]La densità Lagrangiana completa del campo elettromagnetico in interazione è la seguente:

$$\mathcal{L}_{int}(x) = \frac{1}{4}\,F^{\mu\nu}(x)\,F_{\mu\nu}(x) + e\ J^\mu(x)\,A_\mu(x) \tag{4.738}$$

dove S è lo spin della particella che decade, E è la sua energia nel sistema di riferimento dove stiamo operando, $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ è la somma sugli stati di spin iniziali e finali dei moduli quadri degli elementi di matrice invarianti del decadimento e $d\Phi$ è l'elemento di spazio delle fasi invariante associato allo stato finale.
Iniziamo quindi valutando proprio $d\Phi$.
Dalla definizione (4.94) a dalla (4.735), risulta

$$d\Phi = \frac{d^3p'}{2p_0'(2\pi)^3}\,\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\,2\pi\,\delta[q^2-\omega^2(1-n^2)]\,(2\pi)^4\,\delta^4(p'+q-p) \qquad (4.741)$$

D'altronde, usando la (4.734), ecco che

$$q^2 = \omega^2 - k^2 \qquad (4.742)$$

e dunque l'argomento della delta diviene

$$q^2-\omega^2(1-n^2) = \omega^2-k^2-\omega^2+\omega^2\,n^2 = -k^2+\omega^2\,n^2 \qquad (4.743)$$

ovvero, ricordando che la delta di Dirac è una funzione (impropria) pari e separando nella δ^4 la parte spaziale da quella temporale, possiamo concludere che

$$\begin{aligned} d\Phi &= \frac{d^3p'}{2p_0'(2\pi)^3}\,\frac{d\omega\,d^3k}{(2\pi)^4}\,2\pi\,\delta(k^2-\omega^2\,n^2)\,(2\pi)^3\,\delta^3(\vec{p'}+\vec{k}-\vec{p})\,\cdot \\ &\cdot\; 2\pi\,\delta(p_0'+\omega-p_0) \end{aligned} \qquad (4.744)$$

D'altronde, le energie p_0 e p_0' della particella carica di massa M sono, evidentemente, funzioni dei rispettivi impulsi spaziali, essendo

$$E \equiv p_0 = E(\vec{p}) = \sqrt{M^2+|\vec{p}|^2} \qquad (4.745)$$

per cui, trattando l'impulso del fotone $\vec{k}$ come infinitesimo rispetto a $\vec{p}$ e $\vec{p}\,'$, visto che l'integrazione della δ^3 nella (4.744) forza $\vec{k}$ ad essere uguale a $\vec{p}-\vec{p}\,'$, ecco che possiamo scrivere

$$p_0'-p_0 \equiv E(\vec{p}\,')-E(\vec{p}) = E(\vec{p}\,')-E(\vec{p}\,'+\vec{k}) \approx \frac{\partial E}{\partial\vec{p}\,'}\cdot\vec{k} = \frac{\vec{p}\,'\cdot\vec{k}}{p_0'} \qquad (4.746)$$

Ma $\frac{\vec{p}\,'}{p_0'}$ è nient'altro che la velocità della particella carica dopo il decadimento che possiamo confondere, a meno di termini di ordine superiore in k/p, con la velocità $\vec{\beta}$ della particella carica prima del decadimento la quale, quindi, in questa approssimazione, viene assunta comunque muoversi di moto rettilineo e uniforme. Sostituendo quindi la (4.746) nella (4.744), integrando in d^3p' e confondendo al denominatore di questo elemento di volume invariante l'energia p_0' dopo il processo di emissione con l'energia p_0 della particella carica prima del decadimento, arriviamo così al seguente risultato

$$d\Phi = \frac{1}{2p_0}\,\frac{d\omega\,d^3k}{(2\pi)^2}\,\delta(k^2-\omega^2\,n^2)\,\delta(\omega-\vec{k}\cdot\vec{\beta}) \qquad (4.747)$$

il quale mostra in modo esplicito come lo spazio delle fasi possa essere diverso da zero se e solo se sono soddisfatte entrambe le relazioni

$$\begin{aligned} \omega &= \vec{\beta}\cdot\vec{k}\,; \qquad k = n\,\omega \\ &\Rightarrow \qquad \omega = \beta\, n\,\omega\, cos\theta \quad \Rightarrow \quad cos\theta = \frac{1}{n\beta} \end{aligned} \tag{4.748}$$

ovvero, fissati n e β, solo nel caso di emissione con un ben preciso ed unico angolo fra la direzione di propagazione del fotone emesso e la direzione di volo della particella carica.
Formalmente, adesso, l'espressione (4.747) può essere ulteriormente semplificata eliminando le due funzioni delta.
Per far questo, passiamo intanto a coordinate polari, usando come asse polare la direzione di volo della particella carica. Risulta evidentemente che

$$d^3k = k^2\, dk\, d\phi\, d(-cos\theta); \qquad \vec{k}\cdot\vec{\beta} = k\,\beta\, cos\theta \tag{4.749}$$

per cui

$$d\Phi = \frac{1}{2p_0}\frac{d\omega}{(2\pi)^2}\, k^2\, dk\, d\phi\, d(-cos\theta)\delta(k^2-\omega^2\, n^2)\,\delta(\omega-\vec{k}\cdot\vec{\beta}) \tag{4.750}$$

E ricordando che

$$\delta(f(x))\, dx = \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{|\frac{df}{dx_i}|}\, dx \tag{4.751}$$

dove gli x_i sono le radici dell'equazione $f(x)=0$, ecco che, poiché k può essere solo positivo, ne segue che

$$\delta(k^2-n^2\omega^2)\, dk = \frac{\delta(k-n\omega)}{2k}\, dk \tag{4.752}$$

per cui, usando questa relazione ed integrando la (4.750) in dk ed in $d\phi$ (da cui non c'è dipendenza), otteniamo

$$\begin{aligned} d\Phi &= \frac{1}{2p_0}\frac{d\omega}{(2\pi)^2}\, k^2\, dk\, d\phi\, d(-cos\theta)\delta(k^2-\omega^2\, n^2)\,\delta(\omega-\vec{k}\cdot\vec{\beta}) = \\ &= \frac{1}{2p_0}\frac{d\omega}{2\pi}\,(n\,\omega)^2\frac{1}{2(n\,\omega)}\, d(-cos\theta)\,\delta(\omega-n\,\omega\,\beta\, cos\theta) = \\ &= \frac{1}{2p_0}\frac{d\omega}{4\pi}\,(n\,\omega)\, d(-cos\theta)\,\delta(\omega-n\,\omega\,\beta\, cos\theta) \end{aligned} \tag{4.753}$$

dove l'integrazione ha forzato ad essere appunto $k = n\omega$.
Si può adesso integrare l'espressione precedente in $d(-cos\theta)$, eliminado così la

delta rimasta (che forza a sua volta la condizione sull'angolo di emissione, i.e. $n\,\beta\,cos\theta = 1$) ed ottenendo infine l'espressione seguente

$$\begin{aligned} d\Phi &= \frac{1}{2p_0}\frac{d\omega}{4\pi}\,(n\,\omega)\,d(-cos\theta)\,\delta(\omega - n\,\omega\,\beta\,cos\theta) = \\ &= \frac{1}{2p_0}\frac{d\omega}{4\pi}\,(n\,\omega)\frac{1}{n\,\omega\,\beta} = \frac{1}{8\pi}\frac{1}{\beta p_0}\,d\omega = \frac{1}{8\pi|\vec{p}|}\,d\omega \end{aligned} \tag{4.754}$$

Passiamo adesso al calcolo dell'elemento di matrice $\mathcal{M}$.
Per quanto si è già visto (cfr. (4.84)), risulta

$$\mathcal{M}_{ba} =< fin\,|\,\mathcal{L}(0)\,|\,in > \tag{4.755}$$

ovvero

$$\mathcal{M} =< p'; \, q|\,\mathcal{L}(0)\,|p >\equiv < p'|e\,J^\mu(0)|p > \cdot < q|A_\mu(0)|\Omega > \tag{4.756}$$

D'altronde, nell'approssimazione in cui $p \approx p'$, non potrà che essere

$$< p'|e\,J^\mu(0)|p >\propto p^\mu \tag{4.757}$$

e la costante[301] di proporzionalità vale $2e$.
Per quanto riguarda, invece, il campo elettromagnetico, la quantità $< q|A_\mu(0)|\Omega >$ è niente altro che la complessa coniugata della funzione d'onda del fotone (cfr (3.249)) calcolata per $x = 0$, ovvero

$$< q|A_\mu(0)|\Omega >= (a_\mu)^* \tag{4.760}$$

Dunque

$$\mathcal{M} =< p'|J^\mu(0)|p > \cdot < q|A_\mu(0)|\Omega >= 2e\,p^\mu\,a^*_\mu \tag{4.761}$$

ovvero, usando la relazione (4.733) determinata dalla gauge di Lorentz, e ricordando che il vettore di polarizzazione può essere scelto reale, risulta

$$\mathcal{M} = 2e\,[a^0p^0 - \vec{a}\cdot\vec{p}] = 2e\,[p^0\frac{\vec{a}\cdot\vec{k}}{n^2\omega} - \vec{a}\cdot\vec{p}] = 2e\,\vec{a}\cdot[\,\vec{k}\,\frac{E}{n^2\omega} - \vec{p}] \tag{4.762}$$

[301] Se la particella carica è una particella di Dirac, risulterà

$$e\,J^\mu = e\,\bar{u}(p)\,\gamma^\mu\,u(p) = 2ep^\mu \tag{4.758}$$

e, analogamente, se la particella carica è descritta da un campo scalare, per cui

$$e\,J^\mu = ie[(\partial^\mu\phi)\phi^\dagger - (\partial^\mu\phi^\dagger)\phi] \tag{4.759}$$

il suo valor medio su uno stato di impulso p continua a valere $2ep^\mu$ ...

Possiamo adesso passare al calcolo esplicito di $\overline{|\mathcal{M}|^2}$, ovvero alla somma dei moduli quadri delle ampiezze di transizione fatta sulle polarizzazioni[302].
Osserviamo intanto che per quanto concerne gli eventuali stati di spin della particella carica, proprio perchè abbiamo assunto che il suo stato non cambi, possiamo procedere come se fosse comunque di spin nullo. Circa poi gli stati di polarizzazione del fotone descritti attraverso il versore di polarizzazione $\vec{a}$, dobbiamo solo ricordare che questo deve soddisfare la condizione di trasversalità, ovvero deve essere che

$$a_i\, a_j = \delta_{ij} - \frac{k_i\, k_j}{k^2} \tag{4.763}$$

e quindi risulta

$$\begin{aligned}
\overline{|\mathcal{M}|^2} &= 4e^2 \left[\frac{E\, k_i}{n^2\omega} - p_i\right]\left[\frac{E\, k_j}{n^2\omega} - p_j\right]\left(\delta_{ij} - \frac{k_i\, k_j}{k^2}\right) = \\
&= 4e^2 \left[\frac{E\, k_i}{n^2\omega} - p_i\right]\left[\frac{E\, k_i}{n^2\omega} - p_i - \frac{E\, k_i}{n^2\omega} + k_i \frac{\vec{k}\cdot\vec{p}}{k^2}\right] = \\
&= 4e^2 \left[-E\,\frac{\vec{k}\cdot\vec{p}}{n^2\omega} + \frac{k^2\, E\,\vec{k}\cdot\vec{p}}{n^2\omega k^2} + |\vec{p}|^2 - \frac{(\vec{k}\cdot\vec{p})^2}{k^2}\right] = \\
&= 4e^2 \left[|\vec{p}|^2 - \frac{(\vec{k}\cdot\vec{p})^2}{k^2}\right] = 4e^2\, |\vec{p}|^2\, sin^2\theta
\end{aligned} \tag{4.764}$$

per cui, in conclusione, dalla (4.740), dato quanto osservato sopra a proposito dello spin della particella carica, si ottiene

$$\begin{aligned}
d\Gamma &= \frac{1}{2S+1}\,\frac{1}{2E}\,\overline{|\mathcal{M}|^2}\, d\Phi = \frac{1}{2E}\, 4e^2\, |\vec{p}|^2\, sin^2\theta\, \frac{1}{8\pi|\vec{p}|}\, d\omega = \\
&= \frac{e^2}{4\pi}\frac{|\vec{p}|}{E}\, sin^2\theta\, d\omega = \frac{e^2}{4\pi}\beta\, sin^2\theta\, d\omega
\end{aligned} \tag{4.765}$$

dove abbiamo usato l'espressione di cui alla (4.754) per quanto riguarda lo spazio delle fasi $d\Phi$.

L'espressione (4.765) rappresenta il rate di decadimento (probabilità per unità di tempo) nell'intervallo di frequenza $d\omega$ considerato. Moltiplicando dunque per dt ed osservando che $\beta\, dt = dL$ dove dL è proprio il tratto infinitesimo di traiettoria percorso dalla particella carica nel tempo dt, otteniamo infine l'espressione

[302] In realtà, la polarizzazione è unica, come si evince dalla (4.762), la quale mostra che se il versore di polarizzazione $\vec{a}$ è ortogonale al piano definito dai vettori $\vec{k}$ e $\vec{p}$, allora $\mathcal{M} = 0$. Questo implica che $\vec{a}$ deve giacere nel piano ($\vec{k}$, $\vec{p}$) e dovendo però essere ortogonale a $\vec{k}$ per ragioni di trasversalità, ecco che risulta possibile una sola polarizzazione, come avevamo già concluso nella trattazione classica.

seguente per il numero di fotoni emessi nel tratto dL e nell'intervallo di frequenze $d\omega$ a causa dell'effetto Cerenkov

$$dN = \frac{e^2}{4\pi}\, sin^2\theta\, d\omega\, dL = \alpha\, sin^2\theta\, d\omega\, dL \tag{4.766}$$

che è appunto anche il risultato classico[303].

[303] L'interazione elettromagnetica descritta dalla densità lagrangiana $-J^\mu A_\mu$ implica equazioni di moto della forma $\Box A_\mu = J_\mu$ che sono le equazioni del campo elettromagnetico dipendenti dalle sorgenti scritte nel sistema di Gauss razionalizzato, ovvero nel sistema di Lorentz-Heaviside, dove, appunto $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\,\hbar c}$.

A Appendix: Generalità

A.1 *Le unità di misura*

Il sistema di unità di misura di cui faremo uso, se non altrimenti specificato, è il sistema *cgs es* (di Gauss) ed esso fornisce i seguenti valori delle costanti universali più comuni (1 $ues = \frac{1}{2997924580}$ *coulomb*, 1 $erg = 10^{-7}\ J$)

$$\begin{array}{rcl} carica\ dell'elettrone & e & = & 4.8032 \times 10^{-10}\, ues \\ massa\ dell'elettrone & m & = & 9.1095 \times 10^{-28}\, g \\ costante\ di\ Planck & \hbar & = & \dfrac{h}{2\,\pi} = 1.05457266 \times 10^{-27}\, erg \cdot s \\ velocita'\ della\ luce & c & = & 2.99792458 \times 10^{10}\, cm/s \end{array}$$

Comunque, siccome questo sistema di unità di misura non è sempre di pratica applicazione in fisica nucleare e subnucleare, in quanto le sue unità di misura sono spesso troppo grandi per la descrizione di sistemi di particelle,

- per quel che riguarda le distanze, useremo spesso il $fermi$ (equivalente al $femtometro$, definito quindi come

  $$1\ fermi = 1\ fm = 10^{-13}\ cm = 10^{-15}\ m = 10^{-5}\, \text{Å}ngstrom;$$

- per l'energia, useremo l'*elettronvolt* (ed i suoi multipli), legato al sistema *cgs* ed SI dalla equivalenza

  $$1\ eV = 1.60219 \cdot 10^{-12}\, erg = 1.60219 \cdot 10^{-19}\, J;$$

- per le masse delle particelle, invece dei grammi, useremo gli $\frac{eV}{c^2}$ e relativi multipli, per cui la massa dell'elettrone, per esempio, è

  $$m_e = 9.1095 \cdot 10^{-28} \cdot (2.99792458 \cdot 10^{10})^2 \frac{erg}{c^2} = 8.187 \cdot 10^{-7} \frac{erg}{c^2} = 0.511 \frac{MeV}{c^2}$$

  poi, siccome molto spesso, sarà più comodo porre $c = 1$, scriveremo anche

  $$m_e = 0.511\ MeV;$$

- per l'impulso, coerentemente con quanto sopra, useremo spesso le unità $\frac{eV}{c}$ e relativi multipli. In questo modo, un elettrone che abbia una velocità v, possiede un impulso[304]

  $$p = mv = mc\,\beta = 0.511\,\beta\ \frac{MeV}{c}.$$

[304]Se $\beta \equiv v/c \approx 1$, allora, in realtà, come è dimostrato nel testo, $p = mc\,\gamma\,\beta$, dove $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$, comunque, è un numero puro e quindi senza dimensioni.

Nel sistema *cgs es* (di Gauss), le equazioni di Maxwell nel vuoto si scrivono nel modo seguente

$$\begin{array}{rclcrcl} div\vec{E} & = & 4\pi\,\rho; & \qquad & rot\vec{E} & = & -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ div\vec{B} & = & 0; & \qquad & rot\vec{B} & = & \frac{4\pi}{c}\vec{J}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \end{array} \tag{A.1}$$

e la costante di struttura fina α è data da

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar\, c} \tag{A.2}$$

Per confronto, invece, nel Sistema Internazionale (SI) ed in quello di Heaviside-Lorentz (HL) risulta[305]

$$\alpha = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\,\hbar c}\right)_{SI} = \left(\frac{e^2}{4\pi\,\hbar c}\right)_{HL} = \left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)_{Gauss} = \frac{1}{137.035\,099\,76} \tag{A.4}$$

Ricordiamo infine che, sempre nel SI, i prefissi relativi ai multipli e sottomultipli delle unita di misura sono i seguenti:

Factor	Name	Symbol	Factor	Name	Symbol
10^{24}	yotta	Y	10^{-1}	deci	d
10^{21}	zetta	Z	10^{-2}	centi	c
10^{18}	exa	E	10^{-3}	milli	m
10^{15}	peta	P	10^{-6}	micro	µ
10^{12}	tera	T	10^{-9}	nano	n
10^{9}	giga	G	10^{-12}	pico	p
10^{6}	mega	M	10^{-15}	femto	f
10^{3}	kilo	k	10^{-18}	atto	a
10^{2}	hecto	h	10^{-21}	zepto	z
10^{1}	deka	da	10^{-24}	yocto	y

Figure 26: *Prefissi nel Sistema Internazionale*

[305]Ricordiamo che nel sistema HL i campi e le cariche sono quelli del sistema cgs di Gauss, ma divisi per $\sqrt{4\pi}$, e dunque le equazioni di Maxwell si scrivono nel modo seguente

$$\begin{array}{rclcrcl} div\vec{E} & = & \rho; & \qquad & rot\vec{E} & = & -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ div\vec{B} & = & 0; & \qquad & rot\vec{B} & = & \frac{1}{c}\vec{J}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \end{array} \tag{A.3}$$

Siccome $q_{HL} \equiv \sqrt{4\pi}\,q_{cgs}$, se $\hbar = c = 1$, ne segue appunto che $\alpha = \left(\frac{e^2}{4\pi}\right)_{HL}$.

A.2 *Le notazioni*

La convenzione sugli indici che seguiremo è quella usata nel libro *Relativistic Quantum Mechanics* di Bjorken e Drell. Gli indici greci (α, β, ..) vanno da 0 a 3, mentre gli indici italici (i, j, ..) vanno da 1 a 3.

Il tensore metrico $g_{\mu\nu} \equiv \delta_{\mu\nu} = \delta^{\mu\nu} \equiv g^{\mu\nu}$ è tale che

$$\delta^{00} = +1 \qquad\qquad \delta^{11} = \delta^{22} = \delta^{33} = -1 \tag{A.5}$$

ed il prodotto scalare di due quadrivettori p e q è indicato semplicemente con il simbolo pq, oppure (pq), se il simbolo senza parentesi può dar luogo ad errori di interpretazione

$$pq \equiv p^\mu q_\mu \equiv p^\mu \delta_{\mu\nu} q^\nu \tag{A.6}$$

Dato un quadrivettore p, rappresenteremo poi con p^2 la sua lunghezza invariante

$$p^2 \equiv (p\,p) = p^\mu\, p_\mu \tag{A.7}$$

che, come è noto, può essere sia positiva che negativa o nulla.

L'operatore di D'Alembert è definito come

$$\Box \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \partial_0^2 - \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i} \tag{A.8}$$

Per quanto riguarda, poi, le matrici γ^μ di Dirac, ricordiamo che esse soddisfano le seguenti condizioni generali:

$$(\gamma^0)^2 = I \tag{A.9}$$

$$(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0 \tag{A.10}$$

$$(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \tag{A.11}$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\delta^{\mu\nu} \tag{A.12}$$

Per definizione poi, se p è un quadrivettore, allora

$$p^\mu\, \gamma_\mu = p_\mu\, \gamma^\mu \equiv \not p \tag{A.13}$$

La matrice γ_5 è definita dal prodotto

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \tag{A.14}$$

e risulta

$$\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0 \tag{A.15}$$

$$(\gamma_5)^\dagger = \gamma_5 \tag{A.16}$$

$$(\gamma_5)^2 = I \tag{A.17}$$

mentre

$$\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2i}\,[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \tag{A.18}$$

Dove necessario, adotteremo la rappresentazione di Pauli-Dirac delle matrici γ, i.e.

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \tag{A.19}$$

dove σ_i sono le usuali matrici di Pauli, i.e.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{A.20}$$

In questa rappresentazione, γ_5 è data da

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \tag{A.21}$$

Per quanto concerne, poi, le tracce delle matrici γ, risulta

$$a)\ Tr\{\gamma^\mu\} = 0 = Tr\{\gamma_5\} \tag{A.22}$$

$$b)\ Tr\{\gamma^\mu\gamma^\nu\} = 4\,\delta^{\mu\nu} \tag{A.23}$$

$$c)\ Tr\{\gamma^{\mu_1}...\gamma^{\mu_{2n+1}}\} = 0 \tag{A.24}$$

$$\begin{aligned} d)\ & Tr\{\gamma^{\mu_1}...\gamma^{\mu_{2n}}\} = \\ & \quad \delta^{\mu_1\mu_2} Tr\{\gamma^{\mu_3}...\gamma^{\mu_{2n}}\} - \delta^{\mu_1\mu_3} Tr\{\gamma^{\mu_2}\gamma^{\mu_4}...\gamma^{\mu_{2n}}\} \\ & \quad +...\delta^{\mu_1\mu_{2n}} Tr\{\gamma^{\mu_2}...\gamma^{\mu_{2n-1}}\} \end{aligned} \tag{A.25}$$

da cui si ha

$$e)\ Tr\{\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\mu\gamma^\nu\} = 4(\delta^{\alpha\beta}\delta^{\mu\nu} + \delta^{\alpha\nu}\delta^{\beta\mu} - \delta^{\alpha\mu}\delta^{\beta\nu}) \tag{A.26}$$

Se, fra le γ c'è anche γ_5, allora

$$f)\ Tr\{\gamma^{\mu_1}...\gamma^{\mu_{2n+1}}\gamma_5\} = 0 \tag{A.27}$$

ed inoltre si ha

$$g)\ Tr\{\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_5\} = 0 \tag{A.28}$$

$$h)\ Tr\{\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_5\} = 4i\,\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \tag{A.29}$$

dove il tensore completamente antisimmetrico $\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$ è così definito:

$\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} = +1$ se α, β, μ, ν sono una permutazione pari di 0, 1, 2, 3

$\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} = -1$ se α, β, μ, ν sono una permutazione dispari di 0, 1, 2, 3

$\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} = 0$ negli altri casi e perciò, data la definizione di sopra, abbiamo[306]

$$\epsilon_{0123} = 1 \tag{A.30}$$

Passiamo adesso alla dimostrazione di quanto sopra affermato.
La (A.22) è del tutto evidente dalle definizioni (A.19) e (A.21).
Passiamo quindi alla (A.23). Per la proprietà della ciclicità della traccia per cui

$$Tr\{A\,B\} = Tr\{B\,A\}$$

e per la (A.12), si ha

$$Tr\{\gamma^\mu\,\gamma^\nu\} = \frac{1}{2}\,Tr\{\gamma^\mu\,\gamma^\nu + \gamma^\nu\,\gamma^\mu\} = \frac{1}{2}\;2\;\delta^{\mu\nu}\,Tr\{I\} = 4\,\delta^{\mu\nu}$$

Veniamo quindi alla (A.24).
Ricordiamo a questo proposito che $\gamma_5^2 = I$, per cui, sempre per la proprietà ciclica della traccia, si ha

$$T \;\equiv\; Tr\{\gamma^{\mu_1}...\gamma^{\mu_{2n+1}}\} = Tr\{\gamma^{\mu_1}...\gamma^{\mu_{2n+1}}\gamma_5\gamma_5\} = Tr\{\gamma_5\gamma^{\mu_1}...\gamma^{\mu_{2n+1}}\gamma_5\}$$

Usando adesso la (A.15), si ha appunto che

$$\begin{aligned} T \;&=\; (-1)Tr\{\gamma_5\gamma^{\mu_1}...\gamma_5\gamma^{\mu_{2n+1}}\} = (-1)^{2n+1}Tr\{\gamma_5\gamma_5\gamma^{\mu_1}...\gamma^{\mu_{2n+1}}\} = -T \\ &\Rightarrow\; T = 0 \end{aligned}$$

Passiamo ora a dimostrare la (A.25).
Premettiamo a questo riguardo una osservazione. Sia Γ il prodotto di varie matrici γ, allora, visto che dalla (A.12) sappiamo che

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\Gamma = -\gamma^\nu\gamma^\mu\Gamma + 2\,\delta^{\mu\nu}\,I\Gamma = -\gamma^\nu\gamma^\mu\Gamma + 2\,\delta^{\mu\nu}\,\Gamma$$

ne segue che risulta

$$Tr\{\gamma^\mu\gamma^\nu\Gamma\} = -Tr\{\gamma^\nu\gamma^\mu\Gamma\} + 2\delta^{\mu\nu}\,Tr\{\Gamma\}$$

---

[306] Si osservi che, per la regola consueta relativa all'innalzamento/abbassamento degli indici quadrivettoriali operato dal tensore metrico, data la (A.5), la (A.30) implica che $\epsilon^{0123} = -1$. Si osservi altresì che, a differenza del tensore a tre indici ϵ_{ijk}, una permutazione ciclica non mantiene la parità iniziale. Per esempio, mentre (0123) è ovviamente pari, (1230) è dispari, come ci si può convincere facilmente visto che si può passare da (1230) a (0123) solo con tre permutazioni successive, i.e.

$$(1230) \rightarrow (1203) \rightarrow (1023) \rightarrow (0123)$$

Veniamo allora alla (A.25): si ha

$$\begin{aligned}
T &\equiv Tr\{\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}...\gamma^{\mu_{2n}}\} = -Tr\{\gamma^{\mu_2}\gamma^{\mu_1}...\gamma^{\mu_{2n}}\} + 2\delta^{\mu_1\mu_2}\, Tr\{\gamma^{\mu_3}...\gamma^{\mu_{2n}}\} = \\
&= (-1)^2 Tr\{\gamma^{\mu_2}\gamma^{\mu_3}\gamma^{\mu_1}...\gamma^{\mu_{2n}}\} - 2\delta^{\mu_1\mu_3}\, Tr\{\gamma^{\mu_2}\gamma^{\mu_4}...\gamma^{\mu_{2n}}\} + 2\delta^{\mu_1\mu_2}\, Tr\{\gamma^{\mu_3}...\gamma^{\mu_{2n}}\} = \\
&= (-1)^{2n-1} Tr\{\gamma^{\mu_2}\gamma^{\mu_3}...\gamma^{\mu_{2n}}\gamma^{\mu_1}\} + 2\delta^{\mu_1\mu_2}\, Tr\{\gamma^{\mu_3}...\gamma^{\mu_{2n}}\} - \\
&\quad -2\delta^{\mu_1\mu_3}\, Tr\{\gamma^{\mu_2}\gamma^{\mu_4}...\gamma^{\mu_{2n}}\} + ... + 2\delta^{\mu_1\mu_{2n}}\, Tr\{\gamma^{\mu_2}\gamma^{\mu_3}...\gamma^{\mu_{2n-1}}\}
\end{aligned}$$

ovvero, usando la proprietà ciclica della traccia sul primo termine del secondo membro, si ottiene, finalmente, il risultato (A.25), i.e. appunto che

$$\begin{aligned}
&Tr\{\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}...\gamma^{\mu_{2n}}\} = \delta^{\mu_1\mu_2}\, Tr\{\gamma^{\mu_3}...\gamma^{\mu_{2n}}\} - \delta^{\mu_1\mu_3}\, Tr\{\gamma^{\mu_2}\gamma^{\mu_4}...\gamma^{\mu_{2n}}\} + \\
&+ ... + \delta^{\mu_1\mu_{2n}}\, Tr\{\gamma^{\mu_2}\gamma^{\mu_3}...\gamma^{\mu_{2n-1}}\}
\end{aligned}$$

Evidentemente la (A.26) è un caso particolare della (A.25).
Veniamo ora alla (A.27).
Essa discende direttamente dalla proprietà ciclica della traccia, unita alla (A.15).
Infatti si ha

$$\begin{aligned}
T &\equiv Tr\{\gamma^{\mu_1}...\gamma^{\mu_{2n}}\gamma^{\mu_{2n+1}}\gamma_5\} = (-1) Tr\{\gamma^{\mu_1}...\gamma^{\mu_{2n}}\,\gamma_5\,\gamma^{2n+1}\} = \\
&= (-1)^{2n+1} Tr\{\gamma_5\gamma^{\mu_1}...\gamma^{\mu_{2n+1}}\} = -T \\
&\Rightarrow Tr\{\gamma^{\mu_1}...\gamma^{\mu_{2n}}\gamma^{\mu_{2n+1}}\gamma_5\} = 0
\end{aligned}$$

Quanto alla (A.28), essa non è così ovvia.
Per dimostrarla occorre ripartire dalla definizione della matrice γ_5, i.e.

$$\gamma_5 \equiv i\gamma^0\,\gamma^1\,\gamma^2\,\gamma^3$$

ed osservare che da questa discende che

$$\gamma_5 == \frac{i}{4!}\,\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\,\gamma^\nu\,\gamma^\rho\,\gamma^\sigma \tag{A.31}$$

infatti, per la definizione del tensore completamente antisimmetrico $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ solo prodotti di quattro matrici γ con indici differenti fra loro potranno comparire al secondo membro della (A.31). Ne segue allora che gli indici delle stesse costituiranno necessariamente una permutazione degli indici $(0, 1, 2, 3)$. Siccome matrici γ con indici differenti anticommutano, il prodotto delle quattro matrici potrà sempre essere ricondotto al prodotto $\gamma^0\,\gamma^1\,\gamma^2\,\gamma^3\,(-1)^S$ con un numero di scambi S che sarà pari se la permutazione di partenza era pari, mentre sarà dispari nell'altro caso.
Dunque, ciascun addendo della somma $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,\gamma^\mu\,\gamma^\nu\,\gamma^\rho\,\gamma^\sigma$ è esattamente uguale a $\gamma^0\,\gamma^1\,\gamma^2\,\gamma^3$. Siccome le permutazioni possibili sono, ovviamente, 4!, la (A.31) risulta così dimostrata.
Usando un argomento analogo, si prova anche che

$$\gamma_5\,\gamma_\tau = \frac{i}{3!}\,\epsilon_{\mu\nu\rho\tau}\,\gamma^\mu\,\gamma^\nu\,\gamma^\rho \tag{A.32}$$

Infatti, per quanto detto sopra in relazione alla (A.31), segue evidentemente che

$$\gamma_5 = \frac{i}{3!} \sum_{\mu\nu\rho} \epsilon_{\mu\nu\rho x}\, \gamma^\mu\, \gamma^\nu\, \gamma^\rho\, \gamma^x \tag{A.33}$$

dove, x è un indice generico su cui, però, <u>non</u> si somma...
Identificando dunque l'indice x con l'indice τ e moltiplicando ambo i membri della (A.33) per γ_τ, senza sommare su questo indice, si ha

$$\gamma_5\, \gamma_\tau = \frac{i}{3!} \sum_{\mu\nu\rho} \epsilon_{\mu\nu\rho\tau}\, \gamma^\mu\, \gamma^\nu\, \gamma^\rho\, (\gamma^\tau \gamma_\tau) \tag{A.34}$$

Però risulta

$$\gamma^0\gamma_0 = \gamma^1\gamma_1 = \gamma^2\gamma_2 = \gamma^3\gamma_3 = I$$

quindi dalla (A.34) segue immediatamente la (A.32).
Veniamo così a dimostrare la (A.28). Si ha

$$\begin{aligned} Tr\{\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_5\} &= Tr\{\gamma_\nu\ \gamma_5\, \gamma_\mu\} = Tr\{\gamma_\nu \cdot \frac{i}{3!}\, \epsilon_{\alpha\beta\rho\mu}\, \gamma^\alpha\, \gamma^\beta\, \gamma^\rho\} = \\ &= \frac{i}{3!}\, \epsilon_{\alpha\beta\rho\mu}\; Tr\{\gamma_\nu\, \gamma^\alpha\, \gamma^\beta\, \gamma^\rho\} \end{aligned}$$

ovvero, per la (A.26)

$$Tr\{\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_5\} \;=\; \frac{i}{3!}\, \epsilon_{\alpha\beta\rho\mu}\; \{\delta^\alpha_\nu\, \delta^{\beta\rho} - \delta^\beta_\nu\, \delta^{\alpha\rho} + \delta^\rho_\nu\, \delta^{\alpha\beta}\} \tag{A.35}$$

per cui, data la completa antisimmetria del tensore $\epsilon_{\alpha\beta\rho\mu}$, la quantità al secondo membro della (A.35) è evidentemente nulla e dunque la (A.28) è provata.
Dimostriamo infine la (A.29). Occorre dimostrare che

$$Tr\{\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_5\} = 4i\, \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$$

Consideriamo la matrice $\Gamma = \gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\mu\gamma_\nu$. Se fra gli indici $\alpha,\ \beta,\ \mu,\ \nu$ ci sono almeno due indici uguali, usando le proprietà di anticommutazione fra matrici γ diverse ed il fatto che, qualunque sia l'indice x, $\gamma^x\gamma_x = I$ (non si somma sull'indice x ...) ecco che la matrice Γ si semplifica nel prodotto di solo due matrici gamma (di indice diverso) o, addirittura, nell'identità. Ma siccome

$$Tr\{\gamma_\mu\gamma_\nu\, \gamma_5\} = 0 = Tr\{\gamma_5\}$$

la (A.29), in questo caso, risulta soddisfatta.
Supponiamo allora che i quattro indici siano tutti differenti. Evidentemente, in questo caso essi costituiscono una permutazione opportuna di $(0, 1, 2, 3)$.
Indichiamo questi indici differenti con μ_0, μ_1, μ_2, μ_3 invece che con $\alpha,\ \beta,\ \mu,\ \nu$: per quanto detto precedentemente, risulta

$$\gamma_5 = i\, \epsilon_{\mu_0\, \mu_1\, \mu_2\, \mu_3}\; \gamma^{\mu_0}\, \gamma^{\mu_1}\, \gamma^{\mu_2}\, \gamma^{\mu_3}$$

dove è inteso che non si somma su alcun indice. Ne segue allora che

$$\begin{aligned}\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\mu\gamma_\nu\cdot\gamma_5 &= i\,\epsilon_{\mu_0\,\mu_1\,\mu_2\,\mu_3}\;\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\mu\gamma_\nu\cdot\gamma^{\mu_0}\,\gamma^{\mu_1}\,\gamma^{\mu_2}\,\gamma^{\mu_3}\\ &\equiv i\,\epsilon_{\mu_0\,\mu_1\,\mu_2\,\mu_3}\;\gamma_{\mu_0}\,\gamma_{\mu_1}\,\gamma_{\mu_2}\,\gamma_{\mu_3}\cdot\gamma^{\mu_0}\,\gamma^{\mu_1}\,\gamma^{\mu_2}\,\gamma^{\mu_3}\end{aligned}$$

Ma siccome, per ipotesi, $\mu_0 \neq \mu_1$, $\mu_0 \neq \mu_2$, $\mu_0 \neq \mu_3$, e, come abbiamo già osservato, qualunque sia l'indice x risulta che $\gamma_x\gamma^x = I$, si ha

$$\begin{aligned}\Gamma &= \gamma_{\mu_0}\,\gamma_{\mu_1}\,\gamma_{\mu_2}\,\gamma_{\mu_3}\cdot\gamma^{\mu_0}\,\gamma^{\mu_1}\,\gamma^{\mu_2}\,\gamma^{\mu_3} = -\gamma_{\mu_0}\,\gamma_{\mu_1}\,\gamma_{\mu_2}\,\gamma^{\mu_0}\gamma_{\mu_3}\,\gamma^{\mu_1}\,\gamma^{\mu_2}\,\gamma^{\mu_3} =\\ &= \gamma_{\mu_0}\,\gamma_{\mu_1}\,\gamma^{\mu_0}\,\gamma_{\mu_2}\gamma_{\mu_3}\,\gamma^{\mu_1}\,\gamma^{\mu_2}\,\gamma^{\mu_3} = -\gamma_{\mu_0}\,\gamma^{\mu_0}\,\gamma_{\mu_1}\,\gamma_{\mu_2}\gamma_{\mu_3}\,\gamma^{\mu_1}\,\gamma^{\mu_2}\,\gamma^{\mu_3} =\\ &= -\gamma_{\mu_1}\,\gamma_{\mu_2}\gamma_{\mu_3}\,\gamma^{\mu_1}\,\gamma^{\mu_2}\,\gamma^{\mu_3}\end{aligned}$$

e, continuando, siccome $\mu_1 \neq \mu_2$, $\mu_1 \neq \mu_3$, ne segue che

$$\begin{aligned}\Gamma &= -\gamma_{\mu_1}\,\gamma_{\mu_2}\gamma_{\mu_3}\,\gamma^{\mu_1}\,\gamma^{\mu_2}\,\gamma^{\mu_3} = -\gamma_{\mu_1}\,\gamma^{\mu_1}\,\gamma_{\mu_2}\gamma_{\mu_3}\,\gamma^{\mu_2}\,\gamma^{\mu_3} = -\gamma_{\mu_2}\gamma_{\mu_3}\,\gamma^{\mu_2}\,\gamma^{\mu_3} =\\ &= \gamma_{\mu_2}\gamma^{\mu_2}\,\gamma_{\mu_3}\,\gamma^{\mu_3} = I\end{aligned}$$

e dunque

$$\gamma_{\mu_0}\,\gamma_{\mu_1}\,\gamma_{\mu_2}\,\gamma_{\mu_3}\cdot\gamma_5 = i\,\epsilon_{\mu_0\,\mu_1\,\mu_2\,\mu_3}\;I$$

per cui, finalmente, ricordando che $(\mu_0,\,\mu_1,\,\mu_2,\,\mu_3) \equiv (\alpha,\,\beta,\,\mu,\,\nu)$, risulta dimostrato che

$$Tr\{\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\mu\gamma_\nu\cdot\gamma_5\} = 4i\,\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$$

A.3 *Su alcune rappresentazioni finite di SO(n) ed SO(n,m)*

Il gruppo delle rotazioni in tre dimensioni è il gruppo $SO(3)$, mentre il gruppo di Lorentz ortocrono proprio $\mathcal{L}_+^\uparrow$ ha la struttura di $SO(1,3)$: da qui l'interesse per le rappresentazioni dei gruppi $SO(n)$ ed $SO(n,1)$ per le quali risulta particolarmente rilevante la struttura di algebra di Clifford[307].

SO(n)

Iniziamo intanto dalla definizione stessa del gruppo $SO(n)$: si tratta del gruppo ortogonale speciale delle matrici reali $n \times n$, i.e.

$$\begin{aligned} A \in SO(n) \quad &\Leftrightarrow \quad \left\{ (A \cdot A^t = I) \wedge (det\, A = +1) \right\} \\ &\Rightarrow \quad A^t = A^{-1} \end{aligned} \tag{A.37}$$

Queste matrici costituiscono la falda connessa con l'identità delle rotazioni in $n-$dimensioni e si possono rappresentare in forma esponenziale nel modo seguente

$$A = e^{-iH} \tag{A.38}$$

dove H è una opportuna matrice $n \times n$ immaginaria pura, tale che

$$\begin{aligned} Tr(H) &= 0 & (det(A) = 1 \Leftrightarrow Tr(H) = 0) \\ H^t &= -H \quad i.e.\;\; H = H^+ & (A^t = A^{-1} \Leftrightarrow H^t = -H) \end{aligned}$$

E' del tutto evidente, allora, che una possibile base per le matrici H può essere senz'altro la seguente (qui e nel seguito, fino a diverso avviso, la δ è quella di Kronecker e la posizione degli indici in alto o in basso è quindi irrilevante)

$$\left(H^{ij}\right)_{ab} = i \left(\delta^i_a\, \delta^j_b - \delta^i_b\, \delta^j_a\right) \tag{A.39}$$

dove, evidentemente, $H^{ij} = -H^{ji}$ e la dimensione della base è $n(n-1)/2$.
In questo modo possiamo parametrizzare gli elementi $A \in SO(n)$ nel modo seguente

$$A = e^{-\frac{i}{2}\,\omega_{ij}\, H^{ij}} \tag{A.40}$$

dove ω_{ij} è una opportuna matrice reale antisimmetrica in cui sono, appunto, "organizzati" i parametri del gruppo.
Venendo adesso all'algebra di Lie di $SO(n)$, essa è evidentemente definita dai commutatori $\left[H^{ij},\, H^{kl}\right]$.

---

[307]Senza entrare nei dettagli specifici della teoria delle algebre di Clifford, ricordiamo solo che, dato uno spazio vettoriale V sul corpo complesso fatto di operatori, allora se accade che, essendo $\{\Gamma_i\}$ una base dello spazio, risulta

$$\{\Gamma_i, \Gamma_j\} = g_{ij}\, I \tag{A.36}$$

dove g_{ij} è una opportuna matrice simmetrica, a valori in generale complessi, ecco che lo spazio di operatori in questione acquista la struttura di *algebra di Clifford*.

Si ha

$$\begin{aligned}
&\left[H^{ij},\, H^{kl}\right]_{ab} = \left(H^{ij}\right)_{ac} \left(H^{kl}\right)_{cb} - \left(H^{kl}\right)_{ac} \left(H^{ij}\right)_{cb} = \\
&\quad = i^2 \left\{ \left(\delta^i_a \delta^j_c - \delta^i_c \delta^j_a\right) \left(\delta^k_c \delta^l_b - \delta^k_b \delta^l_c\right) - \left(\delta^k_a \delta^l_c - \delta^k_c \delta^l_a\right) \left(\delta^i_c \delta^j_b - \delta^i_b \delta^j_c\right) \right\} = \\
&\quad = i^2 \left\{ \delta^i_a \delta^l_b \delta_{jk} - \delta^i_a \delta^k_b \delta_{jl} - \delta^j_a \delta^l_b \delta_{ik} + \delta^j_a \delta^k_b \delta_{il} - \left(\delta^k_a \delta^j_b \delta_{il} - \delta^k_a \delta^i_b \delta_{jl} - \delta^l_a \delta^j_b \delta_{ik} + \delta^l_a \delta^i_b \delta_{kj} \right) \right\} = \\
&\quad = i^2 \left\{ \delta_{jk} \left(\delta^i_a \delta^l_b - \delta^l_a \delta^i_b\right) - \delta_{jl} \left(\delta^i_a \delta^k_b - \delta^k_a \delta^i_b\right) - \delta_{ik} \left(\delta^j_a \delta^l_b - \delta^l_a \delta^j_b\right) + \delta_{il} \left(\delta^j_a \delta^k_b - \delta^k_a \delta^j_b\right) \right\} = \\
&\quad = i \left\{ \delta_{jk} \left(H^{il}\right)_{ab} - \delta_{jl} \left(H^{ik}\right)_{ab} - \delta_{ik} \left(H^{jl}\right)_{ab} + \delta_{il} \left(H^{jk}\right)_{ab} \right\} = \\
&\quad = -i \left\{ \delta_{jk}\, H^{li} + \delta_{jl}\, H^{ik} + \delta_{ik}\, H^{jl} + \delta_{il}\, H^{kj} \right\}_{ab}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left[H^{ij},\, H^{kl}\right] = -i \left\{ \delta_{ik}\, H^{jl} + \delta_{jl}\, H^{ik} - \delta_{il}\, H^{jk} - \delta_{jk}\, H^{il} \right\} \tag{A.41}$$

Supponiamo adesso che sia dato uno spazio lineare sul corpo complesso generato da n operatori indipendenti Γ_i, che ne costituiscono quindi una base. Supponiamo inoltre che questi operatori definiscano un'algebra di Clifford attraverso la relazione

$$\{\Gamma_i,\, \Gamma_j\} = 2\,\delta_{ij}\, I \qquad i, j = 1, ..., n \tag{A.42}$$

dove I è l'identità nell'algebra definita dagli operatori Γ mentre la δ è, di nuovo, la delta di Kronecker.

Possiamo dimostrare che, in questo caso

- è definita in modo naturale una rappresentazione $S = S(G)$ del gruppo $SO(n)$ i cui generatori sono gli $n \times (n-1)/2$ operatori così definiti

$$M^{ij} \equiv M_{ij} = \frac{i}{4}\, [\Gamma_i,\, \Gamma_j] \equiv -M^{ji} \tag{A.43}$$

- gli operatori Γ_i si trasformano sotto $S(G)$ secondo la rappresentazione vettoriale, i.e., qualunque sia $G \in SO(n)$, risulta

$$S(G)\; \Gamma_i\; S^{-1}(G) = G_{ji}\, \Gamma_j \tag{A.44}$$

Allo scopo di provare queste due affermazioni, iniziamo dimostrando che

$$[M_{ij},\, \Gamma_k] \;\; = \;\; i\, (\Gamma_i\, \delta_{jk} - \Gamma_j\, \delta_{ik}) \tag{A.45}$$

Risulta infatti

$$[M_{ij},\, \Gamma_k] = \frac{i}{4}\, [[\Gamma_i,\, \Gamma_j]\,,\, \Gamma_k] \equiv \frac{i}{4}\, \{[\Gamma_i\, \Gamma_j,\, \Gamma_k] - [\Gamma_j\, \Gamma_i,\, \Gamma_k]\,\} \tag{A.46}$$

D'altronde ricordiamo che, in generale, risulta

$$[A\, B,\, C] = A\; [B,\, C] + [A,\, C]\, B \tag{A.47}$$

e dunque

$$[M_{ij},\, \Gamma_k] = \frac{i}{4}\,\{\Gamma_i\,[\Gamma_j,\, \Gamma_k] + [\Gamma_i,\, \Gamma_k]\,\Gamma_j - \Gamma_j\,[\Gamma_i,\, \Gamma_k] - [\Gamma_j,\, \Gamma_k]\,\Gamma_i\} \tag{A.48}$$

D'altronde, sempre in generale, è

$$\begin{aligned} [A,\, B] &\equiv A\,B - B\,A = A\,B + B\,A - 2\,B\,A = \{A,\, B\} - 2\,B\,A && \text{(A.49)}\\ &\equiv A\,B - B\,A = 2\,A\,B - A\,B - B\,A = 2\,A\,B - \{A,\, B\} && \text{(A.50)} \end{aligned}$$

per cui abbiamo

$$\begin{aligned} [M_{ij},\, \Gamma_k] &= \frac{i}{4}\,\{\Gamma_i\,(\{\Gamma_j,\, \Gamma_k\} - 2\Gamma_k\Gamma_j) + (-\{\Gamma_i,\, \Gamma_k\} + 2\Gamma_i\Gamma_k)\,\Gamma_j +\\ &- \Gamma_j\,(\{\Gamma_i,\, \Gamma_k\} - 2\Gamma_k\Gamma_i) - (-\{\Gamma_j,\, \Gamma_k\} + 2\Gamma_j\Gamma_k)\,\Gamma_i\} =\\ &= \frac{i}{4}\,\{\Gamma_i\{\Gamma_j,\, \Gamma_k\} - 2\Gamma_i\Gamma_k\Gamma_j - \{\Gamma_i,\, \Gamma_k\}\Gamma_j + 2\Gamma_i\Gamma_k\Gamma_j +\\ &- \Gamma_j\{\Gamma_i,\, \Gamma_k\} + 2\Gamma_j\Gamma_k\Gamma_i + \{\Gamma_j,\, \Gamma_k\}\Gamma_i - 2\Gamma_j\Gamma_k\Gamma_i\} =\\ &= \frac{i}{4}\,\{\Gamma_i\{\Gamma_j,\, \Gamma_k\} + \{\Gamma_j,\, \Gamma_k\}\Gamma_i - \{\Gamma_i,\, \Gamma_k\}\Gamma_j - \Gamma_j\{\Gamma_i,\, \Gamma_k\}\} && \text{(A.51)} \end{aligned}$$

Usando ora il fatto che $\{\Gamma_i,\, \Gamma_j\} = 2\,\delta_{ij}\,I$, otteniamo infine che

$$\begin{aligned} [M_{ij},\, \Gamma_k] &= \frac{i}{4}\,\{\Gamma_i 2\,\delta_{jk} + 2\,\delta_{jk}\Gamma_i - 2\,\delta_{ik}\Gamma_j - \Gamma_j 2\,\delta_{ik}\} = \frac{i}{4}\,\{4\,\Gamma_i\,\delta_{jk} - 4\,\Gamma_j\,\delta_{ik}\} =\\ &= i\,\left(\Gamma_i\,\delta_{jk} - \Gamma_j\,\delta_{ik}\right) && \text{(A.52)} \end{aligned}$$

i.e. appunto la (A.45).
Questo risultato ci consente adesso di ricavare il commutatore fra gli operatori M_{ij} e quindi di verificare se essi soddisfano o meno l'algebra di Lie di $SO(n)$ di cui alla (A.41). Abbiamo

$$[M_{ij},\, M_{kl}] = \frac{i}{4}\,[M_{ij},\, [\Gamma_k,\, \Gamma_l]] = \frac{i}{4}\,\{[M_{ij},\, \Gamma_k\Gamma_l] - [M_{ij},\, \Gamma_l\Gamma_k]\} \tag{A.53}$$

ma di nuovo possiamo usare l'identità $[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C$ e quindi si ha

$$\begin{aligned} &[M_{ij},\, M_{kl}] = \frac{i}{4}\,\{[M_{ij},\, \Gamma_k\Gamma_l] - [M_{ij},\, \Gamma_l\Gamma_k]\} =\\ &= \frac{i}{4}\,\{\Gamma_k[M_{ij},\, \Gamma_l] + [M_{ij},\, \Gamma_k]\Gamma_l - \Gamma_l[M_{ij},\, \Gamma_k] - [M_{ij},\, \Gamma_l]\Gamma_k\} =\\ &= \frac{i^2}{4}\,\{\Gamma_k(\Gamma_i\,\delta_{jl} - \Gamma_j\,\delta_{il}) + (\Gamma_i\,\delta_{jk} - \Gamma_j\,\delta_{ik})\Gamma_l - \Gamma_l(\Gamma_i\,\delta_{jk} - \Gamma_j\,\delta_{ik}) - (\Gamma_i\,\delta_{jl} - \Gamma_j\,\delta_{il})\Gamma_k\} =\\ &= \frac{i^2}{4}\,\{\delta_{jl}\Gamma_k\Gamma_i - \delta_{il}\Gamma_k\Gamma_j + \delta_{jk}\Gamma_i\Gamma_l - \delta_{ik}\Gamma_j\Gamma_l - \delta_{jk}\Gamma_l\Gamma_i + \delta_{ik}\Gamma_l\Gamma_j - \delta_{jl}\Gamma_i\Gamma_k + \delta_{il}\Gamma_j\Gamma_k\} =\\ &= \frac{i^2}{4}\,\{-\delta_{ik}(\Gamma_j\Gamma_l - \Gamma_l\Gamma_j) - \delta_{jl}(\Gamma_i\Gamma_k - \Gamma_k\Gamma_i) + \delta_{il}(\Gamma_j\Gamma_k - \Gamma_k\Gamma_j) + \delta_{jk}(\Gamma_i\Gamma_l - \Gamma_l\Gamma_i)\} =\\ &= i\,\{-\delta_{ik}M_{jl} - \delta_{jl}M_{ik} + \delta_{il}M_{jk} + \delta_{jk}M_{il}\} =\\ &= -i\,\{\delta_{ik}M_{jl} + \delta_{jl}M_{ik} - \delta_{il}M_{jk} - \delta_{jk}M_{il}\} && \text{(A.54)} \end{aligned}$$

la quale dimostra appunto che le matrici $n-$dimensionali M_{ij} di cui alla (A.43) soddisfano le regole di commutazione (A.41) dei generatori canonici di $SO(n)$ e dunque, effettivamente, ne definiscono una rappresentazione $n-$dimensionale.

Vediamo adesso come questa rappresentazione induca effettivamente, sulle Γ_i stesse, la rappresentazione vettoriale di $SO(n)$, i.e. sia tale per cui

$$S(G)\,\Gamma_i\,S^{-1}(G) = (G^{-1})_{ij}\,\Gamma_j \tag{A.55}$$

Dimostriamo questo punto per una trasformazione G infinitesima, in cui quindi risulti

$$\begin{aligned} S(G) &\approx I - \frac{i}{2}\omega_{ab}M_{ab} && \text{(A.56)}\\ S^{-1}(G) &\approx I + \frac{i}{2}\omega_{cd}M_{cd} && \text{(A.57)}\\ G^{-1} &\approx I + \frac{i}{2}\omega_{ef}H^{ef} && \text{(A.58)} \end{aligned}$$

Evidentemente, in questa approssimazione al primo ordine nella matrice dei parametri ω_{ab}, il primo membro della (A.55) diviene

$$\begin{aligned} S(G)\,\Gamma_i\,S^{-1}(G) &\approx \Gamma_i - \frac{i}{2}\omega_{ab}M_{ab}\,\Gamma_i + \frac{i}{2}\,\omega_{cd}\,\Gamma_i\,M_{cd} = \\ &= \Gamma_i - \frac{i}{2}\,\omega_{ab}\,[M_{ab}\,,\Gamma_i] = \Gamma_i - \frac{i}{2}\omega_{ab}\,\cdot i\,(\Gamma_a\,\delta_{ib} - \Gamma_b\,\delta_{ia}) = \\ &= \Gamma_i + \frac{1}{2}\,(\omega_{ab}\Gamma_a\delta_{ib} - \omega_{ab}\Gamma_b\delta_{ia}) = \Gamma_i - \omega_{ib}\Gamma_b \end{aligned} \tag{A.59}$$

Quanto al secondo membro della (A.55), abbiamo[308]

$$\begin{aligned} (G^{-1})_{ij}\,\Gamma_j &= \left(\delta_{ij} + \frac{i}{2}\omega_{ab}(H^{ab})_{ij}\right)\Gamma_j = \Gamma_i + \frac{i}{2}\omega_{ab}\cdot i\left(\delta_i^a\delta_j^b - \delta_j^a\delta_i^b\right)\Gamma_j = \\ &= \Gamma_i - \left(\frac{1}{2}\omega_{ij} - \frac{1}{2}\omega_{ji}\right)\Gamma_j = \Gamma_i - \omega_{ij}\Gamma_j \end{aligned} \tag{A.60}$$

la quale, per trasformazioni infinitesime, prova appunto, insieme alla (A.59), la (A.55): questo risultato, data la struttura analitica di gruppo, è poi estendibile direttamente anche alle trasformazioni finite.

[308]Si ricordi che, salvo diverso avviso, la posizione degli indici nella delta di Knonecker è irrilevante !

SO(n, m)

Consideriamo adesso il caso in cui l'algebra di Clifford abbia invece la struttura seguente:

$$\{\Gamma_i,\,\Gamma_j\} = 2\,g_{ij}\,I \qquad i,j=1,....,N=n+m \tag{A.61}$$

dove g è una matrice hermitiana opportuna che, senza perdita di generalità, possiamo assumere sia diagonale e dunque sia reale e nulla fuori della diagonale principale.

Possiamo, evidentemente, definire ancora gli operatori

$$M_{ij} = \frac{i}{4}\,[\Gamma_i,\,\Gamma_j] \equiv -M_{ji} \tag{A.62}$$

ed è facile rendersi conto che, ripetendo i calcoli già fatti, questi operatori sono tali per cui[309]

$$[M_{ij},\,\Gamma_k] \;=\; i\,(\Gamma_i\,g_{jk} - \Gamma_j\,g_{ik}) \tag{A.65}$$

e dunque abbiamo altresì che[310]

$$[M_{ij},\,M_{kl}] \;=\; -i\,\{g_{ik}M_{jl} + g_{jl}M_{ik} - g_{il}M_{jk} - g_{jk}M_{il}\} \tag{A.67}$$

---

[309] Infatti

$$\begin{aligned}
[M_{ij},\,\Gamma_k] &= \frac{i}{4}\,[[\Gamma_i,\,\Gamma_j]\,,\,\Gamma_k] = \frac{i}{4}\,\{[\Gamma_i\,\Gamma_j,\,\Gamma_k] - [\Gamma_j\,\Gamma_i,\,\Gamma_k]\,\} = \\
&= \frac{i}{4}\,\{\Gamma_i\,[\Gamma_j,\,\Gamma_k] + [\Gamma_i,\,\Gamma_k]\,\Gamma_j - \Gamma_j\,[\Gamma_i,\,\Gamma_k] - [\Gamma_j,\,\Gamma_k]\,\Gamma_i\} = \\
&= \frac{i}{4}\,\{\Gamma_i\,(\{\Gamma_j,\,\Gamma_k\} - 2\Gamma_k\Gamma_j) + (-\{\Gamma_i,\,\Gamma_k\} + 2\Gamma_i\Gamma_k)\,\Gamma_j + \\
&- \Gamma_j\,(\{\Gamma_i,\,\Gamma_k\} - 2\Gamma_k\Gamma_i) - (-\{\Gamma_j,\,\Gamma_k\} + 2\Gamma_j\Gamma_k)\,\Gamma_i\} = \\
&= \frac{i}{4}\,\{\Gamma_i\{\Gamma_j,\,\Gamma_k\} - 2\Gamma_i\Gamma_k\Gamma_j - \{\Gamma_i,\,\Gamma_k\}\Gamma_j + 2\Gamma_i\Gamma_k\Gamma_j + \\
&- \Gamma_j\{\Gamma_i,\,\Gamma_k\} + 2\Gamma_j\Gamma_k\Gamma_i + \{\Gamma_j,\,\Gamma_k\}\Gamma_i - 2\Gamma_j\Gamma_k\Gamma_i\} = \\
&= \frac{i}{4}\,\{\Gamma_i\{\Gamma_j,\,\Gamma_k\} + \{\Gamma_j,\,\Gamma_k\}\Gamma_i - \{\Gamma_i,\,\Gamma_k\}\Gamma_j - \Gamma_j\{\Gamma_i,\,\Gamma_k\}\}
\end{aligned} \tag{A.63}$$

ed usando la relazione $\{\Gamma_i,\,\Gamma_j\} = 2\,g_{ij}\,I$, otteniamo infine appunto che

$$\begin{aligned}
[M_{ij},\,\Gamma_k] &= \frac{i}{4}\,\{\Gamma_i 2\,g_{jk} + 2\,g_{jk}\Gamma_i - 2\,g_{ik}\Gamma_j - \Gamma_j 2\,g_{ik}\} = \frac{i}{4}\,\{4\,\Gamma_i\,g_{jk} - 4\,\Gamma_j\,g_{ik}\} = \\
&= i\,(\Gamma_i\,g_{jk} - \Gamma_j\,g_{ik})
\end{aligned} \tag{A.64}$$

[310] Infatti, essendo $[M_{ij},\,M_{kl}] = \frac{i}{4}\,[M_{ij},\,[\Gamma_k,\,\Gamma_l]] = \frac{i}{4}\,\{[M_{ij},\,\Gamma_k\Gamma_l] - [M_{ij},\,\Gamma_l\Gamma_k]\}\,,$ evidentemente si ha

$$\begin{aligned}
[M_{ij},\,M_{kl}] &= \frac{i}{4}\,\{[M_{ij},\,\Gamma_k\Gamma_l] - [M_{ij},\,\Gamma_l\Gamma_k]\} = \\
&= \frac{i}{4}\,\{\Gamma_k[M_{ij},\,\Gamma_l] + [M_{ij},\,\Gamma_k]\Gamma_l - \Gamma_l[M_{ij},\,\Gamma_k] - [M_{ij},\,\Gamma_l]\Gamma_k\} =
\end{aligned}$$

Assumeremo che $det(g) \neq 0$ e quindi che tutti i termini (diagonali) che definiscono g siano non nulli. In questo caso, *rinormalizzando* le Γ_i nel modo seguente

$$\hat{\Gamma}_i \equiv \Gamma_i \frac{1}{\sqrt{|g_{ii}|}} \tag{A.68}$$

abbiamo che i termini (diagonali) della nuova matrice $\hat{g}$ valgono tutti ± 1, i.e. $\hat{g}^2 = I$: assumeremo altresì che i primi $n < N$ termini diagonali di g valgano $+1$ mentre i successivi $m \equiv N - n > 0$ termini valgano -1.
Siccome effettuando questa rinormalizzazione e questo riordino non introduciamo alcuna perdita di generalità, da ora in avanti ci porremo sempre in questa ipotesi: però, per non appesantire le notazioni, nel seguito continueremo ad usare i simboli Γ_i e g al posto, rispettivamente, di $\hat{\Gamma}_i$ e $\hat{g}$ ...

Ci chiediamo adesso se esiste, in queste ipotesi, un gruppo di Lie tale per cui gli operatori M_{ij} di cui sopra costituiscono una rappresentazione dei suoi generatori?

Consideriamo per questo il gruppo $SO(n, m)$: esso, per definizione, è fatto dalla falda[311] connessa con l'identità del gruppo delle matrici reali $(n+m)\times(n+m)$ le quali lasciano invariante la forma quadratica

$$x^i\, g_{ij}\, x^j \tag{A.69}$$

dove g è appunto il tensore diagonale che ha i primi n elementi pari a $+1$ ed i seguenti m elementi uguali a -1.
Se indichiamo con G il generico elemento (matrice) del gruppo e poniamo

$$G^a_{.b} \equiv (G)_{ab} \tag{A.70}$$

allora la condizione (A.69), evidentemente, richiede che

$$x^i\, g_{ij}\, x^j = G^i_{.a}\, x^a \;\; g_{ij} \;\; G^j_{.b}\, x^b \;\;\Leftrightarrow\;\; G^t\, g\, G = g \Leftrightarrow \;\; G^{-1} = g\, G^t\, g \tag{A.71}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{i^2}{4}\{\Gamma_k(\Gamma_i\, g_{jl} - \Gamma_j\, g_{il}) + (\Gamma_i\, g_{jk} - \Gamma_j\, g_{ik})\Gamma_l - \Gamma_l(\Gamma_i\, g_{jk} - \Gamma_j\, g_{ik}) - (\Gamma_i\, g_{jl} - \Gamma_j\, g_{il})\Gamma_k\} = \\
&= \frac{i^2}{4}\{g_{jl}\Gamma_k\Gamma_i - g_{il}\Gamma_k\Gamma_j + g_{jk}\Gamma_i\Gamma_l - g_{ik}\Gamma_j\Gamma_l - g_{jk}\Gamma_l\Gamma_i + g_{ik}\Gamma_l\Gamma_j - g_{jl}\Gamma_i\Gamma_k + g_{il}\Gamma_j\Gamma_k\} = \\
&= \frac{i^2}{4}\{-g_{ik}(\Gamma_j\Gamma_l - \Gamma_l\Gamma_j) - g_{jl}(\Gamma_i\Gamma_k - \Gamma_k\Gamma_i) + g_{il}(\Gamma_j\Gamma_k - \Gamma_k\Gamma_j) + g_{jk}(\Gamma_i\Gamma_l - \Gamma_l\Gamma_i)\} = \\
&= -i\,\{g_{ik}M_{jl} + g_{jl}M_{ik} - g_{il}M_{jk} - g_{jk}M_{il}\} \qquad \text{(A.66)}
\end{aligned}$$

[311]Dal punto di vista topologico, in generale il gruppo $\mathcal{G}$ delle matrici reali $(n+m)\times(n+m)$ che soddisfano la condizione (A.69) è fatto da quattro falde, ciascuna connessa ma tra loro sconnesse, due con determinante $+1$ e due con determinante -1. Per definizione, $SO(n, m)$ è il sottogruppo di $\mathcal{G}$ che coincide con la sua falda connessa che contiene l'identità (le altre falde, ovviamente, non possedendo l'identità, non hanno la struttura gruppale ...).

da cui segue, in generale, che gli elementi del gruppo definito dalla (A.69) hanno $det(G) = \pm 1$: quelli, però, della falda connessa con l'identità e quindi di $SO(n,m)$, non possono ovviamente che avere $det(G) = 1$!
Proprio per come sono definite, le matrici di $SO(n,m)$ possono essere sempre poste in forma esponenziale, i.e. possono essere sempre scritte come

$$G = e^{-iJ} \tag{A.72}$$

dove la generica matrice J è immaginaria pura (dovendo G essere reale ...) e, data la (A.71), deve altresì essere tale che (usiamo il fatto che $g^2 = I$ ...)

$$G^{-1} = g\, G^t\, g \;\;\Leftrightarrow\;\; e^{iJ} = g\, e^{-i\,J^t}\, g = e^{-i\,g\,J^t\,g} \;\;\Leftrightarrow\;\; g\,J^t\,g = -J \tag{A.73}$$

ovvero

$$(g\,J\,g)^+ = J \tag{A.74}$$

essendo g simmetrica reale e J immaginaria pura.
Una base[312] per le matrici J di cui alla (A.74) è la seguente

$$\left(J^{ij}\right)^a_{.b} = i\left(g^{ia}\delta^j_b - g^{ja}\delta^i_b\right) \equiv i\left(\delta^{ia}\delta^j_b - \delta^{ja}\delta^i_b\right) \tag{A.79}$$

dove δ^i_k è il consueto simbolo[313] di Knonecker mentre $\delta^{ia} \equiv g^{ia}$.

---

[312] Osserviamo infatti che la condizione $g\,J^t\,g = -J$ implica che la matrice $g\,J$, immaginaria pura, sia anche antisimmetrica, infatti

$$g\,J^t\,g = -J \;\;\Leftrightarrow\;\; g\,J\,g = -J^t \;\;\Leftrightarrow\;\; g\,J = -J^t\,g \;\;\Leftrightarrow\;\; g\,J = -\left(g\,J\right)^t \tag{A.75}$$

Ma noi sappiamo già che una base per le matrici immaginarie antisimmetriche di ordine N è fatta dalle matrici H così definite

$$\left(H^{ij}\right)_{ab} = i\left(\delta^i_a\,\delta^j_b - \delta^i_b\,\delta^j_a\right) \tag{A.76}$$

dove gli indici $a, b, i \neq j$ vanno da 1 ad N. E' allora immediato che, posto

$$\left(J^{ij}\right) \equiv g\,\left(H^{ij}\right) \tag{A.77}$$

le matrici $\left(J^{ij}\right)$ così definite costituiscono certamente una base per le matrici J stesse, ed esse coincidono, evidentemente, con quelle definite attraverso la (A.79), infatti abbiamo

$$\left(J^{ij}\right)^a_{.b} = g^{ak}\,\left(H^{ij}\right)_{kb} = i\,g^{ak}\left(\delta^i_k\delta^j_b - \delta^i_b\delta^j_k\right) = i\left(g^{ia}\delta^j_b - g^{ja}\delta^i_b\right) \tag{A.78}$$

[313] In quanto segue, la posizione degli indici <u>è</u> rilevante.
Usando la regola secondo cui il tensore metrico g alza o abbassa gli indici matriciali/tensoriali, il tensore metrico viene anche scritto infatti come

$$g^{ji} \equiv g^{ij} = g^{ik}\,\delta^j_k = \delta^{ij} = \delta^{ji}; \qquad g_{ij} \equiv g_{ji} = \delta^k_i\,g_{kj} = \delta_{ij} = \delta_{ji} \tag{A.80}$$

Poiché la base (J^{ij}) è evidentemente antisimmetrica[314] negli indici (i,j), la generica matrice del gruppo $SO(n,m)$ può essere scritta come

$$G = e^{-iJ} = e^{-\frac{i}{2}\,\omega_{ij}\,J^{ij}} \tag{A.81}$$

dove, posto $N \equiv n+m$, la matrice reale e antisimmetrica ω definisce gli $N(N-1)/2$ parametri reali che individuano il generico elemento G del gruppo.

La struttura di algebra di Lie di $SO(n,m)$ è quindi definita univocamente dalle regole di commutazione delle matrici J^{ij} definite dalla (A.79), che rivestono, evidentemente, anche il ruolo di generatori della rappresentazione "base" del gruppo stesso. Risulta

$$\begin{aligned}
\left[J^{ij},\, J^{kl}\right]_{ab} &= \left(J^{ij}\,J^{kl}\right)_{ab} - \left(J^{kl}\,J^{ij}\right)_{ab} = \left(J^{ij}\right)^{a}_{.c}\left(J^{kl}\right)^{c}_{.b} - \left(J^{kl}\right)^{a}_{.c}\left(J^{ij}\right)^{c}_{.b} = \\
&= i^2\left\{\left(g^{ia}\delta^j_c - g^{ja}\delta^i_c\right)\left(g^{kc}\delta^l_b - g^{lc}\delta^k_b\right) - \left(g^{ka}\delta^l_c - g^{la}\delta^k_c\right)\left(g^{ic}\delta^j_b - g^{jc}\delta^i_b\right)\right\} = \\
&= i^2\left\{g^{ia}g^{kj}\,\delta^l_b - g^{ia}g^{lj}\,\delta^k_b - g^{ja}g^{ik}\,\delta^l_b + g^{ja}g^{li}\,\delta^k_b - \right.\\
&\quad \left.\left(g^{ka}g^{il}\,\delta^j_b - g^{ka}g^{jl}\,\delta^i_b - g^{la}g^{ik}\,\delta^j_b + g^{la}g^{kj}\,\delta^i_b\right)\right\} = \\
&= i^2\left\{g^{ik}\left(-g^{ja}\,\delta^l_b + g^{la}\,\delta^j_b\right) + g^{jl}\left(-g^{ia}\,\delta^k_b + g^{ka}\,\delta^i_b\right)\right.\\
&\quad \left. -g^{il}\left(-g^{ja}\,\delta^k_b + g^{ka}\,\delta^j_b\right) - g^{jk}\left(-g^{ia}\,\delta^l_b + g^{la}\,\delta^i_b\right)\right\} = \\
&= i^2\left\{g^{ik}\;i\left(J^{jl}\right)^a_{.b} + g^{jl}\;i\left(J^{ik}\right)^a_{.b} - g^{il}\;i\left(J^{jk}\right)^a_{.b} - g^{jk}\;i\left(J^{il}\right)^a_{.b}\right\} = \\
&= -i\left(g^{ik}\,J^{jl} + g^{jl}\,J^{ik} - g^{il}\,J^{jk} - g^{jk}\,J^{il}\right)^a_{.b}
\end{aligned} \tag{A.82}$$

la quale mostra come l'algebra di Lie di $SO(n,m)$ definita attraverso gli operatori J^{ij} sia in effetti la stessa[315] di cui alla (A.67).

[314] Non si confonda l'antisimmetria insita nella descrizione degli elementi della base attraverso la parametrizzazione con gli indici (ij) con le proprietà delle matrici J stesse, per le quali abbiamo visto che solo gJ è antisimmetrica (ma non J) !

[315] A stretto rigore, nella (A.67)

$$[M_{ij},\, M_{kl}] \;=\; -i\left\{g_{ik}M_{jl} + g_{jl}M_{ik} - g_{il}M_{jk} - g_{jk}M_{il}\right\} \tag{A.83}$$

gli indici che individuano i generatori sono tutti covarianti (in basso...) mentre nella (A.82) sono controvarianti (in alto). Questo, però, non è una reale differenza, infatti, facendo semplicemente uso del tensore metrico, abbiamo che il primo membro della (A.83) diventa

$$g^{ai}\,g^{bj}\,g^{ck}\,g^{dl}\;\;[M_{ij},\, M_{kl}] \equiv \left[M^{ab},\, M^{cd}\right] \tag{A.84}$$

e, quanto al secondo membro, abbiamo che

$$\begin{aligned}
&-i\left\{g_{ik}M_{jl} + g_{jl}M_{ik} - g_{il}M_{jk} - g_{jk}M_{il}\right\}\;\; g^{ai}\,g^{bj}\,g^{ck}\,g^{dl} = \\
&= -i\left\{g_{ik}\,M_{jl}\,g^{ai}\,g^{bj}\,g^{ck}\,g^{dl} + g_{jl}\,M_{ik}\,g^{ai}\,g^{bj}\,g^{ck}\,g^{dl}\right.\\
&\qquad \left.-g_{il}\,M_{jk}\,g^{ai}\,g^{bj}\,g^{ck}\,g^{dl} - g_{jk}\,M_{il}\,g^{ai}\,g^{bj}\,g^{ck}\,g^{dl}\right\} = \\
&= -i\left\{M^{bd}\,\delta^a_k\,g^{ck} + M^{ac}\,\delta^b_l\,g^{dl} - M^{bc}\,\delta^a_l\,g^{dl} - M^{ad}\,\delta^b_k\,g^{ck}\right\} = \\
&= -i\left\{g^{ac}\,M^{bd} + g^{bd}\,M^{ac} - g^{ad}\,M^{bc} - g^{bc}\,M^{ad}\right\}
\end{aligned} \tag{A.85}$$

Possiamo quindi concludere affermando senz'altro che gli operatori M_{ij}, definiti attraverso le Γ_i mediante la (A.62), definiscono una rappresentazione reale di $SO(n,m)$ a valori nello spazio vettoriale di dimensione $N \equiv n+m$ dove operano le Γ_i stesse, le quali definiscono il tensore metrico g attraverso la struttura di algebra di Clifford (A.61).
Formalmente la rappresentazione in questione è così definita

$$S(G) = e^{-\frac{i}{2}\omega_{ij}M^{ij}} \tag{A.87}$$

essendo, per definizione

$$M^{ij} = g^{ai}\, g^{bj}\, M_{ab} = g^{ai}\, g^{bj}\, \frac{i}{4}\,[\Gamma_a,\, \Gamma_b] \equiv \frac{i}{4}\,\left[\Gamma^i,\, \Gamma^j\right] \tag{A.88}$$

Questa rappresentazione, definita dalla (A.87), induce in modo canonico, nello spazio operatoriale generato dalle Γ, una rappresentazione vettoriale, i.e. risulta

$$S(G)\,\Gamma^i\, S^{-1}(G) = (G^{-1})^i_{.j}\,\Gamma^j \;\;\Leftrightarrow\;\; S^{-1}(G)\;\Gamma^i\, S(G) = G^i_{.j}\,\Gamma^j \tag{A.89}$$

La dimostrazione di questo risultato ricalca esattamente quanto visto nel caso di $SO(n)$. Si considerano trasformazioni infinitesime e si sviluppa al primo ordine nella matrice dei parametri ω: risulta che, quanto al primo membro della (A.89), abbiamo

$$\begin{aligned}
S(G)\,\Gamma^i\, S^{-1}(G) &\approx \Gamma^i - \frac{i}{2}\,\omega_{ab}M^{ab}\,\Gamma^i + \frac{i}{2}\,\omega_{cd}\,\Gamma^i\, M^{cd} = \\
&= \Gamma^i - \frac{i}{2}\,\omega_{ab}\left[M^{ab}\,,\Gamma^i\right] = \Gamma^i - \frac{i}{2}\,\omega_{ab}\,\cdot i\left(\Gamma^a\, g^{bi} - \Gamma^b\, g^{ai}\right) = \\
&= \Gamma^i + \frac{1}{2}\left(\omega_{ab}\Gamma^a g^{bi} - \omega_{ab}\Gamma^b g^{ai}\right) = \\
&= \Gamma^i + \frac{1}{2}\left(-\omega_{ba}\Gamma^a g^{bi} - \omega_{ab}\Gamma^b g^{ai}\right) = \\
&= \Gamma^i - \frac{1}{2}\left(\omega^i_{.a}\,\Gamma^a + \omega^i_{.b}\,\Gamma^b\right) = \Gamma^i - \omega^i_{.a}\Gamma^a
\end{aligned} \tag{A.90}$$

dove si è usato il fatto che la matrice ω_{ij} è antisimmetrica.
Circa il secondo membro della (A.89), abbiamo altresì che risulta

$$\begin{aligned}
(G^{-1})^i_{.j}\,\Gamma^j &= \left(\delta^i_j + \frac{i}{2}\omega_{ab}(J^{ab})^i_{.j}\right)\Gamma^j = \Gamma^i + \frac{i}{2}\,\omega_{ab}\cdot i\left(g^{ai}\delta^b_j - g^{bi}\delta^a_j\right)\Gamma^j = \\
&= \Gamma^i - \frac{1}{2}\,\omega_{ab}\, g^{ai}\,\delta^b_j\,\Gamma^j - \frac{1}{2}\,\omega_{ba}\, g^{bi}\,\delta^a_j\,\Gamma^j = \Gamma^i - \omega^i_{.a}\,\Gamma^a
\end{aligned} \tag{A.91}$$

la quale, insieme alla (A.90), prova appunto la (A.89) almeno per trasformazioni infinitesime: la struttura analitica del gruppo ne consente poi l'estensione anche alle trasformazioni finite.

---

e dunque, in definitiva

$$\left[M^{ab},\, M^{cd}\right] = -i\left\{g^{ac}\, M^{bd} + g^{bd}\, M^{ac} - g^{ad}\, M^{bc} - g^{bc}\, M^{ad}\right\} \tag{A.86}$$

A.4 *Parametrizzazione del gruppo di Lorentz*

In questo paragrafo considereremo in maggior dettaglio la questione della parametrizzazione del gruppo di Lorentz come gruppo di Lie.
Iniziamo per questo dal fatto che una trasformazione infinitesima del gruppo di Lorentz avrà, in generale, la struttura seguente

$$\Lambda^{\mu}_{.\,\nu} \approx \delta^{\mu}_{.\,\nu} + \epsilon^{\mu}_{.\,\nu} \tag{A.92}$$

dove il primo termine descrive appunto la trasformazione identica e la matrice reale ϵ sarà fatta da elementi infinitesimi. La condizione per cui

$$\Lambda^t \; g \; \Lambda = g \tag{A.93}$$

che garantisce alla trasformazione (A.92) di conservare il ds^2, implica che[316]

$$\begin{aligned} \delta_{\mu\nu} &= (\Lambda^t)_{\mu\alpha} \; g_{\alpha\beta} \; (\Lambda)_{\beta\nu} = (\Lambda)_{\alpha\mu} \; g_{\alpha\beta} \; (\Lambda)_{\beta\nu} \approx \\ &\approx (\delta^{\alpha}_{.\,\mu} + \epsilon^{\alpha}_{.\,\mu}) \; g_{\alpha\beta} \; (\delta^{\beta}_{.\,\nu} + \epsilon^{\beta}_{.\,\nu}) = (\delta_{\beta\mu} + \epsilon_{\beta\mu})(\delta^{\beta}_{.\,\nu} + \epsilon^{\beta}_{.\,\nu}) = \\ &= \delta_{\mu\nu} + \epsilon_{\mu\nu} + \epsilon_{\nu\mu} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned} \tag{A.94}$$

ovvero la matrice $\epsilon_{\mu\nu}$ deve essere reale e antisimmetrica negli indici di Lorentz, per cui essa deve necessariamente possedere la struttura seguente

$$\epsilon_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\eta_1 & -\eta_2 & -\eta_3 \\ \eta_1 & 0 & -\phi_3 & \phi_2 \\ \eta_2 & \phi_3 & 0 & -\phi_1 \\ \eta_3 & -\phi_2 & \phi_1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \epsilon^{\mu}_{.\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\eta_1 & -\eta_2 & -\eta_3 \\ -\eta_1 & 0 & \phi_3 & -\phi_2 \\ -\eta_2 & -\phi_3 & 0 & \phi_1 \\ -\eta_3 & \phi_2 & -\phi_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{A.95}$$

Il fatto che essa sia reale 4×4 e antisimmetrica implica che essa sia individuabile attraverso i sei parametri reali indipendenti che abbiamo sopra indicato, rispettivamente, con (η_i) ed (ϕ_i). Questi parametri possono venire descritti, a loro volta, attraverso una matrice antisimmetrica 4×4, che indicheremo con $\omega_{\alpha\beta}$, in modo che risulti[317]

$$\epsilon^{\mu}_{.\nu} \equiv -\frac{i}{2} \; \omega_{\alpha\beta} \left(J^{\alpha\beta}\right)^{\mu}_{.\nu} \tag{A.96}$$

dove la matrice $\left(J^{\alpha\beta}\right) \equiv -\left(J^{\beta\alpha}\right)$, fissati α e β, risulta essere una matrice 4×4 immaginaria pura, tale che $\left(J^{\alpha\beta}\right)_{\mu\nu}$ è antisimmetrica sia negli indici (α, β) che

[316]Indicheremo al solito gli elementi del tensore metrico sia con il simbolo $g^{\mu\nu}$ che anche con il simbolo $\delta^{\mu\nu}$, riservando il simbolo δ^{μ}_{ν} per gli elementi dell'identità.
Quando poi vorremo prescindere dalla convenzione controvariante/covariante sugli indici per usare semplicemente la convenzione matriciale consueta, scriveremo il simbolo che rappresenta la matrice in questione fra parentesi tonda, i.e. $(\Lambda)_{\mu\nu} \equiv \Lambda^{\mu}_{.\nu}$.
[317]Si noti la distinzione, a priori, fra gli indici di Lorentz che indichiamo con (μ, ν) e gli indici che servono invece a descrivere lo spazio del parametri, che indichiamo con (α, β).

negli indici di Lorentz (μ, ν).
Volendo, per semplicità, identificare la matrice infinitesima ω con la matrice ϵ, questo richiede di porre semplicemente

$$\left(J^{\alpha\beta}\right)^{\mu}_{.\nu} \equiv i\left(\delta^{\alpha\mu}\delta^{\beta}_{\nu} - \delta^{\beta\mu}\delta^{\alpha}_{\nu}\right) \tag{A.97}$$

ed infatti[318]

$$\epsilon^{\mu}_{.\nu} = -\frac{i}{2}\,\omega_{\alpha\beta}\left(J^{\alpha\beta}\right)^{\mu}_{.\nu} = -\frac{i^2}{2}\left(\omega^{\mu}_{.\nu} - \omega^{.\mu}_{\nu}\right) = \omega^{\mu}_{.\nu} \tag{A.98}$$

Quanto, poi, alla forma "finita" delle trasformazioni di Lorentz, dalla teoria dei gruppi di Lie e da quanto precede possiamo concludere che la loro parametrizzazione deve[319] essere la seguente

$$\Lambda^{\mu}_{.\,\nu} = e^{-\frac{i}{2}\,\omega_{\alpha\beta}(J^{\alpha\beta})^{\mu}_{.\,\nu}} \tag{A.99}$$

dove, adesso, la matrice $\omega_{\alpha\beta}$ è fatta da elementi (reali) *finiti*.

Venendo ora alle regole di commutazione dei generatori $J^{\alpha\beta}$ del gruppo di Lorentz, cioè alle quantità $\left[J^{\alpha\beta},\, J^{\rho\sigma}\right]$, esse sono facilmente determinabili a partire dalla definizione (A.97). Abbiamo infatti

$$\begin{aligned}
\left[J^{\alpha\beta},\, J^{\rho\sigma}\right]^{\mu}_{.\nu} &= (J^{\alpha\beta})^{\mu}_{.\tau}(J^{\rho\sigma})^{\tau}_{.\,\nu} - (J^{\rho\sigma})^{\mu}_{.\tau}(J^{\alpha\beta})^{\tau}_{.\,\nu} = \\
&= i^2\left\{(\delta^{\alpha\mu}\delta^{\beta}_{\tau} - \delta^{\beta\mu}\delta^{\alpha}_{\tau})(\delta^{\rho\tau}\delta^{\sigma}_{\nu} - \delta^{\sigma\tau}\delta^{\rho}_{\nu}) - (\delta^{\rho\mu}\delta^{\sigma}_{\tau} - \delta^{\sigma\mu}\delta^{\rho}_{\tau})(\delta^{\alpha\tau}\delta^{\beta}_{\nu} - \delta^{\beta\tau}\delta^{\alpha}_{\nu})\right\} \\
&= i^2\left\{\left[\delta^{\alpha\mu}\delta^{\beta\rho}\delta^{\sigma}_{\nu} - \delta^{\alpha\mu}\delta^{\beta\sigma}\delta^{\rho}_{\nu} - \delta^{\beta\mu}\delta^{\alpha\rho}\delta^{\sigma}_{\nu} + \delta^{\beta\mu}\delta^{\alpha\sigma}\delta^{\rho}_{\nu}\right]\right. \\
&\quad \left. - \left[\delta^{\rho\mu}\delta^{\sigma\alpha}\delta^{\beta}_{\nu} - \delta^{\rho\mu}\delta^{\sigma\beta}\delta^{\alpha}_{\nu} - \delta^{\sigma\mu}\delta^{\rho\alpha}\delta^{\beta}_{\nu} + \delta^{\sigma\mu}\delta^{\rho\beta}\delta^{\alpha}_{\nu}\right]\right\} = \\
&= i^2\left\{\delta^{\alpha\rho}\left(-\delta^{\beta\mu}\delta^{\sigma}_{\nu} + \delta^{\sigma\mu}\delta^{\beta}_{\nu}\right) + \delta^{\beta\sigma}\left(-\delta^{\alpha\mu}\delta^{\rho}_{\nu} + \delta^{\rho\mu}\delta^{\alpha}_{\nu}\right)\right. \\
&\quad \left. -\delta^{\alpha\sigma}\left(-\delta^{\beta\mu}\delta^{\rho}_{\nu} + \delta^{\rho\mu}\delta^{\beta}_{\nu}\right) - \delta^{\beta\rho}\left(-\delta^{\alpha\mu}\delta^{\sigma}_{\nu} + \delta^{\sigma\mu}\delta^{\alpha}_{\nu}\right)\right\} = \\
&= -i\left\{\delta^{\alpha\rho}(J^{\beta\sigma})^{\mu}_{.\,\nu} + \delta^{\beta\sigma}(J^{\alpha\rho})^{\mu}_{.\,\nu} - \delta^{\alpha\sigma}(J^{\beta\rho})^{\mu}_{.\,\nu} - \delta^{\beta\rho}(J^{\alpha\sigma})^{\mu}_{.\,\nu}\right\}
\end{aligned} \tag{A.100}$$

da cui ne segue che l'algebra di Lie del gruppo di Lorentz è, dunque, la seguente

$$\left[J^{\alpha\beta},\, J^{\rho\sigma}\right] = -i\left\{\delta^{\alpha\rho}\, J^{\beta\sigma} + \delta^{\beta\sigma}\, J^{\alpha\rho} - \delta^{\alpha\sigma}\, J^{\beta\rho} - \delta^{\beta\rho}\, J^{\alpha\sigma}\right\} \tag{A.101}$$

---

[318] Si ricordi che, per ipotesi

$$\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$$

e quindi, moltiplicando entrambi i membri per $\delta^{\rho\mu}$, abbiamo

$$\omega^{\rho}_{.\nu} \equiv \delta^{\rho\mu}\,\omega_{\mu\nu} = -\delta^{\rho\mu}\,\omega_{\nu\mu} \equiv -\omega^{.\rho}_{\nu}$$

[319] Ricordiamo che stiamo parlando del gruppo di Lorentz ortocrono proprio, cioè del gruppo delle matrici Λ che, oltre a soddisfare la condizione (A.93), hanno anche determinante $+1$ e $\Lambda^{0}_{.0} \geq +1$. Questa è la parte del gruppo connessa con l'identità: la forma analitica della (A.99) garantisce che le matrici così rappresentate non possono che soddisfare anche le altre due condizioni aggiuntive sopra descritte.

Passiamo adesso ad esplicitare la forma delle sei matrici J indipendenti. Per ragioni che saranno chiare in seguito, è opportuno dividere queste sei matrici in due insiemi di tre, i.e. in $\vec{K} \equiv (K_1, K_2, K_3)$ e $\vec{L} \equiv (J_1, J_2, J_3)$, secondo le definizioni seguenti

$$(K_1, K_2, K_3) \;\equiv\; (J^{01}, J^{02}, J^{03}) \;\Leftrightarrow\; K_i \equiv J^{0i} = -J^{i0} = J_{i0} \quad \text{(A.102)}$$

$$(L_1, L_2, L_3) \;\equiv\; (J^{23}, J^{31}, J^{12}) \;\Leftrightarrow\; L_i \equiv \frac{1}{2}\,\epsilon_{ijk}\,J^{jk} = \frac{1}{2}\,\epsilon_{ijk}\,J_{jk} \quad \text{(A.103)}$$

In base alle regole di commutazione (A.101), risulta[320] allora che

$$[L_i, L_j] \;=\; i\,\epsilon_{ijk}\,L_k \quad \text{(A.109)}$$

[320]Abbiamo infatti che (si ricordi che $\delta^{00} = 1$ mentre per $a, b = 1, 2, 3$ si ha $\delta^{ab} = -\delta^a_b$...)

$$\begin{aligned}
[L_i, L_j] &= \frac{1}{4}\,\epsilon_{iab}\,\epsilon_{jcd}\left[J^{ab}, J^{cd}\right] = \frac{1}{4}\,\epsilon_{iab}\,\epsilon_{jcd}\left\{-i\left[\delta^{ac}J^{bd} + \delta^{bd}J^{ac} - \delta^{ad}J^{bc} - \delta^{bc}J^{ad}\right]\right\} = \\
&= \frac{i}{4}\left[\epsilon_{icb}\,\epsilon_{jcd}\,J^{bd} + \epsilon_{iad}\,\epsilon_{jcb}\,J^{ac} - \epsilon_{idb}\,\epsilon_{jcd}\,J^{bc} - \epsilon_{iac}\,\epsilon_{jcd}\,J^{ad}\right] \quad \text{(A.104)}
\end{aligned}$$

dove abbiamo appunto usato il fatto che, trattandosi di indici spaziali, risulta che $\delta^{ab} \equiv g^{ab} = -\delta^a_b$. Nell'espressione precedente (A.104), i due tensori antisimmetrici a tre indici che vengono moltiplicati fra loro hanno sempre un indice comune che, essendo un indice di somma e quindi muto, chiameremo nel seguito con lo stesso nome, i.e. lo indicheremo con k; inoltre useremo le proprietà di antisimmetria dei tensori per dare ai vari addendi una struttura simile. In questo modo, si ha (nell'espressione che segue, le delta sono quelle di Kronecker; inoltre si ricordi che le J^{ab} sono antisimmetriche anche negli indici (a, b) ...)

$$\begin{aligned}
[L_i, L_j] &= \frac{i}{4}\left[\epsilon_{ikb}\,\epsilon_{jkd}\,J^{bd} + \epsilon_{ika}\,\epsilon_{jkc}\,J^{ac} + \epsilon_{ikb}\,\epsilon_{jkc}\,J^{bc} + \epsilon_{ika}\,\epsilon_{jkd}\,J^{ad}\right] = i\epsilon_{ika}\,\epsilon_{jkb}\,J^{ab} = \\
&= i\left(\delta_{ij}\,\delta_{ab} - \delta_{ib}\,\delta_{aj}\right)J^{ab} = -i\,J^{ji} = i\,J^{ij} = i\,\epsilon_{ijk}\frac{1}{2}\epsilon_{kab}J^{ab} \equiv i\,\epsilon_{ijk}\,L_k \quad \text{(A.105)}
\end{aligned}$$

che dimostra appunto la (A.109).
Passiamo adesso alla dimostrazione della (A.110): si ha (si ricordi che $\delta^{a0} = 0$; $\delta^{ab} = -\delta^a_b$)

$$\begin{aligned}
[L_i, K_j] &= \frac{1}{2}\,\epsilon_{iab}\left[J^{ab}, J^{0j}\right] = \frac{-i}{2}\,\epsilon_{iab}\left\{\delta^{a0}\,J^{bj} + \delta^{bj}\,J^{a0} - \delta^{aj}\,J^{b0} - \delta^{b0}\,J^{aj}\right\} \\
&= \frac{-i}{2}\,\epsilon_{iab}\left\{-\delta^b_j\,J^{a0} + \delta^a_j\,J^{b0}\right\} = \frac{i}{2}\,\epsilon_{iaj}\,J^{a0} - \frac{i}{2}\,\epsilon_{ijb}\,J^{b0} = \\
&= \frac{i}{2}\,\epsilon_{ija}\,J^{0a} + \frac{i}{2}\,\epsilon_{ijb}\,J^{0b} = i\,\epsilon_{ijk}\,J^{0k} = i\,\epsilon_{ijk}\,K_k \quad \text{(A.106)}
\end{aligned}$$

Infine, quanto alla (A.111), la dimostrazione esplicita è la seguente

$$\begin{aligned}
[K_i, K_j] &= \left[J^{0i}, J^{0j}\right] = -i\left\{\delta^{00}\,J^{ij} + \delta^{ij}\,J^{00} - \delta^{0j}\,J^{i0} - \delta^{i0}\,J^{0j}\right\} = \\
&= -i\,\delta^{00}\,J^{ij} = -i\,J^{ij} = -i\,\epsilon_{ijk}\,L_k \quad \text{(A.107)}
\end{aligned}$$

dove abbiamo usato sia il fatto che $\delta^{00} = 1$, come pure che

$$L_k \equiv \frac{1}{2}\,\epsilon_{kab}\,J^{ab} \;\Leftrightarrow\; J^{ab} = J_{ab} = \epsilon_{abi}\,L_i \quad \text{(A.108)}$$

$$
\begin{aligned}
[L_i,\, K_j] &= i\,\epsilon_{ijk}\,K_k & \text{(A.110)}\\
[K_i,\, K_j] &= -i\,\epsilon_{ijk}\,L_k & \text{(A.111)}
\end{aligned}
$$

Vediamo adesso, esplicitamente, la forma di queste matrici: quanto alle matrici K_j, abbiamo

$$K_1 \equiv \left(J^{01}\right)^{\mu}_{.\,\nu} \equiv i\left(\delta^{0\mu}\,\delta^{1}_{\nu} - \delta^{1\mu}\,\delta^{0}_{\nu}\right) = i\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{A.112}$$

e similmente

$$K_2 = i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad K_3 = i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{A.113}$$

mentre, quanto alle matrici L_k, esse hanno la forma seguente:

$$
\begin{aligned}
L_1 &\equiv \left(J^{23}\right)^{\alpha}_{.\,\beta} \equiv i\left(\delta^{2\alpha}\,\delta^{3}_{\beta} - \delta^{3\alpha}\,\delta^{2}_{\beta}\right) = i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \text{(A.114)}\\
L_2 &\equiv -\left(J^{13}\right)^{\alpha}_{.\,\beta} \equiv -i\left(\delta^{1\alpha}\,\delta^{3}_{\beta} - \delta^{3\alpha}\,\delta^{1}_{\beta}\right) = i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{(A.115)}\\
L_3 &\equiv \left(J^{12}\right)^{\alpha}_{.\,\beta} \equiv i\left(\delta^{1\alpha}\,\delta^{2}_{\beta} - \delta^{2\alpha}\,\delta^{1}_{\beta}\right) = i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{(A.116)}
\end{aligned}
$$

Le matrici $\vec{K}$ sono i generatori dei boost, ovvero delle matrici di Lorentz che, senza rotazione degli assi, descrivono la legge di trasformazione delle coordinate spazio-temporali fra due sistemi di riferimento in moto relativo.
Come esempio, iniziamo considerando un boost[321] lungo l'asse z con velocità v. Risulta

$$B_z(v) \equiv= \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch\,\eta & 0 & 0 & -sh\,\eta\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -sh\,\eta & 0 & 0 & ch\,\eta \end{pmatrix} \tag{A.117}$$

[321]Stiamo assumendo che si tratti, comunque, di una trasformazione passiva. Secondo questa ipotesi, il secondo riferimento, nel quale siamo trasformati dal boost, si muove rispetto al primo nel verso positivo dell'asse z. Quindi, un punto che sia fermo nel primo sistema di riferimento, è visto muoversi, nel secondo riferimento, nel verso opposto a quello dell'asse z ...

dove abbiamo posto

$$\eta \equiv th^{-1}(\beta) \Rightarrow \beta = th\,\eta = \frac{sh\,\eta}{ch\,\eta} \Rightarrow \gamma = ch\,\eta \tag{A.118}$$

E' facile verificare allora che risulta

$$B_z(v) = e^{i\,\eta\,K_3} \tag{A.119}$$

Infatti, se definiamo la matrice reale $A \equiv iK_3$, abbiamo

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \ (A)^{2n} = A^2;\ \ (A)^{2n+1} = A \end{aligned} \tag{A.120}$$

e dunque

$$\begin{aligned} e^{i\,\eta\,K_3} &= e^{\eta A} = I + \eta\,A + \frac{1}{2!}\eta^2 A^2 + \frac{1}{3!}\eta^3 A^3 + \frac{1}{4}\eta^4 A^4 + ... = \\ &= I + A\left(\frac{\eta}{1!} + \frac{\eta^3}{3!} + ...\right) + A^2\left(\frac{\eta^2}{2!} + \frac{\eta^4}{4!} + ...\right) = \\ &= I + A\,sh\,\eta + A^2(ch\,\eta - 1) \equiv B_z(v) \end{aligned} \tag{A.121}$$

Nel caso di un boost che descrive, senza rotazione degli assi, la legge di trasformazione fra due riferimenti in moto relativo con velocità qualsiasi $\vec{v}$, ecco che posto $\vec{n} \equiv \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ ed $\eta \equiv th^{-1}(|\vec{v}|)$, risulta

$$B(\vec{v}) = e^{i\eta\,\vec{n}\cdot\vec{K}} \tag{A.122}$$

ovvero

$$B(\vec{v}) = e^{i\eta\,\vec{n}\cdot\vec{K}} = e^{i\eta\,n_i\,K_i} \equiv e^{i\eta_i\,K_i} = e^{\frac{i}{2}\eta_i\,(J^{0i}-J^{i0})} \tag{A.123}$$

da cui ne segue che la matrice dei parametri ω di cui alla (A.99), per un generico boost ha la forma seguente

$$\omega_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\eta_1 & -\eta_2 & -\eta_3 \\ \eta_1 & 0 & 0 & 0 \\ \eta_2 & 0 & 0 & 0 \\ \eta_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{A.124}$$

Infatti, data la (A.124), risulta immediato che

$$-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\,J^{\mu\nu} = -i\,\omega_{0i}\,J^{0i} = -i\,(-\eta_i)\,K_i = i\,\eta_i\,K_i \tag{A.125}$$

A differenza dei generatori dei boost K_i che, per la (A.111), *non* formano un'algebra di Lie chiusa[322], gli operatori L_i, data la (A.109), generano un'algebra di Lie chiusa che è quella, appunto, del gruppo delle rotazioni, sottogruppo del gruppo di Lorentz.
Essi, insieme alle trasformazioni finite da loro generate, agiscono evidentemente solo sugli indici spaziali: poiché queste ultime devono conservare il ds^2, non mutando la coordinata temporale, devono evidentemente lasciare invariante il dr^2 ovvero deve trattarsi di rotazioni.
Restringendo allora il sottogruppo delle trasformazioni Λ_R generate dagli L_i alla sola parte spaziale 3×3, otteniamo il gruppo $SO(3)$ delle rotazioni in tre dimensioni, i cui generatori $\hat{L}_i$, ottenuti anch'essi restringendo gli L_i ai soli indici spaziali, hanno la ben nota forma

$$\left(\hat{L}_i\right)_{jk} = -i\,\epsilon_{ijk} \tag{A.127}$$

Le matrici $\hat{L}_j$ definite dalla (A.127) soddisfano la relazione

$$R\;\hat{L}_j\;R^{-1} = R_{kj}\,\hat{L}_k \equiv (R^{-1})_{jk}\,\hat{L}_k \quad\Rightarrow\quad R^{-1}\;\hat{L}_j\;R = R_{jk}\,\hat{L}_k \tag{A.128}$$

qualunque sia la rotazione R di $SO(3)$.
Questo significa che, attraverso la (A.128), è definita sugli $\hat{L}_j$ la rappresentazione vettoriale ($s = 1$) di $SO(3)$. Passiamo alla sua dimostrazione: si ha

$$\left(R\;\hat{L}_j\;R^{-1}\right)_{mn} \;=\; R_{mk}\,(\hat{L}_j)_{ks}\,R^{-1}_{sn} = R_{mk}\,(\hat{L}_j)_{ks}\,R_{ns} = -i\,R_{mk}\,\epsilon_{jks}\,R_{ns}$$

D'altronde, il tensore completamente antisimmetrico di Ricci soddisfa la condizione

$$\epsilon_{kmn}\,R_{ik}\,R_{jm}\,R_{ln} = \epsilon_{ijl} \tag{A.129}$$

[322]Una conseguenza di questo fatto è che un loop di boosts che riporti al riferimento di partenza produce una rotazione del riferimento finale rispetto a quello iniziale. Per rendersene conto, consideriamo due trasformazioni infinitesime secondo l'asse x ed y, rispettivamente. Risulta

$$\begin{aligned} & e^{iaK_1}\,e^{ibK_2}\,e^{-iaK_1}\,e^{-ibK_2} \approx (I+iaK_1)(I+ibK_2)(I-iaK_1)(I-ibK_2) = \\ = \;& (I+iaK_1)(I-iaK_1)(I+ibK_2)(I-ibK_2) + (I+iaK_1)\,[(I+ibK_2),(I-iaK_1)]\,(I-ibK_2) \end{aligned}$$

Il primo addendo è effettivamente la trasformazione identica, ma il secondo non è nullo e, sempre al primo ordine in a e b, esso vale

$$\begin{aligned} (I+iaK_1)\,[(I+ibK_2),(I-iaK_1)]\,(I-ibK_2) \;&\approx\; [(I+ibK_2),(I-iaK_1)] = \\ &=\; ab\,[(K_2,K_1] = i\,ab\,L_3 \end{aligned} \tag{A.126}$$

cioè descrive una rotazione infinitesima intorno all'asse z.
I boost, infatti, *non* formano un sottogruppo del gruppo di Lorentz !

per cui abbiamo che

$$\begin{aligned}-i\,R_{mk}\,\epsilon_{jks}\,R_{ns} &= -i\,\delta_{jt}\,\epsilon_{tks}\,R_{ns}\,R_{mk} = -i\,R_{vt}R_{vj}\,\epsilon_{tks}\,R_{ns}\,R_{mk} = \\ &= -i\,R_{vj}\,\epsilon_{tks}\,R_{vt}\,R_{mk}\,R_{ns} = -i\,R_{vj}\,\epsilon_{vmn} = R_{vj}\,(\hat{L}_v)_{mn}\end{aligned}$$

che dimostra appunto la (A.128).

Dalla teoria del gruppo delle rotazioni sappiamo inoltre che una generica matrice 3×3 di rotazione R si può sempre scrivere come[323]

$$R = e^{i\phi\,\vec{n}\cdot\vec{\hat{L}}} \tag{A.138}$$

dove $\vec{\phi}\equiv\phi\,\vec{n}$ e la quantità positiva ϕ (compresa fra 0 e 2π ...) individua l'ampiezza della rotazione effettuata intorno all'asse individuato dal versore $\vec{n}$, in senso antiorario.
Ne segue quindi immediatamente che

$$R = e^{i\phi\,\vec{n}\cdot\vec{\hat{L}}} \quad\Leftrightarrow\quad \Lambda_R = e^{i\phi\,\vec{n}\cdot\vec{L}} \tag{A.139}$$

[323]Osserviamo che, dalla definizione, risulta

$$R = e^{i\phi\,\vec{n}\cdot\vec{\hat{L}}} = cos\phi\;\;\delta_{jk} + sin\phi\;\;\epsilon_{jkl}\;n_l + (1-cos\phi)\,n_j\,n_k \tag{A.130}$$

Definiamo infatti la matrice A nel modo seguente:

$$A\equiv i\vec{n}\cdot\vec{\hat{L}} \;\;\Rightarrow\;\; A_{jk} = n_i\,\epsilon_{ijk} \tag{A.131}$$

Ne segue dunque che

$$\begin{aligned}(A^2)_{jk} &= A_{jc}\,A_{ck} = n_a\,\epsilon_{ajc}\;n_b\,\epsilon_{bck} = n_a n_b\;\epsilon_{ajc}\,\epsilon_{kbc} = n_a n_b[\delta_{ak}\delta_{jb}-\delta_{ab}\delta_{jk}] = \\ &= n_j\,n_k - \delta_{jk} \qquad\qquad (A.132)\\ (A^3)_{jk} &= (A^2)_{jc}A_{ck} = (n_j\,n_c-\delta_{jc})n_a\,\epsilon_{ack} = n_j n_c n_a\,\epsilon_{ack} - n_a\,\epsilon_{ajk} = -n_a\,\epsilon_{ajk} = (-A)_{jk} \\ &\Rightarrow A^3 = -A \qquad\qquad (A.133)\\ (A^4)_{jk} &= (A^2)_{jc}(A^2)_{ck} = (n_j\,n_c-\delta_{jc})(n_c\,n_k-\delta_{ck}) = n_j n_c n_c n_k - n_j n_k - n_j n_k + \delta_{jk} = \\ &= -n_j n_k + \delta_{jk} = -(A^2)_{jk} \\ &\Rightarrow A^4 = -A^2 \qquad\qquad (A.134)\\ &\Rightarrow A^5 = A^4 A = -A^2 A = -A^3 = A \qquad\qquad (A.135)\\ &\Rightarrow A^6 = A^4A^2 = -A^2A^2 = -A^4 = A^2 \qquad\qquad (A.136)\\ &\quad ...\end{aligned}$$

per cui risulta infine che

$$\begin{aligned}R &= e^{i\phi\,\vec{n}\cdot\vec{\hat{L}}} = e^{\phi A} = I + \phi A + \frac{1}{2!}\phi^2A^2 + \frac{1}{3!}\phi^3A^3 + \frac{1}{4!}\phi^4A^4 + \frac{1}{5!}\phi^5A^5\frac{1}{6!}\phi^6A^6 + ...\\ &= I + A(\phi - \frac{1}{3!}\phi^3 + \frac{1}{5!}\phi^5 + ...) + A^2(\frac{1}{2!}\phi^2 - \frac{1}{4!}\phi^4 + \frac{1}{6!}\phi^6 + ...) = I + A\,sin\phi + A^2(cos\phi - 1)\\ &\Rightarrow R_{jk} = \delta_{jk} + n_i\,\epsilon_{ijk}\,sin\phi + (n_jn_k - \delta_{jk})(1-cos\phi) = \\ &= \delta_{jk}\;cos\phi + \epsilon_{jkl}\;n_l\;sin\phi + n_jn_k\;(1-cos\phi) \qquad\qquad (A.137)\end{aligned}$$

e dunque che, posto per comodità di notazione $\phi\, n_k \equiv \phi_k$

$$i\vec{\phi}\cdot\vec{L} = i\phi_k\,\frac{1}{2}\epsilon_{kij}\,J^{ij} = \frac{i}{2}\left(\epsilon_{ijk}\phi_k\right)J^{ij} \qquad (A.140)$$

per cui ecco che, per una generica rotazione nello spazio-tempo Λ_R, la matrice dei parametri ω di cui alla (A.99), deve essere tale che

$$\omega_{ij} = -\epsilon_{ijk}\phi_k \qquad (A.141)$$

ovvero[324]

$$\omega_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\phi_3 & \phi_2 \\ 0 & \phi_3 & 0 & -\phi_1 \\ 0 & -\phi_2 & \phi_1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (A.145)$$

Tornando alla struttura di Lie del gruppo di Lorentz ortocrono proprio, osserviamo che se poniamo

$$\vec{J}^1 = \frac{\vec{L}+i\vec{K}}{2} \qquad (A.146)$$

$$\vec{J}^2 = \frac{\vec{L}-i\vec{K}}{2} \qquad (A.147)$$

allora, in termini di questi nuovi operatori, l'algebra di Lie del gruppo diviene

$$\begin{aligned} \left[J^1_m, J^1_n\right] &= i\,\epsilon_{mnk}\,J^1_k \\ \left[J^2_m, J^2_n\right] &= i\,\epsilon_{mnk}\,J^2_k \\ \left[J^1_m, J^2_n\right] &= 0 \end{aligned}$$

[324]Come esempio, esplicitiamo la rotazione Λ_R definita dall'angolo ϕ intorno all'asse z, i.e. tale che $\vec{n} = (0,0,1) \Leftrightarrow \vec{\phi} = (0,0,\phi)$. Per la (A.137), risulta che gli unici termini non nulli della matrice R di $SO(3)$ corrispondente sono i seguenti

$$R_{11} = R_{22} = cos\phi;\quad R_{33} = cos\phi + (1-cos\phi) = 1 \qquad (A.142)$$

$$R_{12} = -R_{21} = \epsilon_{12k}\,n_k\,sin\phi = \epsilon_{123}\,sin\phi = sin\phi \qquad (A.143)$$

per cui

$$(\Lambda_R)^{\alpha}_{.\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos\phi & sin\phi & 0 \\ 0 & -sin\phi & cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (A.144)$$

ed essa, correttamente, trasforma, per esempio, il quadrivettore $p^\mu = (t,x,0,0)$ nel quadrivettore $p'^\mu = (t, x\,cos\phi, -x\,sin\phi, 0)$, come deve appunto accadere nel caso di una trasformazione (passiva) di riferimento che consiste in una sua rotazione di un angolo ϕ intorno all'asse z.

ovvero, in termini di $\vec{J}^1$ e $\vec{J}^2$, essa viene decomposta nella somma diretta di due algebre di Lie del gruppo delle rotazioni, indipendenti tra loro.
Ne segue allora che ogni rappresentazione di dimensione finita e irriducibile del gruppo di Lorentz sarà il prodotto diretto di due rappresentazioni di $SU(2)$ e quindi sarà descritta da due numeri semidispari s_1 ed s_2 che individueranno, rispettivamente, la rappresentazione dei generatori $\vec{J}^1$ e $\vec{J}^2$, tali per cui[325,326]

$$|\vec{J}^1|^2 = s_1(s_1+1)\, I \tag{A.148}$$

$$|\vec{J}^2|^2 = s_2(s_2+1)\, I \tag{A.149}$$

La rappresentazione di $\mathcal{L}_+^\uparrow$ si indica con il simbolo $s_1 \otimes s_2$ e la sua dimensione n è tale che $n = (2s_1+1)(2s_2+1)$. Nel caso della rappresentazione costituita dalle matrici di Lorentz stesse, si tratta della $\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2}$.

Riguardo infine all'unitarietà, dato che $\vec{J}_1$ e $\vec{J}_2$ sono hermitiani in quanto generatori di una rappresentazione finita di SU(2), essendo

$$A(\Lambda) = e^{i\vec{\Phi}\vec{L}}\, e^{i\vec{\alpha}\vec{K}} = e^{i\vec{\Phi}(\vec{J}^1+\vec{J}^2)}\, e^{\vec{\alpha}(\vec{J}^1-\vec{J}^2)}$$

$A(\Lambda)$ potrà essere unitaria solo per le trasformazioni che corrispondono ad elementi del gruppo di Lorentz per cui $\vec{\alpha} = 0$, ovvero solo per le rotazioni, visto che $e^{\vec{\alpha}(\vec{J}_1-\vec{J}_2)}$ è un operatore certamente hermitiano ma non unitario.

[325]Nel caso della rappresentazione fatta dalle matrici di Lorentz stesse, definita dai generatori definiti dalla (A.112)-(A.116), si verifica immediatamente che

$$(J_1^1)^2 = (J_2^1)^2 = (J_3^1)^2 = (J_1^2)^2 = (J_2^2)^2 = (J_3^2)^2 = \frac{1}{4} I$$

e quindi risulta $|\vec{J}^1|^2 = |\vec{J}^1|^2 = \frac{3}{4} I$, ovvero $s_1 = s_2 = \frac{1}{2}$.

[326]Ribadiamo che la conclusione circa la forma diagonale di $|\vec{J}^1|^2$ e $|\vec{J}^1|^2$ è corretta se e solo se la rappresentazione è irriducibile, ovvero non esiste alcuna matrice diversa da un multiplo dell'identità che commuta con tutti i generatori.

A.5 *Il gruppo di Lorentz ortocrono proprio* $\mathcal{L}_+^\uparrow$ *e* $SL(2,C)$

Il gruppo di ricoprimento universale di $\mathcal{L}_+^\uparrow$ è il gruppo $SL(2,C)$, costituito dalle matrici complesse 2×2, aventi determinante $+1$. Ogni matrice $A \in SL(2,C)$ può sempre essere scritta come prodotto[327] di una matrice hermitiana H avente traccia positiva e una matrice unitaria U, entrambe con determinante $+1$, cioè entrambe appartenenti a $SL(2,C)$, i.e.

$$A = H\,U; \qquad H \in SL(2,C), H = H^\dagger, Tr(H) > 0, \qquad U \in SL(2,C), U^{-1} = U^\dagger$$

Le matrici unitarie $U \in SL(2,C)$ costituiscono il ben noto sottogruppo $SU(2)$, il cui generico elemento, come sappiamo, si può scrivere come

$$U = e^{i\frac{\theta}{2}\,\vec{n}\cdot\vec{\sigma}} \qquad 0 \le \theta \le 4\pi;\;\; |\vec{n}| = 1 \tag{A.150}$$

Le matrici hermitiane $H \in SL(2,C)$ invece *non* costituiscono un sottogruppo perchè non sono stabili sotto il prodotto[328]. Si tratta di matrici che sono, evidentemente, diagonalizzabili con una matrice unitaria e dunque attraverso una matrice opportuna $U \in SU(2)$.

---

[327] Infatti, consideriamo la matrice $A\,A^\dagger$: evidentemente essa è hermitiana e definisce una forma quadratica positiva per cui è diagonalizzabile con una matrice unitaria opportuna P, ed i suoi autovalori sono tutti strettamente positivi

$$P\,(A\,A^\dagger)\,P^\dagger = \mathcal{D} \qquad \Rightarrow \qquad (A\,A^\dagger) = P^\dagger \mathcal{D}\,P$$

Siccome la matrice diagonale $\mathcal{D}$ ha solo autovalori positivi, si può definire la matrice diagonale D fatta dalle sue radici quadrate positive, i.e. in modo che

$$\mathcal{D} = D^2, \qquad\qquad Tr(D) > 0$$

Chiaramente, dovendo essere $det(D)^2 = det(\mathcal{D}) = 1$, $\mathcal{D}$ ha determinante $+1$.
Poniamo allora, per definizione

$$H = P^\dagger\,D\,P$$

E' evidente dalla definizione che H è hermitiana, ha determinante $+1$ e traccia positiva. Dimostriamo che la matrice $H^{-1}\,A \equiv P^\dagger\,D^{-1}\,P\,A$, che ha evidentemente determinante $+1$, è unitaria. Infatti

$$(H^{-1}\,A)^\dagger = A^\dagger\,P^\dagger\,D^{-1}\,P$$

e risulta

$$(H^{-1}\,A)^\dagger\,(H^{-1}\,A) = A^\dagger\,P^\dagger\,D^{-1}\,P\;P^\dagger\,D^{-1}\,P\,A = A^\dagger\,P^\dagger\,D^{-2}\,P\,A$$

ma

$$P^\dagger\,D^{-2}\,P = P^\dagger\,\mathcal{D}^{-1}\,P = (A\,A^\dagger)^{-1} = (A^\dagger)^{-1}\,A^{-1}$$

per cui

$$(H^{-1}\,A)^\dagger\,(H^{-1}\,A) = A^\dagger\,(A^\dagger)^{-1}\,A^{-1}\,A = I$$

c.v.d.

[328] Il prodotto di due matrici hermitiane non è in generale hermitiano, a meno che le due matrici non commutino fra loro.

Siccome quelle che ci interessano hanno traccia positiva e determinante +1, la loro forma diagonale sarà comunque la seguente

$$U^{-1}\,H\,U = D = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho^{-1} \end{pmatrix}, \qquad \rho \geq 1 \tag{A.151}$$

Poniamo allora

$$ln\,\rho \equiv \frac{\eta}{2} \tag{A.152}$$

ne risulta che

$$D = \begin{pmatrix} e^{\frac{\eta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{\eta}{2}} \end{pmatrix} = e^{\frac{\eta}{2}\,\sigma_z} \tag{A.153}$$

dove σ_z è la consueta terza matrice di Pauli, l'unica in forma diagonale.
La matrice H sarà quindi tale che

$$H = U\,D\,U^{-1} = U\,e^{\frac{\eta}{2}\,\sigma_z}\,U^{-1} = e^{\frac{\eta}{2}U\sigma_z U^{-1}} \tag{A.154}$$

Ma U è una matrice di $SU(2)$ che rappresenterà quindi una opportuna rotazione R, per cui avremo che

$$U\,\sigma_z\,U^{-1} = R_{3i}\,\sigma_i \tag{A.155}$$

D'altronde le righe della matrice R, essendo essa ortogonale, sono tali che $\sum_i (R_{3i})^2 = 1$ e dunque definiscono in modo naturale il seguente versore $\vec{k}$

$$\vec{k} \equiv (R_{31},\, R_{32},\, R_{33}) \tag{A.156}$$

per cui abbiamo infine che

$$H = e^{\frac{\eta}{2}\,\vec{k}\cdot\vec{\sigma}} \tag{A.157}$$

Questo dimostra che, in effetti, il generico elemento A di $SL(2,C)$ può essere messo sempre nella forma

$$A = e^{\frac{\eta}{2}\,\vec{k}\cdot\vec{\sigma}}\; e^{i\frac{\theta}{2}\,\vec{n}\cdot\vec{\sigma}} \tag{A.158}$$

dove $\vec{k}$ e $\vec{n}$ sono versori opportuni, mentre $0 \leq \theta \leq 4\pi$ e $0 \leq \eta < +\infty$ sono parametri reali.

Per renderci conto che $SL(2, C)$ costituisce il ricoprimento universale di $\mathcal{L}_+^\uparrow$, cominciamo con l'osservare che, data la fattorizzazione (A.158), esso ha una struttura analitica simile a quella di $SU(2)$ e in particolare si tratta di un gruppo di Lie semplicemente connesso[329]. Dunque, per dimostrare che è il ricoprimento universale di $\mathcal{L}_+^\uparrow$, basta dimostrare che esiste un omomorfismo da $SL(2, C)$ in $\mathcal{L}_+^\uparrow$, che diviene isomorfismo in tutto un intorno dell'identità, ovvero che i due gruppi hanno la stessa algebra di Lie.
A questo scopo, iniziamo mettendo in corrispondenza i punti dello spazio-tempo R^4 di Minkowski con gli elementi $\mathcal{C}(x^\mu)$ dello spazio vettoriale $\mathcal{H}^{(2)}$ sul corpo reale

Figure 27: *Hermann Minkowski (1864-1909)*

delle matrici hermitiane 2×2. Poniamo per questo

$$(x^\mu) \equiv (x^0, \vec{x}) \rightarrow \mathcal{X} \equiv \mathcal{C}(x^\mu) \equiv x^\mu\, \sigma_\mu = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} \quad \text{(A.159)}$$

dove σ_0 è la matrice identica 2×2, mentre le σ_i sono le consuete matrici di Pauli, ovvero

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{(A.160)}$$

[329]A differenza di $SU(2)$, il gruppo $SL(2, C)$ non è compatto, proprio perchè il parametro η di cui sopra può assumere un qualunque valore reale e quindi l'insieme dei parametri reali che descrivono gli elementi del gruppo non è compatto in R^n.

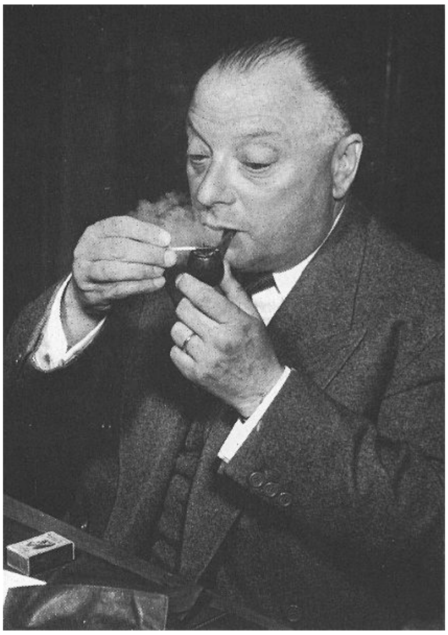


Figure 28: *Wolfang Pauli (1900-1958)*

La corrispondenza $\mathcal{C}$ definita dalla (A.159) è invertibile e risulta

$$(x^\mu) \equiv \mathcal{C}^{-1}(\mathcal{X}) = \frac{1}{2}\,Tr(\mathcal{X}\,\sigma_\mu) \tag{A.161}$$

Si noti che l'invariante di Lorentz s^2 associato a x^μ, data la (A.159), risulta semplicemente dato da

$$s^2 \equiv x^\mu x_\mu = det(\mathcal{X}) \tag{A.162}$$

Consideriamo adesso la seguente trasformazione lineare $\mathcal{T}_A$ dallo spazio vettoriale $\mathcal{H}^{(2)}$ in sè:

$$\mathcal{X} \to \mathcal{X}' = \mathcal{T}_A(\mathcal{X}) \equiv A\,\mathcal{X}\,A^\dagger \tag{A.163}$$

dove A è un qualunque elemento di $SL(2,C)$. E' immediato che $\mathcal{T}$ definisce una rappresentazione di $SL(2,C)$ nello spazio delle trasformazioni lineari di $\mathcal{H}^{(2)}$ in sè, infatti

$$\mathcal{T}_A\mathcal{T}_B = \mathcal{T}_{AB}$$

Siccome $det(A) = 1$, questa trasformazione è tale per cui le due matrici $\mathcal{X}$ e $\mathcal{X}'$ hanno lo stesso determinante, ovvero, l'invariante di Lorentz associato al quadrivettore $(x')^\mu$ definito partire da $\mathcal{X}'$ attraverso la (A.161). i.e.

$$x'^\mu = \frac{1}{2}\,Tr(\mathcal{X}'\,\sigma_\mu)$$

ha lo stesso valore di quello associato al quadrivettore di partenza (x^μ) e dunque i due quadrivettori sono legati necessariamente da una opportuna trasformazione Λ_A del gruppo di Lorentz. Risulta

$$\begin{aligned}
x'^\mu &= \frac{1}{2}Tr(\mathcal{X}'\,\sigma_\mu) = \frac{1}{2}Tr(A\,\mathcal{X}\,A^\dagger\;\sigma_\mu) = \frac{1}{2}Tr(A\,x^\nu\sigma_\nu\,A^\dagger\;\sigma_\mu) = \\
&= x^\nu\;\frac{1}{2}Tr(A\,\sigma_\nu\,A^\dagger\;\sigma_\mu) \\
&\Rightarrow\;(\Lambda_A)^\mu_{\;.\nu} = \frac{1}{2}Tr(A\,\sigma_\nu\,A^\dagger\;\sigma_\mu) = \frac{1}{2}Tr(\sigma_\mu\,A\,\sigma_\nu\,A^\dagger) \qquad \text{(A.164)} \\
i.e. \qquad & A \to \Lambda_A : (\Lambda_A)^\mu_{\;.\nu} = \frac{1}{2}Tr(\sigma_\mu\,A\,\sigma_\nu\,A^\dagger) \qquad \text{(A.165)}
\end{aligned}$$

ovvero abbiamo

$$A \to \Lambda_A = \mathcal{C}^{-1}\;\mathcal{T}_A\;\mathcal{C} \qquad \text{(A.166)}$$

la quale, unita alle considerazioni precedenti, mostra che la corrispondenza sopra definita fra gli elementi del gruppo $SL(2,C)$ e quelli del gruppo di Lorentz ha le caratteristiche di un omomorfismo, i.e. rispetta il prodotto di composizione interna. Vogliamo dimostrare che Λ_A è un elemento del gruppo ortocrono proprio. Per questo, ricordiamo che ogni elemento di $SL(2,C)$ è individuato da due vettori, $\theta\vec{n}$ e $\eta\vec{k}$ che descrivono, rispettivamente, la parte hermitiana e quella unitaria della decomposizione di A. Fissato allora un qualunque elemento $A \in SL(2,C)$, si può definire una famiglia $\{A(t), t \in [0,1]\}$ di elementi di $SL(2,C)$, che, in funzione di un parametro t, consente di passare con continuità dall'elemento identico ad A. Per definizione poniamo

$$A(t) \equiv e^{\frac{t\,\eta}{2}\,\vec{k}\cdot\vec{\sigma}}\,e^{i\frac{t\,\theta}{2}\;\vec{n}\cdot\vec{\sigma}} \qquad \Rightarrow \qquad A(0) = I; \qquad A(1) = A \qquad \text{(A.167)}$$

Evidentemente, se indichiamo con $\Lambda(t)$ la matrice di Lorentz corrispondente alla $A(t)$ secondo la (A.165), questa risulta essere una funzione analitica del parametro t, tale che $\Lambda(0) = I$, $\Lambda(1) = \Lambda_A$. Ma abbiamo già osservato che le matrici del gruppo di Lorentz hanno determinante pari a $+1$ oppure -1: siccome per $t = 0$ il determinante è ovviamente pari a $+1$, per l'analiticità di cui sopra, non può che rimanere tale per ogni t e dunque deve essere $det(\Lambda_A) = +1$.
Analogamente, per quanto riguarda Λ^{00}_A, poichè si è già visto che questa quantità o è non inferiore a $+1$ oppure è non superiore a -1 e poichè per $t = 0$ essa è pari a $+1$ e dipende da t in modo analitico, deve restare positiva anche per $t = 1$, cioè per Λ_a.
Dunque $\Lambda_A \in \mathcal{L}^\uparrow_+$.

Evidentemente, secondo la (A.165), risulta anche che

$$\Lambda_A = \Lambda_{-A} \tag{A.168}$$

Questo significa che l'applicazione (A.165) definita da $SL(2,C)$ in $\mathcal{L}_+^\uparrow$ non è iniettiva. E' invece suriettiva: ogni elemento di $\mathcal{L}_+^\uparrow$ risulta immagine di un opportuno elemento di $SL(2,C)$ (anzi, di due). Localmente, il mapping è 1 ad 1, ovvero un intorno opportuno dell'identità di $SL(2,C)$ va in un intorno dell'identità di $\mathcal{L}_+^\uparrow$ e viceversa: questo garantisce che i due gruppi abbiano la stessa algebra di Lie. Per questi motivi, il gruppo $SL(2,C)$, che non è compatto ma è semplicemente connesso, costituisce appunto il ricoprimento universale di $\mathcal{L}_+^\uparrow$.

Riguardo all'identità fra le due algebre di Lie osserviamo che, così come il generico elemento di $SL(2,C)$ può essere scritto come

$$e^{i\frac{\eta}{2}\vec{k}\cdot(-i\vec{\sigma})}\, e^{i\frac{\theta}{2}\vec{n}\cdot\vec{\sigma}} \tag{A.169}$$

analogamente abbiamo visto che il generico elemento di $\mathcal{L}_+^\uparrow$ può essere scritto come

$$e^{i\eta\vec{k}\cdot\vec{K}}\, e^{i\theta\vec{n}\cdot\vec{L}} \tag{A.170}$$

ed effettivamente l'algebra di Lie generata da $\left\{\vec{L},\vec{K}\right\}$ risulta isomorfa a quella generata da $\left\{\frac{1}{2}\vec{\sigma}, -\frac{i}{2}\vec{\sigma}\right\}$.

A questo stesso risultato si può arrivare anche deteminando direttamente la corrispondenza fra le trasformazioni infinitesime di $SL(2,C)$ come parametrizzate dalla (A.169) e le loro corrispondenti in $\mathcal{L}_+^\uparrow$, secondo la parametrizzazione consueta (A.170).

Iniziamo dalle trasformazioni infinitesime del tipo $A = e^{i\frac{\theta}{2}\vec{n}\cdot\vec{\sigma}}$, ovvero dagli elementi di $SU(2)$ in $SL(2,C)$. In generale abbiamo visto che la corrispondenza delle matrici di $SL(2,C)$ con le trasformazioni del gruppo di Lorentz è data dalla relazione

$$(\Lambda)^{\mu}_{\cdot\nu} \equiv (\Lambda_A)^{\mu}_{\cdot\nu} = \frac{1}{2}\,Tr(\sigma_\mu\, A\, \sigma_\nu\, A^\dagger) \tag{A.171}$$

dunque, nel caso di trasformazioni infinitesime, al primo ordine nel parametro di sviluppo θ, si ha

$$A \approx I + i\,\frac{\theta}{2}\,\vec{n}\cdot\vec{\sigma} \;\;\Rightarrow\;\; (\Lambda)^{\mu}_{\cdot\nu} \approx \frac{1}{2}\,Tr\left[\sigma_\mu\,\left(I + i\,\frac{\theta}{2}\,\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\right)\,\sigma_\nu\,\left(I - i\,\frac{\theta}{2}\,\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\right)\right] \tag{A.172}$$

dove abbiamo usato il fatto che $\sigma_i = \sigma_i^\dagger$.

Sempre al primo ordine in θ, abbiamo dunque che

$$\begin{aligned}(\Lambda)^{\mu}_{\cdot\nu} &\approx \frac{1}{2}\,Tr\left[\sigma_\mu\sigma_\nu + \sigma_\mu\, i\,\frac{\theta}{2}\,\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\,\sigma_\nu - \sigma_\mu\sigma_\nu\, i\frac{\theta}{2}\,\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\right] = \\ &= \frac{1}{2}\,Tr\left[\sigma_\mu\sigma_\nu\right] + i\,\frac{\theta}{4}Tr\left[\sigma_\mu\,\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\,\sigma_\nu\right] - i\,\frac{\theta}{4}Tr\left[\sigma_\mu\,\sigma_\nu\,\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\right]\end{aligned} \tag{A.173}$$

D'altronde il termine $\frac{1}{2}\,Tr\,[\sigma_\mu \sigma_\nu]$ è semplicemente l'identità del gruppo di Lorentz, per cui risulta

$$\Lambda^\mu_{.\,\nu} - \delta^\mu_\nu \approx i\,\frac{\theta}{4} n_j\, Tr\,[\sigma_\mu\,\sigma_j\,\sigma_\nu] - i\,\frac{\theta}{4} n_j\, Tr\,[\sigma_\mu\,\sigma_\nu\,\sigma_j] \tag{A.174}$$

Osserviamo adesso che se uno dei due indici di Lorentz è quello temporale, allora poiché σ_0 è l'identità, i due termini al secondo membro della (A.174) si cancellano, per cui gli unici valori non nulli della matrice infinitesima $\Lambda^\mu_{.\nu} - \delta^\mu_\nu$ possono essere solo quelli in cui entrambi gli indici di Lorentz sono di tipo spazio. In questo caso risulta

$$\Lambda^l_{.\,k} - \delta^l_k \approx i\,\frac{\theta}{4} n_j\, Tr\,[\sigma_l\,\sigma_j\,\sigma_k] - i\,\frac{\theta}{4} n_j\, Tr\,[\sigma_l\,\sigma_k\,\sigma_j] \tag{A.175}$$

Ma nel caso di indici spaziali, risulta

$$Tr\,[\sigma_l\,\sigma_j\,\sigma_k] = 2i\,\epsilon_{ljk} \tag{A.176}$$

dunque, usando le ben note proprietà cicliche del tensore ϵ_{abc}, abbiamo infine che

$$\Lambda^l_{.\,k} - \delta^l_k \approx i\,\frac{\theta}{4} n_j\, 2i\,\epsilon_{ljk} - i\,\frac{\theta}{4} n_j\, 2i\,\epsilon_{jlk} = i\theta\, n_j\,(-i\epsilon_{jlk}) = i\theta\, n_j\,(L_j)^l_{.k} \tag{A.177}$$

dove $\vec{L}$ sono proprio i consueti generatori delle rotazioni.

Venendo adesso alle trasformazioni del tipo $A = e^{\frac{\eta}{2}\vec{k}\cdot\vec{\sigma}}$ (che non costituiscono un sottogruppo di $SL(2,C)$ ...), abbiamo che quelle infinitesime sono tali che

$$\begin{aligned} A &\approx I + \frac{\eta}{2}\,\vec{k}\cdot\vec{\sigma} \;\Rightarrow\; (\Lambda)^\mu_{.\,\nu} \approx \frac{1}{2}\,Tr\left[\sigma_\mu\,\left(I + \frac{\eta}{2}\,\vec{k}\cdot\vec{\sigma}\right)\,\sigma_\nu\,\left(I + \frac{\eta}{2}\,\vec{k}\cdot\vec{\sigma}\right)\right] \\ &\Rightarrow\; \Lambda^\mu_{.\,\nu} - \delta^\mu_\nu \approx \frac{\eta}{4}\,k_j\, Tr\,[\sigma_\mu\,\sigma_j\,\sigma_\nu] + \frac{\eta}{4}\,k_j\, Tr\,[\sigma_\mu\,\sigma_\nu\,\sigma_j] \end{aligned} \tag{A.178}$$

e in questo caso, proprio per gli stessi argomenti usati in precedenza, gli elementi della matrice infinitesima $\Lambda^\mu_{.\nu} - \delta^\mu_\nu$ sono nulli quando sono entrambi di tipo spaziale o entrambi di tipo temporale. I soli elementi che possono essere non nulli sono quelli per cui $\mu = 0$ oppure $\nu = 0$ (ma non entrambi). In quel caso, per le proprietà della traccia (è il caso in cui una delle due matrici con indice μ o ν è la matrice identica), la matrice è simmetrica. Risulta in definitiva che

$$\Lambda^0_{.\,\nu} - \delta^0_\nu \approx \frac{\eta}{2}\,k_j\, Tr\,[\sigma_j\,\sigma_\nu] = \eta\; k_j\,\delta^j_\nu = i\eta\, k_j (K_j)^0_{.\,\nu} \tag{A.179}$$

dove $\vec{K}$ sono i consueti generatori dei boost.

A.6 *La rappresentazione spinoriale*

Una importante rappresentazione del gruppo di Lorentz è quella spinoriale $S(\Lambda)$, la quale descrive le proprietà di trasformazione sotto il gruppo di Lorentz delle soluzioni dell'equazioni di Dirac.
Ricordiamo che l'equazione di Dirac nasce dall'idea di avere una equazione del primo ordine nelle derivate parziali spazio-temporali ∂_μ, la quale garantisca comunque alle soluzioni di soddisfare anche l'equazione di Klein-Gordon, che è l'equazione relativistica "necessaria" per una qualsiasi particella di massa m.
Occorre quindi che l'operatore di Dirac $\not{D} \equiv i\,\gamma^\mu \partial_\mu$ sia tale per cui

$$(\not{D})^2 = -\Box \equiv -\partial^\mu \partial_\mu \tag{A.180}$$

in modo che, se ψ soddisfa l'equazione $(\not{D} - m)\psi = 0$ e quindi anche l'equazione $(\not{D} + m)(\not{D} - m)\psi = 0$, se vale la (A.180), essa soddisfi appunto anche l'equazione di Klein-Gordon $(\Box + m^2)\psi = 0$.
Ma affinché possa essere soddisfatta la (A.180) occorre e basta che soddisfi la condizione

$$\{\gamma^\mu,\, \gamma^\nu\} = 2\,\delta^{\mu\nu} \cdot I \tag{A.181}$$

la quale, come sappiamo, definisce una struttura di algebra di Clifford[330,331].

Per quanto visto precedentemente (cfr.(A.62) e (A.87)), siamo dunque in grado di definire una rappresentazione S del gruppo di Lorentz ortocrono proprio $\mathcal{L}_+^\uparrow$ (ovvero di $SO(1,3)$) attraverso i generatori

$$M^{\mu\nu} = \frac{i}{4}\,[\gamma^\mu,\, \gamma^\nu] \Leftrightarrow S(\Lambda) = e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}} \tag{A.183}$$

Questa rappresentazione viene talvolta indicata, equivalentemente, anche come

$$S(\Lambda) = e^{-\frac{i}{2}\,\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}} = e^{\frac{1}{8}\,\omega_{\mu\nu}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]} \equiv e^{\frac{i}{4}\,\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}} \tag{A.184}$$

dove il tensore $\sigma^{\mu\nu}$ è definito come

$$\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2i}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \tag{A.185}$$

La rappresentazione $S(\Lambda)$ definita dalla (A.184) è la *rappresentazione spinoriale*, la quale caratterizza la legge di trasformazione sotto il gruppo di Lorentz del campo di Dirac, tale appunto per cui risulta

$$U(a,\Lambda)\,\psi(x)\,U^{-1}(a,\Lambda) = S^{-1}(\Lambda)\,\psi(\Lambda x + a) \tag{A.186}$$

[330] H. Giorgi: *Lie algebras in particle physics*, Westview Press, Boulder, Colorado 1999.
[331] La rappresentazione delle matrici γ^μ che useremo à quella di Pauli-Dirac (cfr. (A.19)), i.e.

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \tag{A.182}$$

Sempre per quanto già visto (cfr.(A.89)), la $S(\Lambda)$ agisce sulle matrici γ^μ attraverso la rappresentazione vettoriale del gruppo, i.e. risulta che

$$S(\Lambda)\,\gamma^\mu\,S^{-1}(\Lambda) = (\Lambda^{-1})^\mu_{.\nu}\,\gamma^\nu \quad\Leftrightarrow\quad S^{-1}(\Lambda)\,\gamma^\mu\,S(\Lambda) = (\Lambda)^\mu_{.\nu}\,\gamma^\nu \qquad (A.187)$$

Vediamo adesso alcune altre proprietà interessanti della rappresentazione spinoriale:

- essa *non* è una rappresentazione unitaria (non potrebbe mai esserlo trattandosi di una rappresentazione non banale di dimensione finita di un gruppo non compatto), infatti essa[332] è tale per cui

$$\begin{aligned} &S(\Lambda)^\dagger = \gamma^0\,S^{-1}(\Lambda)\,\gamma^0 \Leftrightarrow S(\Lambda)^\dagger = \gamma^0\,S(\Lambda^{-1})\,\gamma^0 \\ &\Leftrightarrow \gamma^0\,S(\Lambda)^\dagger\gamma^0 = S(\Lambda^{-1}) = S^{-1}(\Lambda) \end{aligned} \qquad (A.191)$$

- per una rotazione[333] $R(\vec{\theta}) = e^{i\vec{\theta}\cdot\vec{L}}$ definita dal vettore $\vec{\theta} \equiv \theta\,\vec{n}$, risulta

$$S(\vec{\theta}) = e^{\frac{i}{2}\,\vec{\theta}\cdot\vec{\Sigma}} = cos(\theta/2)\,I + i(\vec{n}\cdot\vec{\Sigma})\,sin(\theta/2) \qquad (A.192)$$

  dove

$$\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \qquad (A.193)$$

[332]Dalla definizione (A.184) della $S(\Lambda)$ abbiamo infatti che

$$S(\Lambda) = e^{\frac{1}{8}\,\omega_{\mu\nu}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]} \Rightarrow S(\Lambda)^\dagger = e^{\left(\frac{1}{8}\,\omega_{\mu\nu}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]\right)^\dagger} \qquad (A.188)$$

ma $\omega_{\mu\nu}$ è la matrice dei coefficienti che, essendo reale, non è alterata dall'aggiunzione (si osservi a questo proposito che l'aggiunzione è fatta rispetto agli indici spinoriali, i quali non hanno nulla a che vedere con gli indici della matrice dei coefficienti ...); mentre risulta

$$([\gamma^\mu,\gamma^\nu])^\dagger = [\gamma^{\nu\dagger},\gamma^{\mu\dagger}] \qquad (A.189)$$

per cui, ricordando che $\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$, ne segue che

$$\begin{aligned} S(\Lambda)^\dagger &= e^{\frac{1}{8}\,\omega_{\mu\nu}\gamma^0[\gamma^\nu,\gamma^\mu]\gamma^0} = \gamma^0\,e^{\frac{1}{8}\,\omega_{\mu\nu}[\gamma^\nu,\gamma^\mu]}\,\gamma^0 = \gamma^0\,e^{-\frac{1}{8}\,\omega_{\mu\nu}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]}\,\gamma^0 = \\ &= \gamma^0\,S(\Lambda^{-1})\,\gamma^0 = \gamma^0\,S^{-1}(\Lambda)\,\gamma^0 \end{aligned} \qquad (A.190)$$

[333]Dalla definizione (A.103) abbiamo infatti che i generatori delle rotazioni sono definiti, in termini dei generatori del gruppo di Lorentz, come

$$\vec{J} = (M^{23}, M^{31}, M^{12})$$

Usando allora la definizione (A.184) di $M^{\mu\nu}$ relativa alla rappresentazione spinoriale, è immediato dimostrare che

$$\vec{J} = \frac{1}{2}\,\vec{\Sigma}$$

dove $\vec{\Sigma}$ è data appunto dalla (A.193).

- per un boost $B(\vec{v}) = e^{i\eta\,\vec{n}\cdot\vec{K}}$, definito dalla velocità $\vec{v} = v\,\vec{n} = th(\eta)\,\vec{n}$ dove $0 \leq v \leq 1$ ed η è la rapidità del boost $(0 \leq \eta \equiv th^{-1}(v) \leq +\infty)$, risulta[334]

$$S(\vec{v}) = e^{-\frac{1}{2}\,\eta\,\vec{n}\cdot\vec{\alpha}} = ch(\eta/2)\,I - (\vec{n}\cdot\vec{\alpha})\,sh(\eta/2) \tag{A.194}$$

dove, per definizione, abbiamo posto

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \tag{A.195}$$

- siccome la matrice γ_5 anticommuta con tutte del γ^μ, essa commuta con $\sigma_{\mu\nu}$ ed è quindi scalare per trasformazioni di Lorentz, i.e. risulta

$$S^{-1}(\Lambda)\,\gamma_5\,S(\Lambda) = \gamma_5 \tag{A.196}$$

Abbiamo visto che, a partire dai generatori $\vec{J}$ e $\vec{K}$ delle rappresentazioni finite del gruppo di Lorentz si possono costruire gli operatori indipendenti

$$\vec{L}_1 \equiv \frac{\vec{J} + i\vec{K}}{2}; \qquad \vec{L}_2 \equiv \frac{\vec{J} - i\vec{K}}{2} \tag{A.197}$$

che costituiscono, separatamente, una rappresentazione dei generatori di $SU(2)$. Questo garantisce che, nel caso di una rappresentazione irriducibile, questa possa essere vista come il prodotto diretto di due rappresentazioni di $SU(2)$.
Se s_1 individua la rappresentazione definita da $\vec{L}_1$ mentre s_2 individua quella definita da $\vec{L}_2$, allora la rappresentazione del gruppo di Lorentz sarà semplicemente $s_1 \otimes s_2$ e avrà quindi dimensione $n = (2s_1 + 1) \times (2s_2 + 1)$.

Venendo ora alla rappresentazione spinoriale, osserviamo immediatamente che essa *non* può essere irriducibile proprio perché la matrice γ_5 commuta con le $\sigma^{\mu\nu}$, e dunque commuta sia con $\vec{J}$ che con $\vec{K}$ senza però essere multipla dell'identità. Gli autovalori di γ_5 sono ± 1, e quindi dobbiamo aspettarci che siano proprio i proiettori chirali ad individuare i sottospazi lasciati invarianti dalla rappresentazione spinoriale. In altre parole, la rappresentazione spinoriale risulterà essere la

[334] Dalla definizione (A.102) abbiamo infatti che i generatori dei boost sono definiti, in termini dei generatori $M^{\mu\nu}$ del gruppo di Lorentz, come

$$\vec{K} = (M^{01}, M^{02}, M^{03})$$

Usando allora, di nuovo, la definizione (A.184) di $M^{\mu\nu}$ relativa alla rappresentazione spinoriale, è immediato dimostrare che risulta

$$\vec{K} = \frac{i}{2}\,\vec{\alpha}$$

dove $\vec{\alpha}$ è data appunto dalla (A.195).
Siccome $(\vec{n}\cdot\vec{\alpha})^2 = I$, la (A.194) segue immediatamente.

somma diretta di due rappresentazioni irriducibili del gruppo di Lorentz, ciascuna definita nei sottospazi individuati dai proiettori chirali. Ciascuna di queste rappresentazioni sarà, a sua volta, definita da un opportuno prodotto diretto $s_1 \otimes s_2$ legato alle rappresentazioni di $\vec{L}_1$ e $\vec{L}_2$ in quegli stessi sottospazi invarianti. Per capire la forma di queste rappresentazioni, iniziamo esplicitando la forma degli operatori $\vec{L}_1$ e $\vec{L}_2$. Nella rappresentazione di Pauli-Dirac delle matrici γ, si ha

$$\vec{L}_1 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \vec{\sigma} & -\vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & \vec{\sigma} \end{pmatrix}; \qquad \vec{L}_2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \vec{\sigma} & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \tag{A.198}$$

mentre, riguardo ai proiettori chirali, è

$$\chi_L = \frac{1-\gamma_5}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix}; \qquad \chi_R = \frac{1+\gamma_5}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I & I \\ I & I \end{pmatrix} \tag{A.199}$$

ed è allora immediato che risulta

$$\chi_L\vec{L}_1 = \vec{L}_1; \qquad \chi_L\vec{L}_2 = 0 \tag{A.200}$$

$$\chi_R\vec{L}_1 = 0; \qquad \chi_R\vec{L}_2 = \vec{L}_2 \tag{A.201}$$

Questo significa che nel sottospazio definito dal proiettore χ_L, $\vec{L}_2$ potrà essere solo nullo e dunque questo spazio sarà sede della rappresentazione $s_1 \otimes 0$, essendo $s_1 = 1/2$ definito da $\vec{L}_1$. Analogamente il sottospazio definito da χ_R sarà, a sua volta, sede della rappresentazione $0 \otimes s_2$ con, ancora, $s_2 = 1/2$ In questo modo, la rappresentazione spinoriale risulta essere

$$\left(\frac{1}{2} \otimes 0\right) \oplus \left(0 \otimes \frac{1}{2}\right) \tag{A.202}$$

Nell'ambito dello spazio definito dal proiettore χ_L, dovendo essere $\vec{L}_2 = 0$, necessariamente deve essere

$$\vec{J} - i\,\vec{K} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{J} = i\,\vec{K} \tag{A.203}$$

ovvero

$$\vec{J} = \frac{1}{2}\vec{\sigma}; \quad \vec{K} = -i\frac{1}{2}\vec{\sigma} \quad \Rightarrow e^{i\vec{\phi}\cdot\vec{J}}\, e^{i\vec{\eta}\cdot\vec{K}} = e^{\frac{i}{2}\vec{\phi}\cdot\vec{\sigma}} e^{\frac{1}{2}\vec{\eta}\cdot\vec{\sigma}} \tag{A.204}$$

ovvero si tratta della rappresentazione a valori in $SL(2,C)$.
Ricordando adesso che

$$\sigma_2^2 = I, \quad \sigma_2\,\vec{\sigma}\sigma_2 = \vec{\sigma}^* \tag{A.205}$$

è facile convincersi che la rappresentazione nello spazio individuato da χ_R è equivalente alla rappresentazione complessa coniugata in $SL(2,C)$ di cui sopra, che, però, non è ad essa equivalente (come accade, invece, nel caso del solo $SU(2)$).

A.7 *Ancora sulle matrici gamma*

L'equazione di Dirac può essere scritta nella forma seguente

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\,\psi = 0 \tag{A.206}$$

dove ψ è uno bi-spinore.

Riguardo alle matrici γ, come sappiamo esse devono soddisfare la condizione di algebra di Clifford seguente

$$\{\gamma^\mu,\, \gamma^\nu\} = 2\,\delta^{\mu\nu} \cdot I \tag{A.207}$$

che, unitamente alla condizione

$$\gamma^0\, (\gamma^\mu)^\dagger\, \gamma^0 = \gamma^\mu \tag{A.208}$$

definisce univocamente le γ a meno di un cambiamento di base ortonormale nello spazio degli spinori dove esse agiscono, ovvero a meno di una trasformazione unitaria per la quale

$$\gamma^\mu \to \gamma'^\mu = U\,\gamma^\mu\, U^{-1} \qquad \textit{con} \qquad U^{-1} = U^\dagger \tag{A.209}$$

Dalla (A.207) ricaviamo che

$$\left(\gamma^0\right)^2 = I \tag{A.210}$$

e usando anche la (A.208), otteniamo allora

$$\gamma^0\, \left(\gamma^0\right)^\dagger\, \gamma^0 = \gamma^0 \Rightarrow \left(\gamma^0\right)^\dagger = \gamma^0\,\gamma^0\,\gamma^0 = \gamma^0 \tag{A.211}$$

mentre, per quanto riguarda le γ^i, sempre per la (A.208), abbiamo

$$\gamma^0\, \left(\gamma^i\right)^\dagger\, \gamma^0 = \gamma^i \Rightarrow \left(\gamma^i\right)^\dagger = \gamma^0\,\gamma^i\,\gamma^0 = -\gamma^i \tag{A.212}$$

Dunque le (A.207) e (A.208) implicano che la matrice γ^0 sia hermitiana mentre le γ^i siano antiermitiane, come pure che

$$\left(\gamma^0\right)^2 = I; \qquad\qquad \left(\gamma^i\right)^2 = -I \tag{A.213}$$

Insieme alle γ^μ si definisce anche la matrice γ_5 come

$$\gamma_5 = i\,\gamma^0\,\gamma^1\,\gamma^2\,\gamma^3 \qquad \Rightarrow \qquad (\gamma_5)^2 = I \tag{A.214}$$

la quale anticommuta con tutte le γ^μ ed è a sua volta hermitiana.

Le proprietà delle γ sopra elencate permangono in qualunque loro rappresentazione, ovvero sono invarianti per cambiamento di base ortonormale.

Tornando ora all'equazione di Dirac, chiaramente se ψ è una sua soluzione in una rappresentazione delle matrici γ che indicheremo, per semplicità, con A, ovvero se

$$(i\gamma^\mu_A \partial_\mu - m)\psi_A = 0 \tag{A.215}$$

ecco che, cambiando rappresentazione, si avrà che

$$U\,(i\gamma^\mu_A \partial_\mu - m)U^\dagger\, U\,\psi_A = 0 \tag{A.216}$$

da cui, ponendo

$$\gamma^\mu_B \equiv U\,\gamma^\mu_A\, U^\dagger \tag{A.217}$$

e

$$\psi_B \equiv U\,\psi_A \tag{A.218}$$

abbiamo di nuovo che

$$(i\gamma^\mu_B \partial_\mu - m)\psi_B = 0 \tag{A.219}$$

In altri termini, come è ovvio che debba essere, l'equazione di Dirac risulta invariante sotto una trasformazione di base degli spinori, per cui ne segue che le soluzioni della stessa in rappresentazione dell'impulso, in una qualsiasi base assegnata, possono essere espresse nel modo seguente

$$u^{(r)}(\vec{p}) \equiv \frac{m + \not{p}}{\sqrt{m+E_p}}\, u_0^{(r)} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{u}^{(r)}(\vec{p}) = \bar{u}_0^{(r)}\, \frac{m + \not{p}}{\sqrt{m+E_p}} \tag{A.220}$$

$$v^{(r)}(\vec{p}) \equiv \frac{m - \not{p}}{\sqrt{m+E_p}}\, v_0^{(r)} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{v}^{(r)}(\vec{p}) = \bar{v}_0^{(r)}\, \frac{m - \not{p}}{\sqrt{m+E_p}} \tag{A.221}$$

dove $u_0^{(r)}$ e $v_0^{(r)}$ indicano, rispettivamente, soluzioni a energia positiva (i.e. con dipendenza spazio-temporale di tipo e^{-ipx}) e negativa (i.e. con dipendenza spazio-temporale di tipo e^{ipx}) corrispondenti al caso in cui $\vec{p} = 0$.

Rappresentazione di Pauli-Dirac

La rappresentazione delle matrici γ più comune, specialmente adatta nel limite NR, è quella di Pauli-Dirac in cui, come è noto

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \tag{A.222}$$

essendo $\vec{\sigma} \equiv (\sigma_i)$ le usuali matrici di Pauli, i.e.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{A.223}$$

In questa rappresentazione, le γ^μ sono quindi tutte reali, eccetto la γ^2 che è immaginaria pura.
La matrice hermitiana γ_5 di cui alla (A.214), in questa rappresentazione è reale e ha la forma seguente

$$\gamma_5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \tag{A.224}$$

Venendo agli spinori, la scelta per $u_0^{(r)}$ e $v_0^{(r)}$ che abbiamo fatto è stata quella di porre

$$u_0^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;;\; u_0^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad;\quad v_0^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;;\; v_0^{(2)} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{A.225}$$

da cui, definendo per comodità

$$w^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad;\quad w^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{A.226}$$

si ha[335]

$$u^{(r)}(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{m+E_p}} \begin{pmatrix} (m+E_p)\, w^{(r)} \\ (\vec{p}\cdot\vec{\sigma})\, w^{(r)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{E_p+m}\; w^{(r)} \\ \sqrt{E_p-m}\,(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})\; w^{(r)} \end{pmatrix} \tag{A.228}$$

dove si è usata la definizione $\vec{p} \equiv \sqrt{E_p^2 - m^2}\;\vec{n}$.
Per quanto riguarda, poi, gli spinori $v^{(r)}$, definendo in analogia con la (A.226)

$$\tilde{w}^{(1)} = w^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad;\quad \tilde{w}^{(2)} = -w^{(1)} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{A.229}$$

dalla loro definizione[336] risulta che

$$v^{(r)}(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{m+E_p}} \begin{pmatrix} (\vec{p}\cdot\vec{\sigma})\, \tilde{w}^{(r)} \\ (m+E_p)\, \tilde{w}^{(r)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{E_p-m}\,(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})\; \tilde{w}^{(r)} \\ \sqrt{E_p+m}\; \tilde{w}^{(r)} \end{pmatrix} \tag{A.231}$$

---

[335] Risulta infatti che, indicando con I l'identità in due dimensioni, esplicitamente risulta

$$(m+\not{p}) = \begin{pmatrix} (m+E_p)I & -\vec{\sigma}\cdot\vec{p} \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{p} & (m-E_p)I \end{pmatrix} \;;\quad (m-\not{p}) = \begin{pmatrix} (m-E_p)I & \vec{\sigma}\cdot\vec{p} \\ -\vec{\sigma}\cdot\vec{p} & (m+E_p)I \end{pmatrix} \tag{A.227}$$

e usando queste espressioni, le (A.228) e (A.231) seguono immediatamente dalle definizioni (A.220) e (A.221), di $u^{(r)}(\vec{p})$ e $v^{(r)}(\vec{p})$, rispettivamente.

[336] Quanto ai vettori bidimensionali $w^{(i)}$ e $\tilde{w}^{(i)}$, risulta

$$\tilde{w}^{(i)} = (-i\,\sigma_2)_{ji}\, w^{(j)} \quad\Longleftrightarrow\quad w^{(i)} = (i\,\sigma_2)_{ji}\, \tilde{w}^{(j)} \tag{A.230}$$

dove σ_2 è la matrice di Pauli, generatore in $SU(2)$ delle rotazioni intorno all'asse y.
La scelta è fatta in modo che la stessa rappresentazione di spin 1/2 sia rappresentata nelle basi $w^{(i)}$ e $\tilde{w}^{(j)}$ da matrici complesse coniugate.

Le relazioni (A.228) e (A.231) mostrano chiaramente come, nel limite di bassa energia, nella rappresentazione di Pauli-Dirac, si distinguano chiaramente le *grandi* e le *piccole* componenti, le quali si separano in u e v in modo opposto.
Questo è certamente uno dei vantaggi interessanti di questa rappresentazione.

Rappresentazione di Weyl

Un'altra rappresentazione delle γ^μ molto interessante è la rappresentazione di Weyl. Essa è tale per cui

$$\gamma^\mu_W = W\,\gamma^\mu\,W^{-1} \tag{A.232}$$

dove abbiamo indicato con γ^μ senza pedice le matrici gamma nella rappresentazione di Pauli-Dirac, mentre (si ricordi che $\gamma_0 = \gamma^0$...)

$$W = W^\dagger = W^{-1} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\gamma_0 + \gamma_5) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I & I \\ I & -I \end{pmatrix} \tag{A.233}$$

In questa rappresentazione abbiamo che

$$\begin{aligned} \gamma^0_W &= \frac{1}{2}(\gamma^0+\gamma_5)\,\gamma^0\,(\gamma^0+\gamma_5) = \frac{1}{2}(I+\gamma_5\gamma^0)\,(\gamma^0+\gamma_5) = \\ &= \frac{1}{2}\left(\gamma^0+\gamma_5+\gamma_5+\gamma_5\gamma^0\gamma_5\right) = \gamma_5 \end{aligned} \tag{A.234}$$

$$\begin{aligned} \gamma^i_W &= \frac{1}{2}(\gamma^0+\gamma_5)\,\gamma^i\,(\gamma^0+\gamma_5) = -\frac{1}{2}(\gamma^0+\gamma_5)^2\gamma^i = \\ &= -\frac{1}{2}((\gamma^0)^2+\gamma^0\gamma_5+\gamma_5\gamma^0+\gamma_5^2)\gamma^i = -\gamma^i \end{aligned} \tag{A.235}$$

e risulta che

$$\begin{aligned} \gamma_{5W} &= \frac{1}{2}(\gamma^0+\gamma_5)\,\gamma_5\,(\gamma^0+\gamma_5) = \frac{1}{2}(I+\gamma^0\gamma_5)\,(\gamma^0+\gamma_5) = \\ &= \frac{1}{2}\left(\gamma^0\gamma_5\gamma^0+\gamma^0+\gamma^0+\gamma_5\right) = \gamma^0 \end{aligned} \tag{A.236}$$

ovvero la matrice γ_{5W} ha forma diagonale.
Per questo motivo, in rappresentazione di Weyl, i proiettori chirali risultano espressi in modo particolarmente semplice, essendo

$$\chi_{W+} \equiv \frac{I+\gamma_{5W}}{2} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \chi_{WR} \equiv \chi_{W+} \tag{A.237}$$

$$\chi_{W-} \equiv \frac{I-\gamma_{5W}}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \equiv \chi_{WL} \equiv \chi_{W-} \tag{A.238}$$

Data la forma dei proiettori $\chi_{W\pm}$, è evidente come la rappresentazione di Weyl sia particolarmente indicata quando si vogliano distinguere le componenti chirali del campo, dato che, evidentemente, le prime due componenti corrispondono alla proiezione chirale "right" mentre le seconde due corrispondono alla proiezione chirale "left", per cui, in questa rappresentazione, risulta

$$\psi_W = \begin{pmatrix} \psi_{W+} \\ \psi_{W-} \end{pmatrix} \tag{A.239}$$

mentre l'operatore $i\gamma^\mu_W \partial_\mu \equiv i(\gamma^0_W \frac{\partial}{\partial t} + \vec{\gamma}_W \cdot \vec{\nabla})$ assume la forma seguente

$$i\gamma^\mu_W \partial_\mu = i \begin{pmatrix} 0 & i(\frac{\partial}{\partial t} - \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}) \\ i(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}) & 0 \end{pmatrix} \tag{A.240}$$

per cui la forma esplicita dell'equazione di Dirac, in rappresentazione di Weyl, risulta essere la seguente:

$$(i\gamma^\mu_w \partial_\mu - m)\psi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad i \begin{pmatrix} -m & i(\frac{\partial}{\partial t} - \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}) \\ i(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}) & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix} = 0 \tag{A.241}$$

ovvero

$$i\left(\frac{\partial}{\partial t} - \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}\right) \psi_L = m\,\psi_R \tag{A.242}$$

$$i\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}\right) \psi_R = m\,\psi_L \tag{A.243}$$

le quali si disaccoppiano per $m \to 0$ ovvero nel limite di alta energia.
In rappresentazione dell'impulso ($i\partial_\mu = p_\mu \;\; \Rightarrow \;\; i\partial^0 = E,\; i\vec{\nabla} = -\vec{p}$) le due equazioni precedenti, nel limite ultrarelativistico, diventano le equazioni di Weyl, i.e.

$$(E + \vec{\sigma} \cdot \vec{p})\,\psi_L = 0 \tag{A.244}$$

$$(E - \vec{\sigma} \cdot \vec{p})\,\psi_R = 0 \tag{A.245}$$

che descrivono particelle di massa nulla ed elicità, rispettivamente, negativa e positiva.

In termini dei consueti spinori di Pauli-Dirac, le soluzioni dell'equazione di Dirac in rappresentazione di Weyl si ottengono semplicemente ricordando che, in base alla (A.217) e (A.218), data la (A.232), deve essere

$$u^{(r)}_W(\vec{p}) = W\,u^{(r)}(\vec{p}) \;\; ; \qquad v^{(r)}_w(\vec{p}) = W\,v^{(r)}(\vec{p}) \tag{A.246}$$

e quindi, vista la (A.233), risulta

$$u^{(r)}_W(\vec{p}) \;\; = \;\; \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{E+m}} \begin{pmatrix} (E+m)w^{(r)} \\ (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})\,w^{(r)} \end{pmatrix} =$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2(E+m)}} \begin{pmatrix} [(E+m)I + \vec{\sigma}\cdot\vec{p}]\, w^{(r)} \\ [(E+m)I - \vec{\sigma}\cdot\vec{p}]\, w^{(r)} \end{pmatrix} && \text{(A.247)} \\
v_W^{(r)}(\vec{p}) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{E+m}} \begin{pmatrix} (\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\, \tilde{w}^{(r)} \\ (E+m)\tilde{w}^{(r)} \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2(E+m)}} \begin{pmatrix} [\vec{\sigma}\cdot\vec{p} + (E+m)I]\, \tilde{w}^{(r)} \\ [(\vec{\sigma}\cdot\vec{p} - E - m)I]\, \tilde{w}^{(r)} \end{pmatrix} && \text{(A.248)}
\end{aligned}
$$

dove gli spinori $w^{(r)}$ e $\tilde{w}^{(r)}$ sono definiti, rispettivamente, dalla (A.226) e dalla (A.229).

Volendo ora esplicitare le componenti chirali, data la forma dei proiettori (A.237) e (A.238), abbiamo

$$
\begin{aligned}
\chi_{W+}\, u_W^{(r)}(\vec{p}) &= \frac{1}{\sqrt{2(E+m)}} \begin{pmatrix} [(E+m)I + \vec{\sigma}\cdot\vec{p}]\, w^{(r)} \\ 0 \end{pmatrix} && \text{(A.249)} \\
\chi_{W-}\, u_W^{(r)}(\vec{p}) &= \frac{1}{\sqrt{2(E+m)}} \begin{pmatrix} 0 \\ [(E+m)I - \vec{\sigma}\cdot\vec{p}]\, w^{(r)} \end{pmatrix} && \text{(A.250)} \\
\chi_{W+}\, v_W^{(r)}(\vec{p}) &= \frac{1}{\sqrt{2(E+m)}} \begin{pmatrix} [(E+m)I + \vec{\sigma}\cdot\vec{p}]\, \tilde{w}^{(r)} \\ 0 \end{pmatrix} && \text{(A.251)} \\
\chi_{W-}\, v_W^{(r)}(\vec{p}) &= \frac{1}{\sqrt{2(E+m)}} \begin{pmatrix} 0 \\ [-(E+m)I + \vec{\sigma}\cdot\vec{p}]\, \tilde{w}^{(r)} \end{pmatrix} && \text{(A.252)}
\end{aligned}
$$

Per una particella ultrarelativistica che si muove lungo l'asse z, quindi con un impulso $p^\mu = (E, 0, 0, p) \approx E(1, 0, 0, 1)$ avremo dunque

$$
\begin{aligned}
(E+m)\, I + \vec{\sigma}\cdot\vec{p} &\approx E(I + \sigma_3) = 2E \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} && \text{(A.253)} \\
(E+m)\, I - \vec{\sigma}\cdot\vec{p} &\approx E(I - \sigma_3) = 2E \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} && \text{(A.254)}
\end{aligned}
$$

per cui, sostituendo, ricaviamo che

$$
\begin{aligned}
u_W^{(1)} &\approx \sqrt{2E} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad u_W^{(2)} \approx \sqrt{2E} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} && \text{(A.255)} \\
v_W^{(1)} &\approx -\sqrt{2E} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad v_W^{(2)} \approx -\sqrt{2E} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} && \text{(A.256)}
\end{aligned}
$$

Le $u_W^{(1)}$ e $u_W^{(2)}$ sono associate a soluzioni a energia positiva corrispondenti a $p^\mu = (E, 0, 0, E)$ con spin, rispettivamente, nel verso di z e ad esso opposto e con chiralità positiva e negativa, rispettivamente; dunque

$$u_W^{(1)} \;\rightarrow\; \lambda = +1;\;\; \chi = +1 \tag{A.257}$$
$$u_W^{(2)} \;\rightarrow\; \lambda = -1;\;\; \chi = -1 \tag{A.258}$$

Riguardo alle soluzioni $v_W^{(1)}$ e $v_W^{(2)}$, esse sono invece associate a soluzioni ad energia negativa corrispondenti a $p^\mu = (-E, 0, 0, E)$ con spin, rispettivamente, nel verso di z e ad esso opposto e con chiralità opposta all'elicità, ovvero

$$v_W^{(1)} \;\rightarrow\; \lambda = +1;\;\; \chi = -1 \tag{A.259}$$
$$v_W^{(2)} \;\rightarrow\; \lambda = -1;\;\; \chi = +1 \tag{A.260}$$

Si ritrova così che chiralità ed elicità coincidono sulle u ma sono opposte sulle v. Si osservi infine che le soluzioni u e v sopra riportate *non* sono fra loro indipendenti. Questo non deve meravigliare perché l'equazione di Dirac

$$(\not{p} - m)u = 0; \qquad\qquad (\not{p} + m)v = 0 \tag{A.261}$$

nel limite in cui $m \rightarrow 0$ diventa la stessa per le u e le v e dunque, in questo limite, le soluzioni per u e v risultano le stesse.

Rappresentazione di Majorana

Passiamo adesso a considerare un'altra rappresentazione delle matrici γ^μ molto importante. Si tratta della rappresentazione di Majorana, in cui tutte le matrici γ sono, come vedremo, immaginarie pure. Rispetto alla rappresentazione di Weyl, abbiamo

$$\gamma_M^\mu = M\, \gamma_W^\mu\, M^\dagger \tag{A.262}$$

dove[337]

$$M \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I & -\, i\sigma_2 \\ -\sigma_2 & -\, iI \end{pmatrix} \;\Leftrightarrow\; M^\dagger = M^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I & -\, \sigma_2 \\ i\sigma_2 & iI \end{pmatrix} \tag{A.265}$$

[337]Naturalmente la rappresentazione di Majorana può anche essere definita a partire da quella di Pauli-Dirac. In questo caso, evidentemente, sarà (le γ senza pedice sono quelle in rappresentazione di Pauli-Dirac)

$$\gamma_M^\mu = M\, W\, \gamma^\mu\, W^\dagger\, M^\dagger \equiv \tilde{M}\, \gamma^\mu \tilde{M}^\dagger \tag{A.263}$$

dove

$$\tilde{M} = M\, W = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I - i\sigma_2 & I + i\sigma_2 \\ -iI - \sigma_2 & iI - \sigma_2 \end{pmatrix} \;\Leftrightarrow\; \tilde{M}^\dagger = \tilde{M}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I + i\sigma_2 & iI - \sigma_2 \\ I - i\sigma_2 & -\, iI - \sigma_2 \end{pmatrix} \tag{A.264}$$

Abbiamo allora che (si ricordi che $\sigma_i^2 = I$ e che $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 0$ se $i \neq j$)

$$\begin{aligned}
\gamma_M^0 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I & -i\sigma_2 \\ -\sigma_2 & -iI \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -\sigma_2 \\ i\sigma_2 & iI \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 0 & iI \\ -iI & 0 \end{pmatrix} && \text{(A.266)} \\
\gamma_M^1 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I & -i\sigma_2 \\ -\sigma_2 & -iI \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -\sigma_2 \\ i\sigma_2 & iI \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_1 \\ -i\sigma_1 & 0 \end{pmatrix} && \text{(A.267)} \\
\gamma_M^2 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I & -i\sigma_2 \\ -\sigma_2 & -iI \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -\sigma_2 \\ i\sigma_2 & iI \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} -iI & 0 \\ 0 & iI \end{pmatrix} && \text{(A.268)} \\
\gamma_M^3 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I & -i\sigma_2 \\ -\sigma_2 & -iI \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -\sigma_2 \\ i\sigma_2 & iI \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_3 \\ -i\sigma_3 & 0 \end{pmatrix} && \text{(A.269)}
\end{aligned}$$

e, per quanto riguarda γ_{5M}, risulta

$$\begin{aligned}
\gamma_{5M} &= i\,\gamma_M^0\,\gamma_M^1\,\gamma_M^2\,\gamma_M^3 = i \begin{pmatrix} 0 & iI \\ -iI & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_1 \\ -i\sigma_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -iI & 0 \\ 0 & iI \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_3 \\ -i\sigma_3 & 0 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_2 \\ -\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} && \text{(A.270)}
\end{aligned}$$

risultato che avremmo potuto anche ottenere direttamente dalla legge di trasformazione di base, visto appunto che risulta

$$\begin{aligned}
M\,\gamma_W^5\,M^\dagger &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I & -i\sigma_2 \\ -\sigma_2 & -iI \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -\sigma_2 \\ i\sigma_2 & iI \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_2 \\ -\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} && \text{(A.271)}
\end{aligned}$$

Il fatto che le matrici γ siano tutte immaginarie pure significa che l'equazione di Dirac, nella base di Majorana

$$(i\gamma_M^\mu \partial_\mu - m)\ \psi_M(x) = 0 \tag{A.272}$$

è reale e dunque se $\psi_M(x)$ ne è una soluzione, allora anche $\psi_M^*(x)$ deve esserlo.

Venendo ora alla forma esplicita delle soluzioni a energia positiva e negativa corrispondenti ad un assegnato impulso spaziale $\vec{p}$, ovviamente avremo che, in termini dei corrispondenti spinori di Pauli-Dirac, sarà

$$\begin{aligned} u_M^{(r)}(\vec{p}) &= \tilde{M}\, u^{(r)}(\vec{p}) = \tilde{M}\, \frac{m+ \not{p}}{\sqrt{E_p+m}}\, u_0^{(r)} \equiv \tilde{M}\, \frac{m+p_\mu\, \gamma^\mu}{\sqrt{E_p+m}}\, u_0^{(r)} = \\ &= \frac{m+p_\mu\, \gamma_M^\mu}{\sqrt{E_p+m}}\, \tilde{M}\, u_0^{(r)} \equiv \frac{m+ \not{p}_M}{\sqrt{E_p+m}}\, u_{0M}^{(r)} \end{aligned} \tag{A.273}$$

dove abbiamo posto $\not{p}_M \equiv p_\mu\, \gamma_M^\mu$ e $u_{0M}^{(r)} \equiv \tilde{M}\, u_0^{(r)}$.
Procedendo in modo analogo per gli spinori di tipo v, otteniamo

$$v_M^{(r)}(\vec{p}) = \frac{m- \not{p}_M}{\sqrt{E_p+m}}\, v_{0M}^{(r)} \tag{A.274}$$

Ma essendo le matrici γ immaginarie pure, evidentemente avremo che

$$u_M^{(r)*}(\vec{p}) = \frac{m- \not{p}_M}{\sqrt{E_p+m}}\, u_{0M}^{(r)*} \tag{A.275}$$

$$v_M^{(r)*}(\vec{p}) = \frac{m+ \not{p}_M}{\sqrt{E_p+m}}\, v_{0M}^{(r)*} \tag{A.276}$$

le quali mostrano in modo evidente come il passaggio al complesso coniugato trasformi gli spinori di tipo u in quelli di tipo v (e viceversa).
Questo non deve meravigliare perché ha semplicemente a che fare con il fatto che il passaggio al complesso coniugato trasforma soluzioni a energia positiva in soluzioni a energia negativa (e viceversa).
La novità è che in questa rappresentazione la corrispondenza è diretta.
Osserviamo infatti che

$$\begin{aligned} u_{0M}^{(r)} &= \tilde{M}\, u_0^{(r)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I-i\sigma_2 & I+i\sigma_2 \\ -iI-\sigma_2 & iI-\sigma_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w^{(r)} \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} w^{(r)} - i\sigma_2\, w^{(r)} \\ -i\, w^{(r)} - \sigma_2\, w^{(r)} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{A.277}$$

$$\begin{aligned} v_{0M}^{(r)} &= \tilde{M}\, v_0^{(r)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I-i\sigma_2 & I+i\sigma_2 \\ -iI-\sigma_2 & iI-\sigma_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{w}^{(r)} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \tilde{w}^{(r)} + i\sigma_2\, \tilde{w}^{(r)} \\ i\, \tilde{w}^{(r)} - \sigma_2\, \tilde{w}^{(r)} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{A.278}$$

D'altronde, come già sappiamo, risulta

$$\tilde{w}^{(r)} = -i\sigma_2 w^{(r)} \tag{A.279}$$

e dunque (si ricordi che $\sigma_2^2 = I, \sigma_2 = -\sigma_2^*$)

$$v_{0M}^{(r)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i\sigma_2\, w^{(r)} + w^{(r)} \\ \sigma_2\, w^{(r)} + i\, w^{(r)} \end{pmatrix} = u_{0M}^{(r)*} \tag{A.280}$$

per cui nella rappresentazione di Majorana risulta

$$u_M^{(r)*}(\vec{p}) = \frac{m - \not{p}_M}{\sqrt{E_p + m}}\, v_{0M}^{(r)} = v_M^{(r)}(\vec{p}) \tag{A.281}$$

$$v_M^{(r)*}(\vec{p}) = \frac{m + \not{p}_M}{\sqrt{E_p + m}}\, u_{0M}^{(r)} = u_M^{(r)}(\vec{p}) \tag{A.282}$$

Questo semplifica grandemente la forma della legge di trasformazione del campo sotto la simmetria C di coniugazione di carica[338].
Infatti, partendo dalla consueta rappresentazione spettrale del campo

$$\psi(x) = \sum_{r=1}^{2}\int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\{a^{(r)}(\vec{p})\, u^{(r)}(\vec{p})\, e^{-ipx} + b^{\dagger(r)}(\vec{p})\, v^{(r)}(\vec{p})\, e^{ipx}\} \tag{A.283}$$

ecco che, poiché la coniugazione di carica scambia gli operatori associati alla particella (a) con i rispettivi operatori dell'antiparticella (b), risulta da questa definizione che

$$\psi_C(x) = \sum_{r=1}^{2}\int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\{b^{(r)}(\vec{p})\, u^{(r)}(\vec{p})\, e^{-ipx} + a^{\dagger(r)}(\vec{p})\, v^{(r)}(\vec{p})\, e^{ipx}\} \tag{A.284}$$

D'altronde, prendendo l'hermitiano coniugato trasposto del campo ψ abbiamo

$$(\psi^\dagger)^t(x) = \sum_{r=1}^{2}\int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\{a^{\dagger(r)}(\vec{p})\, u^{(r)*}(\vec{p})\, e^{ipx} + b^{(r)}(\vec{p})\, v^{(r)*}(\vec{p})\, e^{-ipx}\} \tag{A.285}$$

che, per la (A.281) e la (A.282), coincide semplicemente con ψ_C, i.e., in rappresentazione di Majorana risulta

$$\psi_{MC}(x) = (\psi_M^\dagger)^t(x) \tag{A.286}$$

Questo risultato consente una descrizione molto più semplice, in questa rappresentazione, di particelle di spin 1/2 coincidenti con le proprie antiparticelle.
Il campo autoconiugato di carica si scrive infatti semplicemente come

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \psi_C(x) = \\ &= \sum_{r=1}^{2}\int \frac{d^3p}{2E_p(2\pi)^3}\{a^{(r)}(\vec{p})\, u^{(r)}(\vec{p})\, e^{-ipx} + a^{\dagger(r)}(\vec{p})\, v^{(r)}(\vec{p})\, e^{ipx}\} \end{aligned} \tag{A.287}$$

[338] Si ricordi che se $\psi(x)$ è una soluzione libera dell'equazione di Dirac, allora anche la sua coniugata di carica $\psi_C(x)$ risolve l'equazione di Dirac libera per la stessa massa.

Dal risultato (A.286) ricaviamo poi che

$$\psi_{MC} = (\psi_M^\dagger)^t(x) = (\bar{\psi}_M\, \gamma_M^0)^t = (\gamma_M^0)^t\ \bar{\psi}_M^t = -\gamma_M^0\ \bar{\psi}_M^t \tag{A.288}$$

dove abbiamo usato il fatto che, nella rappresentazione di Majorana, la γ_M^0 è antisimmetrica.

Nel caso della rappresentazione di Pauli-Dirac avevamo trovato che, a meno di un fattore di fase inessenziale che omettiamo, era

$$\psi_C = \mathcal{C}^{-1}\,\bar{\psi}^t \equiv -i\,\gamma^0\,\gamma^2\,\bar{\psi}^t \tag{A.289}$$

e si sarebbe potuto pensare che questa forma permanesse anche dopo il cambiamento di base e quindi che dovesse risultare

$$\psi_{MC} = \mathcal{C}_M^{-1}\,\bar{\psi}_M^t \equiv -i\,\gamma_M^0\,\gamma_M^2\,\bar{\psi}_M^t \tag{A.290}$$

ma invece, come dimostra la (A.288), questo non succede.
Il motivo sta nel carattere antilineare della corrispondenza fra ψ e ψ_C. Per rendercene conto, ripartiamo dalla rappresentazione di Pauli-Dirac dove la (A.289) nasce dal fatto che

$$u^{(r)}(\vec{p}) = \mathcal{C}^{-1}\,\bar{v}^{(r)t}(\vec{p}) \quad \Leftrightarrow \quad v^{(r)}(\vec{p}) = \mathcal{C}^{-1}\,\bar{u}^{(r)t}(\vec{p}) \tag{A.291}$$

ovvero, limitandoci all'essenziale

$$u = \mathcal{C}^{-1}\,\bar{v} \quad \Leftrightarrow \quad v = \mathcal{C}^{-1}\,\bar{u} \tag{A.292}$$

D'altronde, dalla definizione abbiamo che

$$u_M = \tilde{M}\,u; \quad v_M = \tilde{M}\,v \quad \Leftrightarrow \quad u = \tilde{M}^\dagger\,u_M \quad v = \tilde{M}^\dagger\,v_M \tag{A.293}$$

da cui otteniamo che (si ricordi la definizione della γ_M^0 ed il fatto che la matrice $\tilde{M}$ è unitaria)

$$\bar{u}_M = (\tilde{M}u)^\dagger\,\gamma_M^0 = u^\dagger\,\tilde{M}^\dagger\ \ \gamma_M^0 = u^\dagger\,\tilde{M}^\dagger\ \ \tilde{M}\,\gamma^0\,\tilde{M}^\dagger = u^\dagger\,\gamma^0\,\tilde{M}^\dagger = \bar{u}\,\tilde{M}^\dagger \tag{A.294}$$

e analogamente abbiamo per v che

$$\bar{v}_M = \bar{v}\,\tilde{M}^\dagger \tag{A.295}$$

Quindi, moltiplicando a destra per $\tilde{M}$ otteniamo

$$\bar{u} = \bar{u}_M\,\tilde{M}; \quad \bar{v} = \bar{v}_M\,\tilde{M} \tag{A.296}$$

Sostituiamo allora quanto ottenuto nella relazione che, nella rappresentazione di Pauli-Dirac, lega, per esempio, u a $\bar{v}^t$: si ha

$$u = \mathcal{C}^{-1}\,\bar{v}^t \ \ \Leftrightarrow \tilde{M}^\dagger\,u_M = \mathcal{C}^{-1}\,\left(\bar{v}_M\,\tilde{M}\right)^t = \mathcal{C}^{-1}\,\tilde{M}^t\,\bar{v}_M^t \tag{A.297}$$

e dunque, moltiplicando a sinistra per $\tilde{M}$, abbiamo che

$$\begin{aligned} u_M &= \tilde{M}\,\mathcal{C}^{-1}\,\tilde{M}^t\,\bar{v}_M^t = \tilde{M}\,\mathcal{C}^{-1}\;\;\tilde{M}^\dagger\,\tilde{M}\;\;\tilde{M}^t\,\bar{v}_M^t \equiv \mathcal{C}_M^{-1}\;\left(\tilde{M}\,\tilde{M}^t\right)\bar{v}_M^t \equiv \\ &\equiv \mathcal{C}_M^{-1}\,\mathcal{R}_M\,\bar{v}_M^t \end{aligned} \tag{A.298}$$

dove si è posto, con ovvio significato di simboli

$$\mathcal{C}_M^{-1} \equiv \tilde{M}\,\mathcal{C}^{-1}\,\tilde{M}^\dagger; \quad \mathcal{R}_M \equiv \tilde{M}\,\tilde{M}^t \tag{A.299}$$

e, come si vede, solo se $\tilde{M}$ fosse ortogonale[339] avremmo che $\mathcal{R}_M = I$.
Esplicitando le due matrici, abbiamo

$$\mathcal{C}_M^{-1} = -i\,\gamma_M^0\,\gamma_M^2 = -i\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tag{A.301}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_M &\equiv \tilde{M}\,\tilde{M}^t = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} I - i\sigma_2 & I + i\sigma_2 \\ -iI - \sigma_2 & iI - \sigma_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I + i\sigma_2 & -iI + \sigma_2 \\ I - i\sigma_2 & iI + \sigma_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{A.302}$$

per cui ne risulta che

$$\equiv\;\mathcal{C}_M^{-1}\,\mathcal{R}_M = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = -\gamma_M^0 \tag{A.303}$$

in accordo con il risultato (A.288) trovato in precedenza in modo diretto.

[339] Ripetendo questo argomento nel caso della rappresentazione di Weyl, dove W è reale e quindi, essendo unitaria, $W^\dagger = W^t$, si ha $\mathcal{R} = I$ e dunque il legame fra u_W e $\bar{v}_W^t$ è formalmente identico al caso della rappresentazione di Dirac, ovvero

$$u_W = \mathcal{C}_W^{-1}\,\bar{v}_W^t; \quad v_W = \mathcal{C}_W^{-1}\,\bar{u}_W^t \quad con \quad \mathcal{C}_W^{-1} = -i\,\gamma_W^0\,\gamma_W^2 \tag{A.300}$$

B Appendix: Cenni di Teoria Classica dei Campi

La teoria dei campi classica nasce come naturale generalizzazione del metodo lagrangiano al caso di infiniti gradi di libertà.

Figure 29: *Joseph Louis de Lagrange (1736-1813)*

Il metodo lagrangiano in Meccanica Classica è un metodo elegante e conciso che si basa su una funzione, la lagrangiana $\mathcal{L}$ appunto, (o l'hamiltoniana $\mathcal{H}$: si passa dall'una all'altra attraverso una trasformazione di Legendre), funzione delle variabili dinamiche del sistema e delle loro derivate prime. Mediante la lagrangiana viene espressa *l'azione* S, da cui poi, attraverso il principio di minima azione, si possono ottenere le equazioni del moto e, via il teorema di Noëther, le grandezze fisiche conservate che sono associate a eventuali simmetrie analitiche della lagrangiana.

Ricordiamo che l'azione S è espressa, classicamente, dalla relazione

$$S = \int dt\ \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t)) \tag{B.1}$$

dove $q(t)$ sono appunto le variabili lagrangiane del sistema.

In una teoria di campo relativistica la coordinata temporale e quelle spaziali dovranno essere trattate alla stessa stregua, per cui l'azione S sarà piuttosto espressa dalla relazione

$$S = \int d^4x \; \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) \tag{B.2}$$

e la funzione $\mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x))$ viene chiamata, con ovvio significato, *densità lagrangiana.* Essa è costruita a partire dai campi e dalle loro derivate, ma, se vogliamo che la teoria risultante sia coerente con la relatività ristretta, essa dovrà essere *locale* poichè, siccome in Relatività è esclusa l'azione a distanza, i campi possono interagire l'un l'altro solo nello stesso punto. Non è quindi accettabile che nella densità lagrangiana compaia un campo (o una sua derivata) in un punto x che interagisce con un altro ma in un punto y diverso dal precedente.

Considerazioni generali limitano poi la forma della densità lagrangiana e spesso ne consentono una individuazione pressochè completa[340], a meno di un fattore di scala arbitrario, che il principio di minima azione non può, ovviamente, fissare in alcun modo, né, come vedremo, della somma con una quadridivergenza.

Ricordiamo infine che l'approccio lagrangiano mette in evidenza in modo naturale la profonda connessione esistente fra simmetrie e leggi di conservazione. Chiaramente le simmetrie potranno dipendere dalla particolare teoria considerata, ma una simmetria che dovrà comunque essere posseduta da ogni teoria di campo è quella che discende dal principio di relatività.
Il gruppo di simmetria di base, in questo caso, è il gruppo di Poincarè $\mathcal{P}$, fatto dalle traslazioni nello spazio tempo (non esiste un punto privilegiato...) e dal gruppo di Lorentz (non esistono riferimenti inerziali privilegiati). I suoi elementi sono solitamente indicati con (a, Λ), (b, Γ), ... e soddisfano la legge moltiplicativa

$$(a, \Lambda)(b, \Gamma) = (a + \Lambda b, \Lambda\Gamma)$$

dove a e b sono quadrivettori qualsiasi che descrivono la traslazione dell'origine del sistema di riferimento, mentre Λ, Γ indicano generici elementi del gruppo di Lorentz.

Come vedremo in seguito, l'invarianza in forma della Lagrangiana per trasformazioni di Lorentz comporta la conservazione della somma del momento angolare orbitale e di spin insieme alla conservazione del moto del baricentro, mentre l'invarianza per traslazioni comporta la conservazione del quadrimpulso.

[340]Per esempio, se vogliamo una teoria di campo relativisticamente invariante, e quindi delle equazioni di moto per i campi che siano covarianti, allora la densità lagrangiana dovrà essere scalare per trasformazioni di Lorentz, etc... .
Ricordiamo che la densità hamiltoniana, invece, essendo, come vedremo, la componente 00 del tensore energia-impulso, non è scalare per trasformazioni di Lorentz, anche se in molti casi di interesse, almeno per quanto riguarda il termine di interazione, essa risulta semplicemente l'opposto della densità lagrangiana moltiplicata per δ^{00}. Questo accade, per esempio, nel caso di interazioni descritte attraverso accoppiamenti non derivativi dei campi.

B.1 *Le equazioni di Eulero-Lagrange per campi classici*

Supponiamo che la dinamica dei campi classici $\phi^\alpha(x)$ sia descritta dalla densità lagrangiana

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(\phi^\alpha(x), \partial_\mu \phi^\alpha(x), x) \tag{B.3}$$

Questo significa che i campi $\phi^\alpha(x)$ soddisfano le equazioni di Eulero-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\alpha} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)} = 0 \tag{B.4}$$

Esse, infatti, seguono direttamente dal principio di minima azione, che afferma che le equazioni del moto sono tali per cui *l'integrale di azione*

$$\int_D \mathcal{L}(\phi^\alpha, \partial_\mu \phi^\alpha, x)\, d^4x \tag{B.5}$$

valutato partendo da una soluzione compatibile con la dinamica dei campi, è minimo (estremale) per variazioni dei campi $\delta\phi^\alpha$ che si annullano sul bordo Σ del dominio di integrazione D, peraltro arbitrario (aperto in R^4), i.e.

$$\begin{aligned} \delta \quad & \int_D \mathcal{L}(\phi^\alpha, \partial_\mu \phi^\alpha, x)\, d^4x \ \equiv \ 0 \ \equiv \qquad\qquad (\text{B.6}) \\ \equiv \quad & \int_D \mathcal{L}(\phi^\alpha + \delta\phi^\alpha, \partial_\mu(\phi^\alpha + \delta\phi^\alpha), x)\, d^4x \ - \int_D \mathcal{L}(\phi^\alpha, \partial_\mu \phi^\alpha, x)\, d^4x \end{aligned}$$

con $\delta\phi^\alpha(x) = 0, \forall x \in \Sigma \equiv \hat{D} - D$, essendo $\hat{D}$ la chiusura[341] dell'aperto D.

Dalla (B.6) si ha infatti

$$0 \ = \int_D \left[\delta\phi^\alpha \, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\alpha} + \partial_\mu(\delta\phi^\alpha) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)} \right] d^4x \tag{B.7}$$

ma il secondo termine può essere scritto anche come

$$\partial_\mu(\delta\phi^\alpha) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)} \ = \ \partial_\mu \left[\delta\phi^\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)} \right] - \delta\phi^\alpha \ \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)} \tag{B.8}$$

Il primo addendo è una quadridivergenza e quindi non fornisce alcun contributo al secondo membro della eq.(B.7) perchè, via il teorema di Gauss[342], esso può

[341] Un sottoinsieme $\mathcal{I}$ di uno spazio topologico $\mathcal{T}$ è *aperto* se ogni suo punto x è tale per cui esiste almeno un suo intorno tutto contenuto in $\mathcal{I}$.
Un sottoinsieme $\mathcal{I}$ di uno spazio topologico $\mathcal{T}$ è detto *chiuso* se il suo complementare in $\mathcal{T}$ è aperto: esistono sottoinsiemi né aperti né chiusi ...

[342] Il teorema di Gauss generalizzato in quattro dimensioni afferma che

$$\int_D \partial_\mu F^\mu \, d^4x \ \equiv \ \int_\Sigma F^\mu n_\mu \, d\sigma \tag{B.9}$$

dove n_μ è il versore di R^4 ortogonale (nella metrica euclidea di R^4) all'elemento di superficie $d\sigma \in \Sigma$. Si osservi, in particolare, che esso non richiede che le quattro funzioni F^μ si trasformino come un campo quadrivettoriale. In effetti, il teorema viene dimostrato semplicemente richiedendo a R^n la sua struttura ordinaria di spazio lineare.

essere riscritto come

$$\int_\Sigma \delta\phi^\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)}\ n_\mu\ d\sigma$$

e, per ipotesi, $\delta\phi^\alpha$ è nullo su Σ !
Perciò il principio di minima azione implica che

$$\begin{aligned} 0 &= \int_D \left[\delta\phi^\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\alpha} - \delta\phi^\alpha\ \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)}\right] d^4x = \\ &= \int_D \delta\phi^\alpha \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\alpha} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)}\right] d^4x \end{aligned} \tag{B.10}$$

e per l'arbitrarietà del dominio di integrazione D e delle variazioni dei campi $\delta\phi^\alpha$ all'interno di D, questo implica la validità delle equazioni di Eulero-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\alpha} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)}\ \equiv\ 0 \tag{B.11}$$

In questo modo abbiamo dimostrato che il principio di minima azione implica le equazioni di Eulero-Lagrange (B.11) per i campi.

Assumendo la validità delle equazioni di Eulero-Lagrange e andando indietro dalla eq.(B.10) alla eq.(B.7), possiamo facilmente dimostrare che anche l'altro verso dell'implicazione è vero, i.e. che le equazioni di Eulero-Lagrange implicano la validità del principio di minima azione[343].

B.2 *Invarianza in valore*

Sia $\mathcal{L}(\phi^\alpha(x), \partial_\mu\phi^\alpha(x), x)$ una densità lagrangiana che descrive la dinamica dei campi ϕ^α, $\alpha = 1, ..., n$. Consideriamo adesso una trasformazione *locale* dei campi e delle coordinate, che ammette inversa, i.e. tale che

$$x \leftrightarrow x' \quad : \quad x' = X'(x); \tag{B.12}$$

$$: \quad x = X(x') \tag{B.13}$$

$$\phi^\alpha(x) \leftrightarrow \psi^\alpha(x') \quad : \quad \psi^\alpha(x') = \Psi^\alpha(\phi(x)) \tag{B.14}$$

$$: \quad \phi^\alpha(x) = \Phi^\alpha(\psi(x')) \tag{B.15}$$

Assumiamo altresì che in una trasformazione locale lo Jacobiano J della trasformazione di coordinate $J = ||\partial_\mu X'^\nu||$ sia costante e che le funzioni $X, X', \Phi^\alpha, \Psi^\alpha$ siano derivabili.

[343] Si osservi che, da quanto sopra detto, discende la conclusione secondo cui se due Lagrangiane differiscono solo per una quadridivergenza, esse sono equivalenti nel senso che descrivono la stessa dinamica, come pure che, essendo le equazioni di Eulero-Lagrange omogeneee, due Lagrangiane che differiscono solo per un fattore moltiplicativo sono, di nuovo, equivalenti.

Vogliamo vedere se la dinamica dei campi trasformati ψ^α può ancora essere ottenuta dal principio di minima azione, i.e. da una opportuna densità lagrangiana.

Iniziamo con il definire la funzione $\mathcal{L}'$ seguente

$$\mathcal{L}'(\psi^\beta, \partial'_\nu \psi^\beta, x') \equiv \mathcal{L}(\Phi^\alpha(\psi), \partial_\mu \Phi^\alpha(\psi), X(x')) \tag{B.16}$$

Per definizione, la funzione $\mathcal{L}'$ prende ovunque, nelle variabili trasformate, lo *stesso valore* assunto dalla densità lagrangiana originale $\mathcal{L}$, per i campi e le coordinate non trasformate.

D'altronde, date le relazioni biunivoche (B.14), (B.15) fra i campi ϕ e ψ, $\hat{\psi}$ costituirà una possibile descrizione della dinamica dei campi ψ se e solo se potremo scrivere $\hat{\psi} = \Psi(\hat{\phi})$, con $\hat{\phi}$ una opportuna soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange per i campi ϕ !
Se dimostriamo che, per qualunque $\hat{\psi}$ che descrive la dinamica del sistema in un dato (arbitrario) dominio D', la variazione attorno a questa soluzione dell'*integrale di azione*, costruito usando $\mathcal{L}'$ come densità lagrangiana, è effettivamente nulla quando i campi vengono cambiati di un qualsiasi $\delta\psi$, purchè esso risulti nullo sulla frontiera del dominio di integrazione D', allora avremo dimostrato che anche la dinamica dei campi ψ può essere derivata dal principio di minima azione e che $\mathcal{L}'$ è una possibile densità lagrangiana che ne descrive la dinamica.

Questo teorema implica dunque l'invarianza *in valore* della densità lagrangiana sotto trasformazioni locali.

Dimostrazione

Sia $\hat{\phi}$ una qualunque soluzione in un opportuno dominio D, e sia $\hat{\psi} = \Psi(\hat{\phi})$: i campi $\hat{\psi}$ sono, evidentemente, definiti nel dominio $D' = X'(D)$.
Valutiamo quanto vale la variazione

$$\delta \int_{D'} \mathcal{L}'(\psi^\beta, \partial'_\nu \psi^\beta, x')\, d^4x' \tag{B.17}$$

quando i campi ψ^β vengono variati intorno a $\hat{\psi}^\beta$ di un qualsiasi $\delta\psi^\beta$ tale che $\delta\psi^\beta$ sia nullo sulla frontiera Σ' del dominio di integrazione D'. Evidentemente si ha

$$\delta \int_{D'} \mathcal{L}'\, d^4x' = \int_{D'} \left[\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \psi^\beta} \delta\psi^\beta + \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial(\partial'_\nu \psi^\beta)} \partial'_\nu(\delta\psi^\beta) \right] d^4x'$$

Comunque, data la definizione di $\mathcal{L}'$, risulta

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \psi^\beta} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\alpha} \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial \psi^\beta} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)} \frac{\partial(\partial_\mu \Phi^\alpha)}{\partial \psi^\beta}$$

mentre

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial(\partial'_\nu \psi^\beta)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)} \frac{\partial(\partial_\mu \Phi^\alpha)}{\partial(\partial'_\nu \psi^\beta)}$$

perciò

$$\delta \int_{D'} \mathcal{L}'\, d^4x' \;=\; \int_{D'} \left\{ \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\alpha} \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial \psi^\beta} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)} \frac{\partial(\partial_\mu \Phi^\alpha)}{\partial \psi^\beta} \right] \delta\psi^\beta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)} \frac{\partial(\partial_\mu \Phi^\alpha)}{\partial(\partial'_\nu \psi^\beta)} \partial'_\nu(\delta\psi^\beta) \right\} d^4x'$$

ma

$$\partial_\mu \Phi^\alpha = \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial \psi^\beta}\; \partial'_\nu \psi^\beta \; \partial_\mu X'^\nu \;\Rightarrow\; \frac{\partial(\partial_\mu \Phi^\alpha)}{\partial(\partial'_\nu \psi^\beta)} \;=\; \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial \psi^\beta}\; \partial_\mu X'^\nu$$

e perciò

$$\delta \int_{D'} \mathcal{L}'\, d^4x' \;=\; \int_{D'} \left\{ \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\alpha} \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial \psi^\beta} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)} \frac{\partial(\partial_\mu \Phi^\alpha)}{\partial \psi^\beta} \right] \delta\psi^\beta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)} \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial \psi^\beta}\; \partial_\mu X'^\nu \; \partial'_\nu(\delta\psi^\beta) \right\} d^4x'$$

Ma per la definizione stessa di X, risulta che

$$\partial_\mu X'^\nu \; \partial'_\nu \;\equiv\; \partial_\mu$$

si ha

$$\delta \int_{D'} \mathcal{L}'\, d^4x' \;=\; \int_{D'} \left\{ \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\alpha} \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial \psi^\beta} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)} \frac{\partial(\partial_\mu \Phi^\alpha)}{\partial \psi^\beta} \right] \delta\psi^\beta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)} \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial \psi^\beta}\; \partial_\mu(\delta\psi^\beta) \right\} d^4x'$$

Consideriamo adesso il secondo termine dell'integrale di sopra:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)} \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial \psi^\beta}\; \partial_\mu(\delta\psi^\beta) \;=\; \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)} \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial \psi^\beta}\; \delta\psi^\beta \right] \;-\; \delta\psi^\beta\; \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)} \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial \psi^\beta} \right]$$

L'integrale del primo termine può essere riscritto come

$$\int_{D'} \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)} \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial \psi^\beta}\; \delta\psi^\beta \right]\; d^4x' \;=\; \int_{D} \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)} \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial \psi^\beta}\; \delta\psi^\beta \right]\; J(x)\; d^4x$$

ma dato che abbiamo assunto che lo Jacobiano $J(x)$ è costante, l'integrando risulta essere una quadridivergenza e dunque, via il teorema di Gauss, può essere trasformata in un integrale di superficie sulla frontiera Σ del dominio D. Comunque, poichè le funzioni X e X' sono analitiche, la frontiera di D è mandata nella frontiera di D' e viceversa, i.e. $x \in \Sigma \leftrightarrow x' \in \Sigma'$. Quindi, le variazioni $\delta\psi$ che per ipotesi si annullano su Σ', sono nulle quando $x \in \Sigma$ e, di conseguenza, l'integrale di sopra è nullo. In conclusione, risulta

$$\begin{aligned} \delta \int_{D'} \mathcal{L}'\, d^4x' \;&=\; \int_{D'} \left\{ \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\alpha} \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial \psi^\beta} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)} \frac{\partial(\partial_\mu \Phi^\alpha)}{\partial \psi^\beta} \right] \delta\psi^\beta - \right. \\ &\left. -\; \delta\psi^\beta\; \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)} \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial \psi^\beta} \right] \right\} d^4x' \end{aligned} \tag{B.18}$$

Inoltre

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)} \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial \psi^\beta} \right] \; = \; \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)} \; \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial \psi^\beta} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)} \; \partial_\mu \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial \psi^\beta} \tag{B.19}$$

e poichè

$$\partial_\mu \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial \psi^\beta} \; = \; \frac{\partial(\partial_\mu \Phi^\alpha)}{\partial \psi^\beta}$$

ecco che il secondo addendo dell'espressione (B.19) cancella il secondo addendo nella prima parentesi quadra della (B.18), per cui finalmente otteniamo

$$\begin{aligned} \delta \int_{D'} \mathcal{L}' \, d^4x' \; &= \; J \int_D \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\alpha} \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial \psi^\beta} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)} \; \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial \psi^\beta} \right\} \; \delta\psi^\beta \, d^4x \\ &= \; J \int_D \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\alpha} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)} \right\} \; \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial \psi^\beta} \; \delta\psi^\beta \, d^4x \end{aligned} \tag{B.20}$$

D'altronde la quantità in parentesi graffa è nulla, dato che i campi ϕ verificano per ipotesi le equazioni di Eulero-Lagrange; dunque risulta così dimostrato che il principio di minima azione è valido anche per i campi ψ quando si prenda $\mathcal{L}'$ come loro Lagrangiana.

Esempio

Supponiamo che ϕ sia un campo scalare e consideriamo la trasformazione di coordinate lineare e locale, descritta da una generica matrice non degenere M. Per definizione, si ha

$$\begin{aligned} x \leftrightarrow x' \; &: \; x' \, = \, Mx \; \Rightarrow \; x'^\alpha = M^\alpha_{\cdot\beta} x^\beta; \\ &: \; x \, = \, M^{-1} x' \; \Rightarrow \; x^\alpha = (M^{-1})^\alpha_{\cdot\beta} x'^\beta; \\ \phi(x) \leftrightarrow \psi(x') \; &: \; \psi(x') \equiv \Psi(\phi(x)) = \phi(x) \\ &: \; \phi(x) \equiv \Phi(\psi(x')) = \psi(x') \end{aligned}$$

Chiaramente lo Jacobiano J della trasformazione di coordinate è costante (risultando $J = ||M||$) e le funzioni Φ, Ψ sono le funzioni *identiche*.

Partiamo dalla seguente densità lagrangiana che, come vedremo, descrive appunto la dinamica libera del campo scalare di massa m

$$\mathcal{L} \; = \; (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) \; - \; m^2 \, \phi^2 \quad \Leftrightarrow \quad \Box\phi + m^2 \phi = 0 \tag{B.21}$$

A causa dell'invarianza *in valore* della Lagrangiana sotto trasformazioni locali, secondo la equazione (B.16), la dinamica del campo trasformato ψ è descritta dalla nuova densità lagrangiana

$$\mathcal{L}'(\psi, \partial'_\nu \psi) \;=\; \mathcal{L}(\Phi(\psi), \partial_\mu \Phi(\psi)) \tag{B.22}$$

Ma

$$\begin{aligned} \Phi(\psi) &= \psi \;; \\ \partial_\mu \Phi(\psi) &= \partial_\mu \psi(x') \;=\; \partial'_\nu \psi \;\; \partial_\mu X'^\nu \;=\; M^\nu_{\cdot\,\mu}\, \partial'_\nu \psi \end{aligned}$$

e quindi, sostituendo nella (B.22), otteniamo

$$\mathcal{L}'(\psi, \partial'_\nu \psi) \;=\; (M^\nu_{\cdot\,\mu}\, \partial'_\nu \psi)(M^\sigma_{\cdot\,\rho}\, \partial'_\sigma \psi)\, \delta^{\rho\mu} \;-\; m^2\, \psi^2 \tag{B.23}$$

dove $\delta^{\nu\mu} = g^{\nu\mu} = g_{\nu\mu} = \delta^{\nu\mu}$ è l'elemento $(\nu\mu)$ del tensore metrico di Minkowski. Con un poco di semplice algebra e definendo

$$M_\tau^{\cdot\,\mu} \equiv M^\sigma_{\cdot\,\rho}\; \delta^{\rho\mu}\; \delta_{\sigma\tau} \tag{B.24}$$

abbiamo allora

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'(\psi, \partial'_\nu \psi) &= M^\nu_{\cdot\,\mu}\, M^\sigma_{\cdot\,\rho}\, \delta^{\rho\mu}\; (\partial'_\nu \psi)\, (\partial'_\sigma \psi) \;-\; m^2\, \psi^2 \\ &= M^\nu_{\cdot\,\mu}\, M^\sigma_{\cdot\,\rho}\, \delta^{\rho\mu}\, \delta_{\sigma\tau}\; (\partial'_\nu \psi)\, (\partial'^\tau \psi) \;-\; m^2\, \psi^2 \\ &\equiv M^\nu_{\cdot\,\mu}\, M_\tau^{\cdot\,\mu}\, (\partial'_\nu \psi)\, (\partial'^\tau \psi) \;-\; m^2\, \psi^2 \end{aligned} \tag{B.25}$$

Da quanto precede, concludiamo dunque che, in questo caso particolare, la densità lagrangiana $\mathcal{L}'$, che descrive la dinamica del campo trasformato ψ, determinata[344] dall'invarianza in valore a partire dalla densità lagrangiana $\mathcal{L}$ di cui alla (B.22), è espressa appunto dalla funzione (B.25).

B.3 *Invarianza in forma*

Se, nell'esempio precedente, la matrice M è una matrice di Lorentz e dunque, come sappiamo, descrive una trasformazione omogenea di coordinate che lega due riferimenti inerziali fra loro, allora, poichè

$$(M)_{\mu\alpha} \equiv M^\mu_{\cdot\,\alpha} \qquad (M^{-1})_{\beta\mu} \equiv M_\mu^{\cdot\,\beta} \qquad \Rightarrow\;\; M^\mu_{\cdot\,\alpha} M_\mu^{\cdot\,\beta} \;=\; \delta^\beta_\alpha$$

la densità lagrangiana $\mathcal{L}'$ diventa dunque, come abbiamo visto

$$\mathcal{L}'(\psi, \partial'_\nu \psi) \;\;=\;\; (\partial'_\nu \psi)\, (\partial'^\nu \psi) \;-\; m^2\, \psi^2 \tag{B.26}$$

[344]Essa, per quanto già visto, non è l'unica densità lagrangiana possibile per il campo trasformato ψ, bensì è quella determinata univocamente dall'invarianza in valore, a partire dalla densità lagrangiana $\mathcal{L}$.

i.e., la densità lagrangiana $\mathcal{L}'$ dipende da ψ con *la stessa dipendenza funzionale* con cui la densità lagrangiana $\mathcal{L}$ dipende da ϕ.
In questo caso, diciamo che la Lagrangiana è invariante in forma sotto la trasformazione locale considerata. Chiaramente, se questo accade, la dinamica del campo ψ è formalmente la stessa di quella del campo ϕ, i.e. le equazioni di moto per ψ sono formalmente identiche a quelle per ϕ.

Si noti, comunque, che, mentre l'invarianza in forma della densità lagrangiana implica che le equazioni di moto restino formalmente le stesse, l'inverso non è a priori vero. Per rendercene conto, consideriamo la seguente densità lagrangiana che descrive la dinamica di un campo scalare, libero ma di massa nulla, i.e.

$$\mathcal{L} \ = \ (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) \quad \Leftrightarrow \quad \Box\phi = 0 \tag{B.27}$$

ed effettuiamo una trasformazione locale che sia una dilatazione uniforme delle coordinate (trasformazione di scala),

$$\begin{aligned} x \leftrightarrow x' \ &: \ x' \ = \ X'(x) \ = \ \lambda x \ \Rightarrow \ x'^\alpha = \lambda x^\alpha; \\ &: \ x \ = \ X(x') \ = \ \lambda^{-1} x' \ \Rightarrow \ x^\alpha = \lambda^{-1} x'^\alpha; \\ \phi(x) \leftrightarrow \psi(x') \ &: \ \psi(x') \equiv \Psi(\phi(x)) = \phi(x) \\ &: \ \phi(x) \equiv \Phi(\psi(x')) = \psi(x') \end{aligned}$$

Chiaramente lo Jacobiano J della trasformazione di coordinate è costante, essendo $J = ||\lambda^4||$, così come le funzioni Φ, Ψ sono, di nuovo, le funzioni *identiche*. Si ha

$$\begin{aligned} \Phi(\psi) \ &= \ \psi \ ; \\ \partial_\mu \Phi(\psi) \ &= \ \partial_\mu \psi(x') \ = \ \partial'_\nu \psi \ \ \partial_\mu X'^\nu \ = \ \lambda \, \partial'_\nu \psi \end{aligned}$$

perciò la densità lagrangiana $\mathcal{L}'$ per il campo trasformato ψ che si determina a partire dall'invarianza in valore, è

$$\mathcal{L}'(\psi, \partial'_\nu \psi) \ = \ \mathcal{L}(\Phi(\psi), \partial_\mu \Phi(\psi)) \ = \ \lambda^2 \ (\partial'_\nu \psi)(\partial'^\nu \psi) \tag{B.28}$$

Poichè le equazioni di Eulero-Lagrange sono omogenee in $\mathcal{L}$, il fattore λ^2 in (B.28) è irrilevante, per cui la dinamica del campo ψ è ancora descritta dall'equazione di Klein-Gordon per massa nulla $\Box\psi = 0$, così come per il campo ϕ; ma la densità lagrangiana (B.27) non risulta invariante in forma sotto la trasformazione locale di cui sopra[345]

[345]Come conseguenza, il teorema di Noëther che discuteremo in un prossimo paragrafo, non associa al gruppo di dilatazione di cui sopra alcuna corrente conservata !

B.3.1 *Alcuni esempi di lagrangiane*

- **Equazione di Schrödinger**

  Anche l'equazione di Schrödinger può essere ottenuta, via il principio di minima azione, da una opportuna densità lagrangiana, funzione[346] di ψ e ψ^* e delle loro derivate.

  Prendiamo infatti la seguente densità lagrangiana[347]

$$\mathcal{L} = \frac{i\hbar}{2}(\psi^* \partial_0 \psi - \psi \partial_0 \psi^*) + \frac{\hbar^2}{2m}(\partial_i \psi^*)(\partial^i \psi) - \psi^* V \psi \tag{B.29}$$

  Dalla equazione del moto per ψ^*

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi^*)} = 0 \tag{B.30}$$

  essendo

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} &= \frac{i\hbar}{2}\partial_0 \psi - V\psi \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi^*)} &= -\frac{i\hbar}{2}\psi \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \psi^*)} &= \frac{\hbar^2}{2m}\partial^i \psi \end{aligned}$$

  ne segue l'equazione[348]

$$\begin{aligned} &\frac{i\hbar}{2}\partial_0 \psi - V\psi - \partial_0(-\frac{i\hbar}{2}\psi) - \partial_i(\frac{\hbar^2}{2m}\partial^i \psi) = 0 \\ \Rightarrow \qquad & i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 \psi + V\psi \end{aligned} \tag{B.31}$$

  che è appunto l'equazione di Schrödinger per il campo ψ.

  Procedendo poi a partire dalla equazione analoga alla (B.30) relativa al campo ψ, otteniamo l'equazione di moto per ψ^*, che risulta naturalmente essere semplicemente la complessa coniugata della (B.31).

---

[346] La densità lagrangiana deve essere reale e quindi deve dipendere dalla funzione d'onda ψ, dalla sua complessa coniugata ψ^* (e loro derivate) in modo bilineare. Questo garantisce che le equazioni del moto per ψ e ψ^*, dedotte a partire da essa, risultano effettivamente una complessa coniugata dell'altra.
D'altronde ψ è costituita a partire da due funzioni reali f_r ed f_i indipendenti, che ne costituiscono rispettivamente la parte reale e la parte immaginaria. Queste stesse due funzioni definiscono anche ψ^* e possono essere viste, in ultima analisi, come i campi basilari della teoria. La struttura reale della lagrangiana garantisce però che questi due gradi di libertà, associati ai due campi reali indipendenti f_r ed f_i, possono essere equivalentemente tenuti in conto trattando direttamente ψ e ψ^* come fossero indipendenti tra loro ...

[347] Per il potenziale V si è assunto che esso sia reale e funzione solo della posizione.

[348] Si ricordi che $\partial_i = -\partial^i$ e quindi che $\partial_i \partial^i = -\nabla^2$.

- **Campo scalare di massa m**

  La densità lagrangiana[349] che descrive l'evoluzione libera del campo scalare, reale, di massa m, come abbiamo già avuto modo di anticipare, è

  $$\mathcal{L} \; = \; (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) \; - \; m^2\, \phi^2 \tag{B.32}$$

  Sostituendo infatti la (B.32) nella (B.11), l'equazione di moto[350] che si ottiene è

  $$-2\, m^2\, \phi \; - \; 2\, \partial_\mu (\partial^\mu \phi) \; = \; 0 \;\; \Leftrightarrow \;\; \Box \phi \; + \; m^2\, \phi \; = \; 0 \tag{B.33}$$

  i.e. appunto l'equazione di Klein-Gordon per il campo scalare di massa m.

  Questo campo può descrivere solo particelle neutre perché, essendo reale, la densità lagrangiana che ne descrive l'evoluzione non può essere invariante in forma per trasformazioni di gauge di prima specie, cioè sotto il gruppo $U(1)$ per cui $\phi \to e^{i\alpha}\, \phi$. Nel caso di particelle cariche, infatti, come vedremo, il campo ϕ deve essere intrinsecamente complesso. La densità lagrangiana, che, per quanto detto, sarà comunque ancora necessariamente reale, in questo caso, è semplicemente data da (chiaramente invariante in forma sotto la trasformazione $\phi \to e^{i\alpha}\, \phi$; $\phi^* \to e^{-i\alpha}\, \phi^*$)

  $$\mathcal{L} \; = \; (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi^*) \; - \; m^2\, \phi\, \phi^* \tag{B.34}$$

  la quale, via il principio di minima azione, implica che sia il campo ϕ, come il suo complesso coniugato ϕ^*, soddisfino entrambi l'equazione di Klein-Gordon per la massa m.

- **Campo vettoriale di massa m**

  Una densità lagrangiana che descrive la dinamica libera del campo vettoriale neutro di massa m è la seguente:

  $$\mathcal{L} \; = \; (\partial_\mu \phi^\nu)(\partial^\mu \phi_\nu) \; - \; m^2\, \phi_\nu\, \phi^\nu \tag{B.35}$$

  Usando questa densità lagrangiana nella (B.11), otteniamo infatti

  $$-2\, m^2\, \phi_\nu \; - \; 2\, \partial_\mu (\partial^\mu \phi_\nu) \; = \; 0 \;\; \Leftrightarrow \;\; \Box \phi_\nu \; + \; m^2\, \phi_\nu \; = \; 0 \tag{B.36}$$

[349] Come abbiamo già avuto modo di osservare, la lagrangiana non è mai unica, essendo definita a meno di una quadridivergenza e di una costante moltiplicativa non nulla. In questo senso sarebbe più corretto parlare di *"una densità lagrangiana che descrive ..."*.
Resta il fatto che la lagrangiana (B.32) è quella più semplice ed in questo senso risulta appunto *"la densità lagrangiana ..."*

[350] Ricordiamo che l'operatore di D'Alembert $\Box$ è definito come

$$\Box \equiv \partial_\mu \partial^\mu \equiv \partial_0^2 - \nabla^2$$

Se il campo è carico, analogamente al caso scalare, una densità lagrangiana che ne descrive la dinamica è certamente la seguente

$$\mathcal{L} \;=\; (\partial_\mu\phi^\nu)(\partial^\mu\phi^*_\nu) \;-\; m^2\,\phi_\nu\phi^{*\nu} \tag{B.37}$$

La densità lagrangiana (B.37) non è, comunque, l'unica possibile per il campo vettoriale massivo (a parte la somma con una quadridivergenza). Definiamo infatti il seguente tensore antisimmetrico a due indici

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu\phi^\nu - \partial^\nu\phi^\mu \quad \Leftrightarrow \quad F^*_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu\phi^*_\nu - \partial_\nu\phi^*_\mu \tag{B.38}$$

e quindi poniamo[351]

$$\mathcal{L} \;=\; \frac{1}{2}\,F^{\mu\nu}\,F^*_{\mu\nu} \;-\; m^2\,\phi^\nu\phi^*_\nu \tag{B.40}$$

E' facile ora concludere che le equazioni del moto per ϕ^ν, che discendono dalla densità lagrangiana precedente, sono le seguenti (per ϕ^*_ν otteniamo, naturalmente, le complesse coniugate !)

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} + m^2\,\phi_\nu = 0 \tag{B.41}$$

ovvero, più esplicitamente

$$\Box\phi_\nu + m^2\,\phi_\nu - \partial_\nu\partial^\mu\phi_\mu = 0 \tag{B.42}$$

Queste equazioni risultano apparentemente diverse dall'equazione di Klein-Gordon, ma, in realtà, la implicano in modo diretto, infatti, derivando la (B.41) rispetto ad x_ν ed usando la proprietà di antisimmetria del tensore $F_{\mu\nu}$ ed il fatto che, per ipotesi, $m \neq 0$, abbiamo che

$$\partial^\nu\partial^\mu F_{\mu\nu} + m^2\,\partial^\nu\phi_\nu = 0 \;\Rightarrow\; m^2\,\partial^\nu\phi_\nu = 0 \;\Rightarrow\; \partial^\nu\phi_\nu = 0 \tag{B.43}$$

dove, evidentemente, l'ultima equazione che seleziona le tre componenti del campo che formano un sistema di spin $S = 1$, è conseguenza dell'equazione

[351] Qui stiamo trattando il caso del campo carico, ma quanto stiamo dicendo resta vero anche nel caso neutro.
Si osservi che la differenza fra le due densità lagrangiane (B.37) e (B.40) non è, a priori, una quadridivergenza, infatti risulta

$$\begin{aligned}\Delta\mathcal{L} \;&=\; \left[(\partial_\mu\phi^\nu)(\partial^\mu\phi^*_\nu) \;-\; m^2\,\phi^\nu\,\phi^*_\nu\right] - \left[\frac{1}{2}\,(\partial^\mu\phi^\nu - \partial^\nu\phi^\mu)\left(\partial_\mu\phi^*_\nu - \partial_\nu\phi^*_\mu\right) \;-\; m^2\,\phi^\nu\phi^*_\nu\right]\\ &=\; (\partial^\mu\phi^\nu)(\partial_\nu\phi^*_\mu) = \partial_\nu\left[(\partial^\mu\phi^\nu)\phi^*_\mu\right] - (\partial^\mu\partial_\nu\phi^\nu)\phi^*_\mu \end{aligned} \tag{B.39}$$

la quale coincide effettivamente con una quadridivergenza (primo termine della (B.39)) se il campo soddisfa anche la condizione $\partial_\nu\phi^\nu = 0$, la quale, però, non è garantita dalla densità lagrangiana (B.37) ma solo dalla (B.40) e comunque solo nel caso di massa non nulla.

del moto (B.42) solo nel caso di $m \neq 0$.
Dunque, nel caso in cui $m \neq 0$, la densità lagrangiana (B.40) fornisce sia la condizione di Lorentz $\partial_\mu \phi^\mu = 0$ che le equazioni di moto di Klein-Gordon per le quattro componenti del campo (di cui, data la condizione di Lorentz, solo tre sono indipendenti, coerentemente con il fatto che il campo descrive entità di spin uno).

Nel caso del campo elettromagnetico A^μ, la densità lagrangiana[352] che si può usare per descriverne l'evoluzione è ancora la (B.40), la quale però adesso, per il fatto che la massa è nulla ed il campo è reale, diventa

$$\mathcal{L} \; = \; \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \tag{B.46}$$

In questo caso, come ben noto, la condizione di Lorentz deve essere imposta "ad hoc", restando poi ancora libero un grado di libertà di *gauge*, per cui $A_\mu \to A'_\mu \equiv A_\mu + \partial^\mu \Gamma$ con $\Box \Gamma = 0$.

La condizione di Lorentz $\partial^\mu A_\mu = 0$ esclude la possibilità del fotone scalare, mentre l'arbitrarietà di gauge descrive il fatto che il fotone non ha polarizzazione longitudinale.

[352] In realtà, volendo che la densità lagrangiana $\mathcal{L}$ sia tale per cui consenta di definire in modo canonico la densità hamiltoniana (i.e. la densità d'energia) nel sistema di Gauss o di Lorentz-Heaviside, occorrerebbe piuttosto usare, rispettivamente

$$\mathcal{L}_G \; = \; -\frac{1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H}_G = \frac{1}{8\pi}\left(E^2 + B^2\right) \tag{B.44}$$

$$\mathcal{L}_{LH} \; = \; -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H}_{LH} = \frac{1}{2}\left(E^2 + B^2\right) \tag{B.45}$$

Poiché la differenza con la (B.46) è sempre soltanto una costante moltiplicativa, evidentemente, nulla cambia riguardo alle conclusioni circa le equazioni di moto.

- **Campo di Dirac**

  Una densità lagrangiana che descrive l'evoluzione libera del campo classico di Dirac è la seguente:

$$\mathcal{L} \;=\; \frac{i}{2}\,[\overline{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu\psi) \;-\; (\partial_\mu\overline{\psi})\gamma^\mu\psi] \;-\; m\,\overline{\psi}\psi \tag{B.47}$$

  Usando questa Lagrangiana, derivando rispetto a $\overline{\psi}$, dalla (B.11) otteniamo l'equazione di Dirac per il campo ψ, infatti si ha

$$-m\,\psi \;-\; \partial_\mu(-i\,\gamma^\mu\,\psi) \;=\; 0 \quad\Leftrightarrow\quad (i\,\gamma^\mu\partial_\mu \;-\; m)\,\psi \;=\; 0 \tag{B.48}$$

  mentre, derivando rispetto a ψ, otteniamo l'equazione di Dirac per $\overline{\psi}$

$$-m\,\overline{\psi} \;-\; \partial_\mu(i\,\overline{\psi}\,\gamma^\mu) \;=\; 0 \quad\Leftrightarrow\quad i\,\partial_\mu\,\overline{\psi}\,\gamma^\mu \;+\; m\,\overline{\psi} \;=\; 0 \tag{B.49}$$

  Talvolta però si preferisce usare la densità lagrangiana seguente

$$\mathcal{L} \;=\; i\,\overline{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu\psi) \;-\; m\,\overline{\psi}\psi \tag{B.50}$$

  la quale conduce alle stesse equazioni di moto e differisce dalla precedente per la seguente quadridivergenza

$$\Delta\mathcal{L} \;=\; \frac{i}{2}\,\partial_\mu\,[\,\overline{\psi}\gamma^\mu\psi\,] \tag{B.51}$$

  la quale, come sappiamo è nulla sulle soluzioni dell'equazioni di Dirac.

B.4 *Il teorema di Noëther*

Abbiamo visto che, sotto ipotesi molto generali, una trasformazione locale lascia la densità lagrangiana invariante in valore, i.e.

$$\mathcal{L}'(\psi, \partial'_\nu \psi) \;=\; \mathcal{L}(\Phi(\psi), \partial_\mu \Phi(\psi)) \tag{B.52}$$

In alcuni casi, può anche risultare invariante in forma, i.e.

$$\mathcal{L}'(\psi, \partial'_\nu \psi) \;=\; \mathcal{L}(\Phi(\psi), \partial_\mu \Phi(\psi)) \;=\; \mathcal{L}(\psi, \partial'_\nu \psi) \tag{B.53}$$

In questo caso diciamo che la trasformazione locale agisce come una <u>simmetria</u> per il sistema fisico che stiamo considerando. Una delle conseguenze, come abbiamo già messo in evidenza, è che le equazioni di Eulero-Lagrange per i campi trasformati ψ coincidono formalmente con le equazioni del moto per i campi ϕ.

Se la densità lagrangiana è *invariante* in $forma$ sotto un gruppo di Lie di trasformazioni ad m parametri, allora il teorema di Noëther afferma che ci sono m quadricorrenti conservate.

Figure 30: *Emmy Amalie Noether (1882-1935)*

Prima di dimostrare il teorema, ricordiamo che un gruppo di Lie $\mathcal{G}$ ad m parametri è un gruppo topologico in cui, almeno in un opportuno intorno aperto dell'identità e, i suoi elementi g possono essere descritti analiticamente in termini di m parametri reali[353], i.e. $g = g(\omega_1, ..., \omega_m)$.

Senza perdita alcuna di generalità, si può assumere che i parametri (ω) siano tali per cui

$$g(0) = e \tag{B.54}$$

Assumeremo altresì che esista una *rappresentazione fedele* (cioè biunivoca) del gruppo $\mathcal{G}$ in un'algebra di operatori lineari opportuna $\mathcal{A}$.
Indichiamo allora con $A(\omega)$ l'operatore corrispondente all'elemento $g(\omega)$ del gruppo astratto: la (B.54) implica immediatamente che

$$A(0) = I \tag{B.55}$$

dove I è l'operatore identico. Usando adesso l'analiticità della descrizione del gruppo e quindi della sua rappresentazione fedele, ecco che potremo scrivere in generale[354]

$$A(d\omega) = I - i\, d\omega_k\, X^k \tag{B.56}$$

dove gli operatori X^k sono, a loro volta, definiti dall'equazione

$$X^k \equiv i\; \left.\frac{\partial A(\omega)}{\partial \omega_k}\right|_{\omega=0} \tag{B.57}$$

e costituiscono i *generatori* della rappresentazione data.
Poiché, fissato (ω), esiste uno ed un solo elemento del gruppo $\mathcal{G}$ che viene individuato da quel set di parametri, per definizione di rappresentazione fedele, anche la funzione $A(\omega)$ dovrà essere iniettiva, per cui gli m generatori definiti dalla (B.57) risultano necessariamente indipendenti.
Sophus Lie ha dimostrato come i generatori possono essere definiti anche per il gruppo astratto senza far ricorso alle sue rappresentazioni: i gruppi per cui questo accade sono appunto i gruppi di Lie; ma non è questo il luogo per trattare questi aspetti formali, anche perché l'interesse fisico per i gruppi passa sempre, in ultima analisi, attraverso loro rappresentazioni ...
Torniamo dunque alla rappresentazione fedele $A(g)$ di cui sopra.
Abbiamo visto che, in prossimità dell'identità essa è completamente definita dagli m generatori indipendenti X^k; ma che accade se ci allontaniamo dall'identità in

[353] C'è, evidentemente, una enorme libertà di scelta riguardo al modo di effettuare la parametrizzazione degli elementi del gruppo, l'unico vincolo restando quello per cui, dati comunque ω_1 ed ω_2 nello spazio dei parametri, allora dovrà essere che se $g(\omega) = g(\omega_1)\, g(\omega_2)$ allora la funzione $\omega = \Omega(\omega_1, \omega_2)$ deve essere analitica.

[354] Si osservi che un'analoga relazione per il gruppo astratto non sarebbe stata possibile in quanto nel gruppo non è definita l'operazione di somma, mentre, ovviamente, essa è definita nell'algebra operatoriale ...

modo significativo ?
Data l'ampia libertà di scelta riguardo alla parametrizzazione del gruppo già messa in evidenza, possiamo cercare di definire una maniera di "allontanarci" dall'origine tale da condurre a risultati particolarmente semplici quanto alla forma analitica della parametrizzazione stessa.
Consideriamo per questo una generica trasformazione infinitesima

$$A(d\omega) = I - i\, d\omega_k\, X^k \tag{B.58}$$

ed immaginiamo di innalzarla ad una potenza opportuna, peraltro qualsiasi: evidentemente, per la proprietà della legge di moltiplicazione all'interno del gruppo, questa operazione conduce comunque ad un opportuno elemento del gruppo stesso! Questo fatto suggerisce allora un possibile modo di parametrizzazione degli elementi del gruppo, tale che

$$A(\omega) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - i\,\frac{\omega_k}{n}\; X^k\right)^n \equiv e^{-i\,\omega\cdot X} \tag{B.59}$$

che è appunto la cosiddetta *rappresentazione esponenziale*, la quale, per quanto detto a proposito dello spazio dei parametri, deve essere senz'altro possibile, almeno in tutto un intorno dell'identità aperto e connesso.
Questo risultato è importante in quanto riduce la descrizione completa della generica rappresentazione[355] del gruppo su un'algebra operatoriale alla semplice conoscenza dei suoi generatori, i quali costituiscono in modo naturale, uno spazio vettoriale[356] sul corpo complesso.
Se adesso consideriamo una "direzione" fissata nello spazio dei parametri da un qualsiasi versore[357] $\hat{\omega}$, possiamo allora considerare la famiglia degli operatori $\hat{A}(\lambda) \equiv e^{-i\,\lambda\,\hat{\omega}_k X^k}$. In questa famiglia la legge di moltiplicazione è particolarmente semplice, risultando[358]

$$\hat{A}(\lambda_1)\,\hat{A}(\lambda_2) = \hat{A}(\lambda_1 + \lambda_2) \tag{B.61}$$

[355]A rigore quanto stiamo dicendo vale per le rappresentazioni su algebre operatoriali della rappresentazione fedele; ma siccome questa è isomorfa al gruppo, vale anche per le rappresentazioni su algebre operatoriali del gruppo astratto.

[356]Come vedremo, questo spazio lineare dei generatori, con l'operazione di composizione interna rappresentata dal commutatore, assume la struttura detta di *algebra di Lie*.

[357]E dunque tale che $\sum_k \hat{\omega}_k \hat{\omega}_k = 1$.

[358]Infatti, definito l'operatore $X \equiv \hat{\omega}_k X^k$, risulta evidentemente che

$$\hat{A}(\lambda_1)\,\hat{A}(\lambda_2) = e^{-i\,\lambda_1\,X}\,e^{-i\,\lambda_2\,X} = \sum_{r\geq 0}(-i)^r\,\frac{(\lambda_1\,X)^r}{r!}\cdot\sum_{s\geq 0}(-i)^s\,\frac{(\lambda_2\,X)^s}{s!} = e^{-i(\lambda_1-\lambda_2)\,X} \tag{B.60}$$

dove l'ultima eguaglianza discende direttamente dal fatto che risulta evidentemente che

$$(\lambda_1 X + \lambda_2 X)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}(\lambda_1 X)^k (\lambda_2 X)^{(n-k)}$$

Ma se moltiplichiamo, invece, elementi della rappresentazione fedele del gruppo relativi a "direzioni" differenti nello spazio dei parametri, il parametro che individua l'elemento prodotto risultante, in generale, non è espresso in modo altrettanto semplice in termini dei parametri che individuano i suoi "fattori".
Possiamo comunque dire di nuovo che, almeno in un intorno opportuno dell'identità, dovrà essere

$$e^{-i\,\alpha_k X^k} \cdot e^{-i\,\beta_s X^s} = e^{-i\,\delta_j X^j} \quad i.e. \quad e^{-i\,\alpha\cdot X} \cdot e^{-i\,\beta\cdot X} = e^{-i\,\delta\cdot X} \tag{B.62}$$

per una opportuna direzione $\delta \equiv (\delta_j)$, funzione solo delle due direzioni iniziali $\alpha \equiv (\alpha_k)$ e $\beta \equiv (\beta_s)$. La teoria dei gruppi di Lie mostra che questo può accadere se e solo se lo spazio vettoriale dei generatori è *chiuso* sotto l'operazione di commutazione, ovvero se e solo se accade che

$$\left[X^k,\, X^s\right] = i\, f^{ksj}\, X^j \tag{B.63}$$

dove gli f^{ksj} sono coefficienti in generale complessi, detti *costanti di struttura* del gruppo, proprio perché essi non dipendono dalla particolare rappresentazione considerata e sono quindi gli stessi per tutte. Come abbiamo già in parte anticipato, l'operazione di composizione interna[359] nello spazio dei generatori rappresentata dal commutatore, nel caso in cui valga la (B.63), conferisce per definizione allo spazio in questione la struttura di algebra di Lie.

Ma veniamo adesso alla dimostrazione dell'asserzione precedente.
Se vale la (B.62) allora risulta che

$$-i\,\delta \cdot X = ln\left[I + e^{-i\,\alpha\cdot X}\, e^{-i\,\beta\cdot X} - I\right] \equiv ln\,[I + K] \tag{B.64}$$

dove si è definito

$$\begin{aligned} K \;&\equiv\; e^{-i\,\alpha\cdot X}\, e^{-i\,\beta\cdot X} - I = \\ &=\; \left[I + (-i\alpha X) + \frac{1}{2}(-i\alpha X)^2 + ...\right] \cdot \left[I + (-i\beta X) + \frac{1}{2}(-i\beta X)^2 + ...\right] - I = \\ &=\; -i\alpha X - i\beta X - (\alpha X)(\beta X) - \frac{1}{2}(\alpha X)^2 - \frac{1}{2}(\beta X)^2 + ... \end{aligned} \tag{B.65}$$

e dunque, dallo sviluppo della funzione $ln(1+x)$

$$-i\,\delta X = K - \frac{1}{2}K^2 + \frac{1}{3}K^3 - \frac{1}{4}K^4 + ... \tag{B.66}$$

[359]Si osservi che il "prodotto" rappresentato dal commutatore che indicheremo anche con $\wedge$ ponendo $[A, B] \equiv A \wedge B$, non è associativo, ma vale l'identità di Jacobi per cui

$$A \wedge (B \wedge C) + B \wedge (C \wedge A) + C \wedge (A \wedge B) = 0$$

ricaviamo che, al secondo ordine, risulta

$$\begin{aligned} -i\,\delta\cdot X &= -i\alpha X - i\beta X - (\alpha X)(\beta X) - \frac{1}{2}(\alpha X)^2 - \frac{1}{2}(\beta X)^2 + ... \\ &- \frac{1}{2}\left[(-i\alpha X)^2 + (-i\beta X)^2 + (-i\alpha X)(-i\beta X) + (-i\beta X)(-i\alpha X) + ...\right] = \\ &= -i\alpha X - i\beta X - \frac{1}{2}\left[\alpha X,\, \beta X\right] \end{aligned} \tag{B.67}$$

ovvero, più esplicitamente

$$\begin{aligned} &[\alpha X,\, \beta X] = 2i\,(\delta X - \alpha X - \beta X) \\ &\Leftrightarrow \alpha_k\,\beta_s\left[X^k,\, X^s\right] = 2i(\delta_j - \alpha_j - \beta_j)\,X^j \end{aligned} \tag{B.68}$$

la quale evidentemente richiede, per poter essere verificata in generale, che il commutatore $\left[X^k,\, X^s\right]$ sia un elemento dello spazio lineare dei generatori, ovvero appunto che valga la (B.63).
In questa ipotesi, e dunque nel caso che i generatori formino un'algebra di Lie, per quanto visto sopra, al secondo ordine perturbativo risulta evidentemente che

$$\begin{aligned} -i\,\delta\cdot X &= -i\alpha X - i\beta X - \frac{1}{2}\left[\alpha X,\, \beta X\right] \Rightarrow \\ &\Rightarrow -i\,\delta_j\cdot X^j = -i\alpha_j X^j - i\beta_j X^j - \frac{1}{2}\alpha_r\beta_s(i\,f^{rsj}X^j) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \delta_j = \alpha_j + \beta_j + \frac{1}{2}\alpha_r\beta_s\,f^{rsj} \end{aligned} \tag{B.69}$$

dove l'ultima eguaglianza discende dalla indipendenza lineare dei generatori X^k.

Il punto importante è che, procedendo agli ordini successivi, non è necessario imporre alcuna altra condizione ai generatori, bensì bastano le costanti di struttura del gruppo per poter esprimere, a qualunque ordine perturbativo, i parametri (δ) in funzione dei parametri (α) e (β).
Le costanti di struttura[360] in un gruppo di Lie riassumono, in buona sostanza, la legge di moltiplicazione nel gruppo.

Ma torniamo adesso al punto da cui siamo partiti, cioè dalla dimostrazione del teorema di Noëther.

Supponiamo allora che sia dato un gruppo di Lie $\mathcal{G}$ ad m parametri reali $\mathcal{G} = \{g(\omega)\}$ e supponiamo altresì che siano assegnati opportuni campi $\phi^\alpha(x)$ dove $\alpha = 1, ..., n$. Ammettiamo quindi che il gruppo $\mathcal{G}$ descriva trasformazioni

[360] Come abbiamo detto, fissata la parametrizzazione, le costanti di struttura non dipendono dalla rappresentazione ma solo dal gruppo. Però, cambiando parametrizzazione, ovvero, in altri termini, cambiando base nello spazio dei generatori, queste, evidentemente, possono cambiare!

locali sui campi assegnati, tali che, per trasformazioni infinitesime, risulti

$$x \to x' : x'^{\mu} = x^{\mu} \ + \ \Xi^{\mu}_{a}(x) \ d\omega_a \ \equiv \ x^{\mu} \ + \ \delta x^{\mu} \tag{B.70}$$

$$\phi^{\alpha}(x) \to \psi^{\alpha}(x') : \psi^{\alpha}(x') \ = \ (\delta^{\alpha}_{\beta} \ + \ \Gamma^{\alpha}_{a\beta} \ d\omega_a) \ \phi^{\beta}(x) \equiv \phi^{\alpha}(x) + \delta\phi^{\alpha}(x) \tag{B.71}$$

Supponiamo ora che la dinamica dei campi sia descritta dalla densità lagrangiana $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi^{\alpha}, \partial_{\mu}\phi^{\alpha}, x)$ ed assumiamo che essa sia invariante in forma sotto il gruppo di Lie delle trasformazioni di cui sopra. Questo significa che essa lo sarà, in particolare, per trasformazioni infinitesime.
Consideriamo allora l'integrale di *azione*

$$\int_{D'} \mathcal{L}'(\psi, \partial'_{\nu}\psi, x') \, d^4x' \tag{B.72}$$

A causa dell'invarianza in valore della densità lagrangiana, questo integrale coincide con l'integrale di azione per i campi non trasformati, calcolato nel dominio non trasformato D, usando la densità lagrangiana originale, i.e.

$$\int_{D'} \mathcal{L}'(\psi, \partial'_{\nu}\psi, x') \, d^4x' = \int_{D} \mathcal{L}(\phi, \partial_{\mu}\phi, x) \, d^4x \tag{B.73}$$

Comunque, essendo $\mathcal{L}$ invariante in forma, $\mathcal{L}' = \mathcal{L}$, per cui si ha

$$\int_{D'} \mathcal{L}'(\psi, \partial'_{\nu}\psi, x') \, d^4x' \ = \ \int_{D} \mathcal{L}(\phi, \partial_{\mu}\phi, x) \, d^4x \ = \ \int_{D'} \mathcal{L}(\psi, \partial'_{\nu}\psi, x') \, d^4x'$$

dove l'uguaglianza fra il primo ed il secondo membro vale a causa dell'invarianza in valore, mentre quella fra il primo ed il terzo vale a causa dell'invarianza in forma della densità lagrangiana.
Siccome la trasformazione è infinitesima, possiamo scrivere

$$\int_{D'} \mathcal{L}(\psi, \partial'_{\nu}\psi, x') \, d^4x' \ = \ \int_{D} \mathcal{L}(\psi, \partial_{\nu}\psi, x) \, d^4x \ + \ \int_{\Sigma} \mathcal{L}(\phi, \partial_{\nu}\phi, x)\delta x^{\rho} \, d\sigma_{\rho}$$

dove Σ è la frontiera del dominio D e nel secondo integrale abbiamo sostituito ψ con ϕ, approssimando così la densità lagrangiana all'ordine zero, dato il fatto che l'integrando contiene già il fattore δx^{ρ}, che è già infinitesimo del primo ordine.
Allo stesso ordine di approssimazione, si ha anche che

$$\begin{aligned} \psi^{\alpha}(x) \ &= \ \psi^{\alpha}(x') - \partial_{\mu}\phi^{\alpha} \ \delta x^{\mu} \ = \ \phi^{\alpha}(x) + \delta\phi^{\alpha}(x) - \partial_{\mu}\phi^{\alpha}(x) \, \delta x^{\mu} \\ &\equiv \ \phi^{\alpha}(x) \ + \Big(\Gamma^{\alpha}_{a\beta} \ \phi^{\beta}(x) \ - \ \partial_{\mu}\phi^{\alpha}(x) \ \Xi^{\mu}_{a}(x)\Big) \, d\omega_a \ \equiv \ \phi^{\alpha}(x) + \overline{\delta}\phi^{\alpha}(x) \end{aligned} \tag{B.74}$$

e perciò

$$\begin{aligned} 0 \ &= \ \int_{D'} \mathcal{L}(\psi^{\alpha}, \partial'_{\nu}\psi^{\alpha}, x') \, d^4x' \ - \ \int_{D} \mathcal{L}(\phi^{\alpha}, \partial_{\nu}\phi^{\alpha}, x) \, d^4x \ = \\ &= \ \int_{D} \mathcal{L}(\psi^{\alpha}, \partial_{\nu}\psi^{\alpha}, x) \, d^4x \ + \ \int_{\Sigma} \mathcal{L}(\phi^{\alpha}, \partial_{\nu}\phi^{\alpha}, x)\delta x^{\rho} \, d\sigma_{\rho} \ - \ \int_{D} \mathcal{L}(\phi^{\alpha}, \partial_{\nu}\phi^{\alpha}, x) \, d^4x \ = \\ &= \ \int_{D} \mathcal{L}(\phi^{\alpha} + \overline{\delta}\phi^{\alpha}, \partial_{\nu}(\phi^{\alpha} + \overline{\delta}\phi^{\alpha}), x) \, d^4x \ + \ \int_{\Sigma} \mathcal{L}(\phi^{\alpha}, \partial_{\nu}\phi^{\alpha}, x)\delta x^{\rho} \, d\sigma_{\rho} \ - \\ &- \ \int_{D} \mathcal{L}(\phi^{\alpha}, \partial_{\nu}\phi^{\alpha}, x) \, d^4x \end{aligned}$$

da cui, prendendo la differenza fra il primo ed il terzo addendo e ritrasformando all'indietro, via il teorema di Gauss, l'integrale di superficie su Σ in un integrale di volume su D, si ottiene

$$0 \;=\; \int_D \left\{ \bar{\delta}\phi^\alpha \, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\alpha} \;+\; \partial_\mu(\bar{\delta}\phi^\alpha) \, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)} \;+\; \partial_\mu(\mathcal{L}\, \delta x^\mu) \right\} d^4x \qquad \text{(B.75)}$$

Comunque, dalle equazioni di Eulero-Lagrange per i campi ϕ, sappiamo che

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\alpha} = \partial_\mu \frac{\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)}$$

perciò

$$\bar{\delta}\phi^\alpha \, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\alpha} \;+\; \partial_\mu(\bar{\delta}\phi^\alpha) \, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)} \;=\; \bar{\delta}\phi^\alpha \, \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)} \;+\; \partial_\mu(\bar{\delta}\phi^\alpha) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)} \;=\; \partial_\mu \left[\bar{\delta}\phi^\alpha \, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)} \right]$$

Usando questo risultato nella equazione (B.75), finalmente otteniamo

$$0 \;=\; \int_D \partial_\mu \left\{ \bar{\delta}\phi^\alpha \, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)} + \mathcal{L}\, \delta x^\mu \right\} d^4x \qquad \text{(B.76)}$$

Poichè il dominio D è qualsiasi, questo risultato implica che

$$\partial_\mu \left\{ \bar{\delta}\phi^\alpha \, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)} + \mathcal{L}\, \delta x^\mu \right\} \;=\; 0 \qquad \text{(B.77)}$$

Ma siccome

$$\delta\overline{\phi^\alpha} \;\equiv\; \Big(\Gamma^\alpha_{a\beta} \, \phi^\beta(x) \;-\; \partial_\nu \phi^\alpha(x) \; \Xi^\nu_a(x) \Big) \; d\omega_a \qquad \text{(B.78)}$$

$$\delta x^\mu \;\equiv\; \Lambda^\mu_a(x) \; d\omega_a \qquad \text{(B.79)}$$

abbiamo

$$\partial_\mu \left\{ \Big[\Gamma^\alpha_{a\beta} \, \phi^\beta(x) \;-\; \partial_\nu \phi^\alpha(x) \; \Xi^\nu_a(x) \Big] \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)} + \mathcal{L}\, \Xi^\mu_a(x) \right\} \; d\omega_a \;=\; 0 \qquad \text{(B.80)}$$

Poiché i parametri del gruppo di Lie $d\omega_a$ sono tra loro indipendenti, questo risultato significa che, se definiamo (abbiamo cambiato di segno ...) le m quadricorrenti seguenti

$$\Theta^\mu_a(x) \;\equiv\; \Big[-\Gamma^\alpha_{a\beta} \, \phi^\beta(x) \;+\; \partial_\nu \phi^\alpha(x) \; \Xi^\nu_a(x) \Big] \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)} - \mathcal{L}\, \Xi^\mu_a(x) \qquad \text{(B.81)}$$

allora ognuna di esse è separatamente conservata, i.e. soddisfa l'equazione di continuità

$$\partial_\mu \Theta^\mu_a(x) \;=\; 0 \qquad \text{(B.82)}$$

e questo è appunto quanto afferma il teorema di Emmy Noëther !

Ricordiamo adesso che

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t},\ \vec{\nabla}\right) \tag{B.83}$$

quindi, definendo analogamente $\Theta^\mu_a \equiv \left(\Theta^0_a,\ \vec{\Theta}_a\right)$ abbiamo

$$\partial_\mu \Theta^\mu_a \ = \ 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\partial}{\partial t}\Theta^0_a + \vec{\nabla}\cdot\vec{\Theta}_a = 0 \tag{B.84}$$

Integrando adesso in tutto lo spazio, risulta quindi

$$\frac{\partial}{\partial t} \int d^3x\, \Theta^0_a(x) + \int d^3x\, \vec{\nabla}\cdot\vec{\Theta}_a(x) = 0 \tag{B.85}$$

Ma il secondo integrale, via il teorema della divergenza di Gauss, può essere trasformato in un integrale di superficie all'infinito e se assumiamo che i campi si annullino propriamente, esso è nullo, per cui, posto

$$Q(t) \equiv \int d^3x\, \Theta^0_a(x) \tag{B.86}$$

la grandezza fisica $Q(t)$ è conservata dalla dinamica.

B.4.1 *L'invarianza sotto il gruppo di Poincaré*

Iniziamo supponendo che la densità lagrangiana $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi^\alpha, \partial_\mu\phi^\alpha)$ sia invariante in forma per traslazioni spazio-temporali (e per questo è sufficiente che non dipenda esplicitamente dalle coordinate).

Il gruppo di Lie di simmetria è dunque il gruppo delle traslazioni e le trasformazioni da considerare sono quindi le seguenti

$$x \to x' : \quad x'^\mu = x^\mu + a^\mu \tag{B.87}$$

$$\phi^\alpha(x) \to \psi^\alpha(x') = \phi^\alpha(x) \tag{B.88}$$

che, riscritte per trasformazioni infinitesime nel linguaggio usato in precedenza, diventano

$$x \to x' : \quad x'^\mu = x^\mu + \delta^\mu_a\, d\omega^a \tag{B.89}$$

$$\phi^\alpha(x) \to \psi^\alpha(x') = \phi^\alpha(x) \tag{B.90}$$

Nelle notazioni usate per dimostrare il teorema di Noëther, abbiamo quindi

$$\Gamma^\alpha_{a\beta} = 0; \quad \Xi^\mu_a(x) = \delta^\mu_a \tag{B.91}$$

dove a è un indice che va da 0 a 3 e descrive appunto i quattro gradi di libertà di traslazione. Dalla (B.81) abbiamo allora che le quadricorrenti conservate, individuate dall'indice $a \equiv \nu$, sono le seguenti

$$\Theta^\mu_\nu(x) \;=\; \partial_\rho \phi^\alpha \;\delta^\rho_\nu \;\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)} - \mathcal{L}\,\delta^\mu_\nu = \partial_\nu \phi^\alpha \;\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)} - \mathcal{L}\,\delta^\mu_\nu \tag{B.92}$$

da cui segue, per quanto detto prima, la conservazione delle quattro quantità

$$P_\nu(t) \equiv \int d^3x \;\Theta^0_\nu(x) = \int d^3x \left(\partial_\nu \phi^\alpha \;\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi^\alpha)} - \mathcal{L}\,\delta^0_\nu\right) \tag{B.93}$$

Non è difficile, adesso, riconoscere nel tensore Θ^μ_ν definito dalla (B.92) il consueto tensore energia-impulso[361], ovvero il *tensore canonico degli sforzi*

$$T_{\mu\nu}(x) \;\equiv\; \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi^\alpha)}\;\partial_\nu \phi^\alpha \;-\mathcal{L}\,\delta_{\mu\nu} \quad\Leftrightarrow\quad T^\mu_{\cdot\nu}(x) \;\equiv\; \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)}\;\partial_\nu \phi^\alpha \;-\mathcal{L}\,\delta^\mu_\nu \tag{B.94}$$

per cui il teorema di Noëther mostra come la conservazione del quadrimpulso[362] in un sistema isolato sia la conseguenza dell'invarianza (simmetria) per traslazioni della densità lagrangiana del sistema considerato.

Prima di continuare, osserviamo che, usando il tensore (B.92) e la definizione (B.94), possiamo riscrivere in modo più semplice anche la (B.81), mettendo in evidenza, nella corrente conservata, il contributo legato all'effetto della trasformazione sulle coordinate e quello sui campi stessi.
Si ha infatti, in generale, che

$$\begin{aligned}\Theta^\mu_a(x) \;&\equiv\; \left[-\Gamma^\alpha_{a\beta}\,\phi^\beta(x) \;+\; \partial_\nu \phi^\alpha(x)\;\Xi^\nu_a(x)\right]\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)} - \mathcal{L}\,\Xi^\mu_a(x) = \\ &=\; -\Gamma^\alpha_{a\beta}\,\phi^\beta(x)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\alpha)} + T^\mu_{\cdot\rho}(x)\,\Xi^\rho_a(x)\end{aligned} \tag{B.97}$$

[361] cfr. J.D. Bjorken, S.D. Drell: *Relativistic Quantum Fields*, pag. 18
Si osservi come, per come è stato definito, il tensore degli sforzi canonico $T_{\mu\nu} \equiv \delta_{\mu\rho}\Theta^\rho_\nu$ non è necessariamente simmetrico.

[362] La componente temporale del quadrimpulso è naturalmente l'energia e dunque la sua densità, ovvero la densità hamiltoniana, è data dunque da

$$\mathcal{H} = \Theta^0_0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi^\alpha)}\,\partial_0 \phi^\alpha - \delta^0_0\,\mathcal{L} \tag{B.95}$$

Come si vede, $\mathcal{H}$ è la somma di due termini: il primo, che è il *termine cinetico* è, in generale, intrinsecamente tensoriale (ovvero non diagonale), mentre il secondo è semplicemente proporzionale al tensore metrico (componente (00)) attraverso lo scalare di Lorentz rappresentato dalla densità lagrangiana $\mathcal{L}$.
Nel caso in cui sia presente una interazione, se la densità lagrangiana che la descrive non contiene accoppiamenti derivativi e quindi non ci sono ulteriori contributi al termine cinetico "libero", ecco dunque, come abbiamo già avuto modo di osservare, che risulta

$$\mathcal{H}_I(x) = -\mathcal{L}_I(x) \tag{B.96}$$

Veniamo adesso alle conseguenze che derivano, via il Teorema di Noëther, dall'invarianza in forma della densità lagrangiana sotto il gruppo di Lorentz.
Per ipotesi, la legge di trasformazione locale che lascia invariante in forma la densità lagrangiana è adesso la seguente

$$x \to x' : \quad x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{.\nu}\, x^{\nu} \tag{B.98}$$
$$\phi^{\alpha}(x) \to \psi^{\alpha}(x') = S(\Lambda)^{\alpha}_{.\beta}\, \phi^{\beta}(x) \tag{B.99}$$

dove S sta ad indicare l'opportuna rappresentazione del gruppo di Lorentz che agisce nello spazio $n-$dimensionale delle componenti del campo ϕ^{α} assegnato.
Ma il gruppo di Lorentz (ortocrono proprio) è parametrizzato come gruppo di Lie nel modo seguente

$$\Lambda \;=\; e^{-\frac{i}{2}\,\omega_{\alpha\beta}\,J^{\alpha\beta}}; \qquad (J^{\alpha\beta})^{\mu}_{.\nu} = i(\delta^{\alpha\mu}\,\delta^{\beta}_{\nu} - \delta^{\beta\mu}\,\delta^{\alpha}_{\nu}) \tag{B.100}$$
$$\Rightarrow \quad S(\Lambda) = e^{-\frac{i}{2}\,\omega_{\alpha\beta}\,\Sigma^{\alpha\beta}}; \tag{B.101}$$

dove $\omega_{\alpha\beta}$ sta per la matrice reale antisimmetrica dei parametri, mentre $J^{\alpha\beta}$ e $\Sigma^{\alpha\beta}$ sono i generatori, rispettivamente, della rappresentazione del gruppo di Lorentz sull'algebra operatoriale che agisce sui quadrivettori e su quella che opera sulle componenti del campo assegnato.
In termini di trasformazioni infinitesime, risulta allora

$$x \to x' : \quad x'^{\mu} = x^{\mu} + \frac{1}{2}\,\omega_{\rho\tau}\left(\hat{J}^{\rho\tau}\right)^{\mu}_{.\nu}\, x^{\nu} \tag{B.102}$$
$$\phi^{\alpha}(x) \to \psi^{\alpha}(x') = \phi^{\alpha}(x) + \frac{1}{2}\,\omega_{\rho\tau}\left(\hat{\Sigma}^{\rho\tau}\right)^{\alpha}_{.\beta}\,\phi^{\beta} \tag{B.103}$$

dove abbiamo posto[363]

$$\hat{J}^{\rho\tau} \;\equiv\; -i\,J^{\rho\tau} \quad \Rightarrow \quad \left(\hat{J}^{\rho\tau}\right)^{\mu}_{.\nu} = (\delta^{\rho\mu}\,\delta^{\tau}_{\nu} - \delta^{\tau\mu}\,\delta^{\rho}_{\nu}) \tag{B.104}$$
$$\hat{\Sigma}^{\rho\tau} \;\equiv\; -i\,\Sigma^{\rho\tau} \tag{B.105}$$

Nelle notazioni (B.70) e (B.71), le (B.102) e (B.103) implicano[364], evidentemente, che

$$(\Xi^{\rho\tau})^{\mu} = \left(\hat{J}^{\rho\tau}\right)^{\mu}_{.\nu}\, x^{\nu}; \qquad (\Gamma^{\rho\tau})_{\alpha\beta} = (\hat{\Sigma}^{\rho\tau})^{\alpha}_{.\beta} \tag{B.106}$$

[363]Per la rappresentazione $S = S(\Lambda)$ non abbiamo, a priori, niente di simile al tensore metrico per agire sugli indici. Comunque, per semplice similitudine con il caso quadrivettoriale, abbiamo posto per definizione

$$S(\Lambda)_{\alpha\beta} \equiv S(\Lambda)^{\alpha}_{.\beta} \;\Rightarrow\; (\hat{\Sigma})_{\alpha\beta} \equiv (\hat{\Sigma})^{\alpha}_{.\beta}$$

Gli indici α e β sono quindi, rispettivamente, gli indici di riga e di colonna e vanno da 1 ad n, dove n è il numero di componenti del campo.

[364]Si ricordi ancora una volta che $\omega_{\rho\tau}$ e dunque $\hat{J}^{\rho\tau}$ e $\hat{\Sigma}^{\rho\tau}$ sono entità antisimmetriche negli indici (ρ, τ), e dunque il fattore 1/2 serve semplicemente a compensare questo fatto ...

per cui, usando la (B.97), possiamo concludere che sono conservate le seguenti sei correnti

$$\left(\Theta^{\rho\tau}\right)^{\mu}(x) \quad = \quad -(\hat{\Sigma}^{\rho\tau})^{\alpha}_{.\beta}\,\phi^{\beta}(x)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi^{\alpha})} + T^{\mu}_{.\sigma}(x)\,\left(\hat{J}^{\rho\tau}\right)^{\sigma}_{.\nu}\,x^{\nu} \qquad \text{(B.107)}$$

ovvero, cambiando di segno, abbiamo infine

$$\begin{aligned}\left(\Theta^{\rho\tau}\right)^{\mu}(x) &= (\hat{\Sigma}^{\rho\tau})^{\alpha}_{.\beta}\,\phi^{\beta}(x)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi^{\alpha})} - T^{\mu}_{.\sigma}(x)\,[\delta^{\rho\sigma}\,\delta^{\tau}_{\nu} - \delta^{\tau\sigma}\,\delta^{\rho}_{\nu}]\,x^{\nu} = \\ &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi^{\alpha})}(\hat{\Sigma}^{\rho\tau})^{\alpha}_{.\beta}\,\phi^{\beta}(x) - T^{\mu\rho}(x)\,x^{\tau} + T^{\mu\tau}(x)\,x^{\rho} \qquad \text{(B.108)}\end{aligned}$$

Il teorema di Noëther, come sappiamo, assicura che le sei quantità seguenti

$$Q^{\rho\tau} = \int d^3x\,\left(\Theta^{\rho\tau}\right)^{0}(x)$$

sono conservate dalla dinamica.
Vediamo adesso quale è il loro significato fisico. Poniamo dunque

$$r^{\mu} \equiv (t,\vec{r}) = (t,x,y,z); \qquad P^{\mu}(x) \equiv (P^{0}(x),\vec{P}(x)) = \left(T^{00}(x),T^{01}(x),T^{02}(x),T^{03}(x)\right)$$

dove $P^{\mu}(x)$, per quanto detto sopra, rappresenta la densità di quadrimpulso.
Definiamo quindi

$$\begin{aligned}J_1(x) &\equiv \left(\Theta^{23}\right)^{0}(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{0}\phi^{\alpha})}(\hat{\Sigma}^{23})^{\alpha}_{.\beta}\,\phi^{\beta}(x) + T^{03}(x)\,y - T^{02}(x)\,x = \\ &= S_1 + \left(\vec{r}\times\vec{P}(x)\right)_1 \qquad \text{(B.109)}\\ J_2(x) &\equiv \left(\Theta^{31}\right)^{0}(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{0}\phi^{\alpha})}(\hat{\Sigma}^{31})^{\alpha}_{.\beta}\,\phi^{\beta}(x) + T^{01}(x)\,z - T^{03}(x)\,x = \\ &= S_2 + \left(\vec{r}\times\vec{P}(x)\right)_2 \qquad \text{(B.110)}\\ J_3(x) &\equiv \left(\Theta^{12}\right)^{0}(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{0}\phi^{\alpha})}(\hat{\Sigma}^{12})^{\alpha}_{.\beta}\,\phi^{\beta}(x) + T^{02}(x)\,x - T^{01}(x)\,y = \\ &= S_3 + \left(\vec{r}\times\vec{P}(x)\right)_3 \qquad \text{(B.111)}\end{aligned}$$

ovvero (le componenti $\vec{P}_k(x)$ stanno, nella formula che segue, per le densità delle componenti spaziali di $P^{\mu}(x) \equiv T^{0\mu}(x)$ ...)

$$J_i(x) \equiv \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\left(\Theta^{jk}\right)^{0}(x) = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{0}\phi^{\alpha})}(\hat{\Sigma}^{jk})^{\alpha}_{.\beta}\,\phi^{\beta}(x) + \vec{P}_k(x)\,r_j - \vec{P}_j(x)\,r_k\right\} \quad \text{(B.112)}$$

in cui riconosciamo la densità di momento angolare totale associato al campo, fatto sia dalla parte orbitale $\left(\vec{r}\times\vec{P}(x)\right)$ che da un termine di spin $\vec{S}$ del campo,

legato alle $\hat{\Sigma}$, cioè alla rappresentazione del gruppo delle rotazioni nello spazio delle componenti del campo stesso.
La conservazione della quantità integrale

$$\int d^3x \ J_i(x)$$

esprime dunque la conservazione del momento angolare totale (orbitale e di spin) come conseguenza dell'invarianza in forma della densità lagrangiana del sistema sotto il gruppo di Lorentz (e quindi sotto il gruppo delle rotazioni).

Le altre tre quantità conservate a causa dell'invarianza sotto il gruppo di Lorentz provengono dalle seguenti densità

$$K_1(x) \equiv \left(\Theta^{01}\right)^0(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi^\alpha)}(\hat{\Sigma}^{01})^\alpha_{.\beta}\,\phi^\beta(x) + T^{01}(x)\,t - T^{00}(x)\,x \tag{B.113}$$

$$K_2(x) \equiv \left(\Theta^{02}\right)^0(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi^\alpha)}(\hat{\Sigma}^{02})^\alpha_{.\beta}\,\phi^\beta(x) + T^{02}(x)\,t - T^{00}(x)\,y \tag{B.114}$$

$$K_3(x) \equiv \left(\Theta^{03}\right)^0(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi^\alpha)}(\hat{\Sigma}^{03})^\alpha_{.\beta}\,\phi^\beta(x) + T^{03}(x)\,t - T^{00}(x)\,z \tag{B.115}$$

i.e.

$$K_i(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi^\alpha)}(\hat{\Sigma}^{0i})^\alpha_{.\beta}\,\phi^\beta(x) + \vec{P}_i(x)\,t - P^0(x)\,\vec{r}_i \tag{B.116}$$

Se definiamo allora

$$\sigma_i(t) \equiv \int d^3x \ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi^\alpha)}(\hat{\Sigma}^{0i})^\alpha_{.\beta}\,\phi^\beta(x) \tag{B.117}$$

$$\vec{P}_i(t) \equiv \int d^3x \ \vec{P}_i(x) \tag{B.118}$$

$$\bar{r}_i \equiv \frac{\int d^3x \ P^0(x)\,\vec{r}_i}{\int d^3x \ P^0(x)} \quad \Rightarrow \quad \int d^3x \ P^0(x)\,\vec{r}_i = \bar{r}_i(t)\,P^0(t) \tag{B.119}$$

ecco che, da quanto sopra, segue che, qualunque sia $i = 1, 2, 3$, la somma delle tre quantità

$$\mathcal{B}_i \equiv \sigma_i(t) + t\,\vec{P}_i(t) - \bar{r}_i(t)\,P^0(t) \tag{B.120}$$

è indipendente dal tempo e dunque le tre $\mathcal{B}_i$ sono separatamente costanti del moto.
Nel caso particolare di un campo scalare, per il quale il termine σ_i è assente essendo nulle le $\hat{\Sigma}$, abbiamo che

$$\mathcal{B}_i = t\,\vec{P}_i(t) - \bar{r}_i(t)\,P^0(t) \tag{B.121}$$

la quale, quando ci sia anche invarianza per traslazioni spazio-temporali e quindi $\vec{P}$ e P^0 siano anch'esse costanti del moto, finisce per esprimere semplicemente la costanza della velocità del moto del centro di massa del sistema dei campi considerato.

- **Il campo elettromagnetico libero**

Vediamo adesso, nel caso del campo elettromagnetico (libero), la forma assunta dalle correnti conservate legate all'invarianza in forma sotto il gruppo di Poincaré della densità lagrangiana che descrive la dinamica del campo stesso. Poniamoci nel sistema di unità di misura di Gauss, nel quale la densità lagrangiana del campo elettromagnetico da cui partiremo assume la forma seguente[365]

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{16\pi}\, F_{\mu\nu}(x)\, F^{\mu\nu}(x) \tag{B.122}$$

invariante in forma, evidentemente, sia per traslazioni spazio-temporali che per trasformazioni di Lorentz.

Dall'invarianza per traslazioni spazio-temporali, secondo la (B.92) e la (B.94), ne discende la conservazioni di quattro correnti legate al tensore degli sforzi nel modo seguente

$$\partial^\mu T_{\mu\nu}(x) = 0; \qquad T_{\mu\nu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu A^\alpha)}\, \partial_\nu A^\alpha - \delta_{\mu\nu}\mathcal{L} \tag{B.123}$$

il cui significato fisico, come noto, è che le quattro quantità conservate

$$P_\nu \equiv \int d^3x\; T_{0\nu}(x) \tag{B.124}$$

costituiscono il quadrimpulso (componenti covarianti) associato al campo elettromagnetico.
Quanto alla sua forma esplicita, abbiamo che, essendo

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\rho A^\alpha)} &= \frac{\partial}{\partial(\partial^\rho A^\alpha)}\left[-\frac{1}{16\pi}\,(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)\,(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)\right] = \\ &= -\frac{1}{16\pi}\; 4F_{\rho\alpha} = -\frac{1}{4\pi}\; F_{\rho\alpha} \end{aligned} \tag{B.125}$$

risulta evidentemente che

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi}\; F_{\mu\alpha}\; \partial_\nu A^\alpha - \delta_{\mu\nu}\mathcal{L} \tag{B.126}$$

Ma

$$\begin{aligned} F_{\mu\alpha}\; \partial_\nu A^\alpha &= F_{\mu\alpha}\,(\partial_\nu A^\alpha - \partial^\alpha A_\nu) + F_{\mu\alpha}\,\partial^\alpha A_\nu = \\ &= F_{\mu\alpha}\, F_{\nu}^{\cdot\,\alpha} + \partial^\alpha\,(F_{\mu\alpha}\, A_\nu) - (\partial^\alpha F_{\mu\alpha})\, A_\nu \end{aligned} \tag{B.127}$$

[365]Come abbiamo già osservato, questa densità lagrangiana non è comunque sufficiente a definire completamente le equazioni di moto: occorre imporre separatamente sia la condizione di Lorentz ($\partial_\mu A^\mu = 0$) che quella di arbitrarietà di gauge ($A^\mu \to A^\mu + \partial^\mu\Gamma$ con $\Box\Gamma = 0$).

D'altronde, usando sia le equazioni di moto ($i.e.\, \Box A^\mu = 0$) che la condizione di Lorentz ($i.e.\, \partial^\mu A_\mu = 0$), risulta

$$\partial^\alpha F_{\mu\alpha} = \partial^\alpha \left(\partial_\mu A_\alpha - \partial_\alpha A_\mu\right) = \partial_\mu \partial^\alpha A_\alpha - \Box A_\mu = 0 \tag{B.128}$$

quindi abbiamo infine che

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi} \left\{F_{\mu\alpha}\, F_\nu^{\cdot\,\alpha} + \partial^\alpha \left(F_{\mu\alpha}\, A_\nu\right) + 4\pi\, \delta_{\mu\nu} \mathcal{L}\right\} \tag{B.129}$$

Osserviamo che il tensore degli sforzi $T_{\mu\nu}$ di cui alla (B.129) *non* è simmetrico a causa della presenza del termine tensoriale $\Pi_{\mu\nu}$ definito come

$$\Pi_{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi}\, \partial^\alpha \left(F_{\mu\alpha}\, A_\nu\right) \tag{B.130}$$

Questo termine ha le seguenti caratteristiche

- non è gauge-invariante (nessuna meraviglia: la condizione di invarianza di gauge, come sappiamo, deve essere imposta "ad hoc" e non è una conseguenza delle equazioni di moto determinate dalla densità lagrangiana);
- soddisfa esso stesso la condizione di conservazione $\partial^\mu\, \Pi_{\mu\nu} = 0$, come è ovvio dal fatto che
$$\partial^\mu\, \Pi_{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi}\, \partial^\mu \partial^\alpha \left(F_{\mu\alpha}\, A_\nu\right)$$
ed il tensore di Maxwell $F_{\mu\alpha}$ è antisimmetrico;
- il contributo al quadrimpulso P_ν ci cui alla (B.124) proveniente da questo termine è comunque nullo, infatti
$$\int d^3x\; \Pi_{0\nu}(x) = -\frac{1}{4\pi} \int d^3x\, \partial^\alpha \left(F_{0\alpha}\, A_\nu\right) = -\frac{1}{4\pi} \int d^3x\, \partial^i \left(F_{0i}\, A_\nu\right) \equiv 0 \tag{B.131}$$
dove abbiamo usato il fatto che $F_{00} = 0$ e che l'integrando $\partial^i \left(F_{0i}\, A_\nu\right)$ è una divergenza per cui il suo integrale è nullo per via del teorema di Gauss, almeno se i campi si annullano propriamente all'infinito.

Possiamo quindi, limitatamente al calcolo del quadriimpulso del campo, usare, al posto del tensore $T_{\mu\nu}$ di cui alla (B.129), il tensore simmetrico $\hat{T}_{\mu\nu}$ così definito

$$\hat{T}_{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi} \left\{F_{\mu\alpha}\, F_\nu^{\cdot\,\alpha} + 4\pi\, \delta_{\mu\nu} \mathcal{L}\right\} \tag{B.132}$$

Vediamone la forma esplicita.

Iniziamo ricordando che, in termini del campo elettrico $\vec{E}$ e del campo magnetico $\vec{B}$, abbiamo

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{B.133}$$

per cui ne segue che

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) = -\frac{1}{16\pi}\left(-2E^2 + 2B^2\right) = \frac{1}{8\pi}\left(E^2 - B^2\right) \tag{B.134}$$

mentre risulta

$$\begin{aligned} F_{\mu\alpha} F_{\nu}^{\cdot\,\alpha} &= F_{\mu\alpha} F_{\nu\rho}\,\delta^{\rho\alpha} = F_{\mu}^{\cdot\,\rho} F_{\nu\rho} = -F_{\mu}^{\cdot\,\rho} F_{\rho\nu} = \\ &= -\begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ -E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ -E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= -\begin{pmatrix} E_1^2 + E_2^2 + E_3^2 & E_3B_2 - E_2B_3 & E_1B_3 - E_3B_1 & E_2B_1 - E_1B_2 \\ E_3B_2 - E_2B_3 & -E_1^2 + B_2^2 + B_3^2 & -E_1E_2 - B_1B_2 & -E_1E_3 - B_1B_3 \\ E_1B_3 - E_3B_1 & -E_1E_2 - B_1B_2 & B_1^2 - E_2^2 + B_3^2 & -E_2E_3 - B_2B_3 \\ E_2B_1 - E_1B_2 & -E_1E_3 - B_1B_3 & -E_2E_3 - B_2B_3 & B_1^2 + B_2^2 - E_3^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

per cui abbiamo

$$\begin{aligned} \hat{T}_{00} &= -\frac{1}{4\pi}\left(F_{0\alpha}F_0^{\cdot\,\alpha} + 4\pi\mathcal{L}\right) = -\frac{1}{4\pi}\left(-E^2 + \frac{E^2 - B^2}{2}\right) = \frac{1}{8\pi}\left(E^2 + B^2\right) && \text{(B.135)} \\ \hat{T}_{01} &= -\frac{1}{4\pi}\left[F_{0\alpha}F_1^{\cdot\,\alpha}\right] = -\frac{1}{4\pi}\left[-\left(E_3B_2 - E_2B_3\right)\right] = -\frac{1}{4\pi}\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)_1 && \text{(B.136)} \\ \hat{T}_{02} &= -\frac{1}{4\pi}\left[F_{0\alpha}F_2^{\cdot\,\alpha}\right] = -\frac{1}{4\pi}\left[-\left(E_1B_3 - E_3B_1\right)\right] = -\frac{1}{4\pi}\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)_2 && \text{(B.137)} \\ \hat{T}_{01} &= -\frac{1}{4\pi}\left[F_{0\alpha}F_1^{\cdot\,\alpha}\right] = -\frac{1}{4\pi}\left[-\left(E_2B_1 - E_1B_2\right)\right] = -\frac{1}{4\pi}\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)_3 && \text{(B.138)} \end{aligned}$$

ovvero, passando alle componenti controvarianti P^ν del quadriimpulso conservato, ritroviamo il risultato ben noto dalla teoria di Maxwell, secondo cui

$$P^\nu \equiv \frac{1}{4\pi}\int d^3x \left(\frac{E^2 + B^2}{2}, \vec{E}\times\vec{B}\right) = \int d^3x\, T^{0\nu}(x) = \int d^3x\, T_0^{\cdot\,\nu}(x) = \int d^3x\, \hat{T}_0^{\cdot\,\nu}(x) \tag{B.139}$$

Veniamo adesso alle quantità conservate in conseguenza dell'invarianza sotto il gruppo di Lorentz (ortocrono proprio) ed iniziamo dal momento angolare.
Poiché la trasformazione che lascia invariante in forma la densità lagrangiana (B.122) è, evidentemente, la seguente

$$x \rightarrow x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{.\nu}\, x^{\nu} \tag{B.140}$$
$$A^{\alpha}(x) \rightarrow A'^{\alpha}(x') = \Lambda^{\alpha}_{.\beta}\, A^{\beta}(x) \tag{B.141}$$

ovvero, in termini di trasformazioni infinitesime, abbiamo

$$x \rightarrow x'^{\mu} = x^{\mu} + \frac{1}{2}\,\omega_{\rho\tau}\left(\hat{J}^{\rho\tau}\right)^{\mu}_{.\nu}\, x^{\nu} \tag{B.142}$$
$$\phi^{\alpha}(x) \rightarrow \psi^{\alpha}(x') = \phi^{\alpha}(x) + \frac{1}{2}\,\omega_{\rho\tau}\left(\hat{\Sigma}^{\rho\tau}\right)^{\alpha}_{.\beta}\,\phi^{\beta} \tag{B.143}$$

dove, ricordando la (B.104), risulta

$$\left(\hat{J}^{\rho\tau}\right)^{\mu}_{.\nu} = \left(\hat{\Sigma}^{\rho\tau}\right)^{\mu}_{.\nu} = \left(\delta^{\rho\mu}\,\delta^{\tau}_{\nu} - \delta^{\tau\mu}\,\delta^{\rho}_{\nu}\right) \tag{B.144}$$

Quanto alla densità di momento angolare, per la (B.112), essa è evidentemente data dall'espressione

$$\begin{aligned}
J_i(x) &= \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A^{\alpha})}(\hat{\Sigma}^{jk})^{\alpha}_{.\beta}\, A^{\beta}(x) + T^{0k}(x)\, r_j - T^{0j}(x)\, r_k\right\} = \\
&= \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\left\{-\frac{1}{4\pi}F^{0}_{.\alpha}\left(\delta^{j\alpha}\delta^{k}_{\beta} - \delta^{k\alpha}\delta^{j}_{\beta}\right)A^{\beta} + T^{0k}(x)\, r_j - T^{0j}(x)\, r_k\right\} = \\
&= \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\left\{-\frac{1}{4\pi}\left(F^{0j}A^{k} - F^{0k}A^{j}\right) + T^{0k}(x)\, r_j - T^{0j}(x)\, r_k\right\} = \\
&= \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\left\{-\frac{1}{4\pi}\left(-E^{j}A^{k} + E^{k}A^{j}\right) + r_j\, T^{0k}(x) - r_k\, T^{0j}(x)\right\} = \\
&= \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\left\{\frac{1}{4\pi}\left(E^{j}A^{k} - E^{k}A^{j}\right) + r_j\, T^{0k}(x) - r_k\, T^{0j}(x)\right\}
\end{aligned} \tag{B.145}$$

Si osservi che, nell'espressione precedente, è di nuovo presente un termine lineare nei potenziali e dunque a priori non manifestamente gauge-invariante.
Inoltre, per come si arriva all'espressione precedente via il teorema di Noëther, le densità di quadriimpulso $T^{0i}(x)$ sono quelle relative all'espressione completa (B.129) e non a quella simmetrizzata (B.132).

Ma, sempre per le relazioni (B.129), (B.130) e (B.132), risulta che

$$T^{\mu\nu}(x) = \hat{T}^{\mu\nu}(x) + \Pi^{\mu\nu}(x) \qquad con \qquad \Pi^{\mu\nu}(x) \equiv -\frac{1}{4\pi}\partial_{\alpha}\left(F^{\mu\alpha}\, A^{\nu}\right) \tag{B.146}$$

dunque

$$r_j\, T^{0k}(x) - r_k\, T^{0j}(x) = r_j\, \hat{T}^{0k}(x) - r_k\, \hat{T}^{0j}(x) + r_j\, \Pi^{0k}(x) - r_k\, \Pi^{0j}(x) \tag{B.147}$$

ma, ricordando che il tensore di Maxwell $F^{\mu\nu}$ è antisimmetrico e che $F^{0i} = -E^i$, abbiamo che

$$\begin{aligned}
&-4\pi\left[r_j\,\Pi^{0k}(x) - r_k\,\Pi^{0j}(x)\right] = r_j\,\partial_\alpha\left(F^{0\alpha}A^k\right) - r_k\,\partial_\alpha\left(F^{0\alpha}A^j\right) = \\
&= r_j\,\partial_i\left(F^{0i}A^k\right) - r_k\,\partial_i\left(F^{0i}A^j\right) = \partial_i\left(r_jF^{0i}A^k - r_kF^{0i}A^j\right) - \left(\delta^i_jF^{0i}A^k - \delta^k_iF^{0i}A^j\right) = \\
&= \partial_i\left(r_jF^{0i}A^k - r_kF^{0i}A^j\right) - \left(-E^jA^k + E^kA^j\right) = \\
&= \partial_i\left(r_jF^{0i}A^k - r_kF^{0i}A^j\right) + \left(E^jA^k - E^kA^j\right)
\end{aligned} \tag{B.148}$$

ovvero risulta

$$r_j\,\Pi^{0k}(x) - r_k\,\Pi^{0j}(x) = -\frac{1}{4\pi}\left[E^jA^k - E^kA^j\right] - \frac{1}{4\pi}\partial_l\left[r_jF^{0l}A^k - r_kF^{0l}A^j\right] \tag{B.149}$$

Tornando adesso alla densità di momento angolare (B.145), si ha

$$\begin{aligned}
J_i(x) &= \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\left\{\frac{1}{4\pi}\left(E^jA^k - E^kA^j\right) + r_j\,T^{0k}(x) - r_k\,T^{0j}(x)\right\} = \\
&= \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\left\{\frac{1}{4\pi}\left(E^jA^k - E^kA^j\right) + r_j\,\hat{T}^{0k}(x) - r_k\,\hat{T}^{0j}(x) + \left[r_j\,\Pi^{0k}(x) - r_k\,\Pi^{0j}(x)\right]\right\} = \\
&= \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\left\{\frac{1}{4\pi}\left(E^jA^k - E^kA^j\right) + r_j\,\hat{T}^{0k}(x) - r_k\,\hat{T}^{0j}(x) - \frac{1}{4\pi}\left[E^jA^k - E^kA^j\right]\right. \\
&\left.-\frac{1}{4\pi}\partial_l\left[r_jF^{0l}A^k - r_kF^{0l}A^j\right]\right\} = \\
&= \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\left\{r_j\,\hat{T}^{0k}(x) - r_k\,\hat{T}^{0j}(x) - \frac{1}{4\pi}\partial_l\left[r_jF^{0l}A^k - r_kF^{0l}A^j\right]\right\}
\end{aligned} \tag{B.150}$$

Di nuovo, questa densità è fatta di due parti di cui la seconda è una pura divergenza che, se i campi di annullano propriamente all'infinito, non darà contributo all'integrale esteso a tutto lo spazio. Possiamo quindi, ai fini del calcolo del momento angolare complessivo, cioè della quantità che è conservata in virtù dell'invarianza per rotazioni, effettuare la sostituzione seguente

$$\begin{aligned}
J_i(x) &= \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\left\{r_j\,\hat{T}^{0k}(x) - r_k\,\hat{T}^{0j}(x) - \frac{1}{4\pi}\partial_l\left[r_jF^{0l}A^k - r_kF^{0l}A^j\right]\right\} \;\rightarrow \\
\rightarrow \quad & \hat{J}_i(x) = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\left\{r_j\,\hat{T}^{0k}(x) - r_k\,\hat{T}^{0j}(x)\right\}
\end{aligned} \tag{B.151}$$

e ritroviamo così, anche per questa strada, l'espressione canonica del momento angolare del campo elettromagnetico, costruito nel modo consueto attraverso il solo contributo del tensore degli sforzi simmetrico $\hat{T}$.

Veniamo adesso alle altre tre "correnti" conservate legate all'invarianza in forma della densità lagrangiana del campo elettromagnetico per trasformazioni di Lorentz, e precisamente quelle legate ai boost. Le tre densità (B.116) il cui integrale esteso su tutto lo spazio risulta essere una costante del moto, sono

$$K_i(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A^\alpha)} (\hat{\Sigma}^{0i})^\alpha_{.\beta}\, A^\beta(x) + T^{0i}(x)\, t - T^{00}(x)\, \vec{r}_i \tag{B.152}$$

ovvero

$$\begin{aligned} K_i(x) &= -\frac{1}{4\pi} F^0_{.\alpha}(x) \left(\delta^{0\alpha}\delta^i_\beta - \delta^0_\beta \delta^{i\alpha}\right) A^\beta(x) + T^{0i}(x)\, t - T^{00}(x)\, \vec{r}_i = \\ &= -\frac{1}{4\pi}\left(F^{00}(x)A^i(x) - F^{0i}(x)A^0(x)\right) + T^{0i}(x)\, t - T^{00}(x)\, \vec{r}_i = \\ &= \frac{1}{4\pi} F^{0i}(x)A^0 + \hat{T}^{0i}(x)\, t - \hat{T}^{00}(x)\, \vec{r}_i + \Pi^{0i}(x)\, t - \Pi^{00}(x)\, \vec{r}_i \end{aligned} \tag{B.153}$$

ma

$$\begin{aligned} &-4\pi \left[t\, \Pi^{0i}(x) - r_i\, \Pi^{00}(x)\right] = t\, \partial_\alpha \left(F^{0\alpha} A^i\right) - r_i\, \partial_\alpha\left(F^{0\alpha}A^0\right) = \\ &= t\, \partial_j \left(F^{0j}A^i\right) - r_i\, \partial_j \left(F^{0j}A^0\right) = \partial_j\left(tF^{0j}A^i - r_i F^{0j}A^0\right) + \delta^i_j F^{0j} A^0 \end{aligned} \tag{B.154}$$

e dunque

$$\begin{aligned} K_i(x) &= \frac{1}{4\pi}F^{0i}(x)A^0 + \hat{T}^{0i}(x)\, t - \hat{T}^{00}(x)\, \vec{r}_i + \Pi^{0i}(x)\, t - \Pi^{00}(x)\, \vec{r}_i = \\ &= \frac{1}{4\pi}F^{0i}A^0 + \hat{T}^{0i}(x)\, t - \hat{T}^{00}(x)\, \vec{r}_i - \frac{1}{4\pi}\partial_j\left(tF^{0j}A^i - r_iF^{0j}A^0\right) - \frac{1}{4\pi}F^{0i}A^0 = \\ &= \hat{T}^{0i}(x)\, t - \hat{T}^{00}(x)\, \vec{r}_i - \frac{1}{4\pi}\partial_j\left(tF^{0j}A^i - r_iF^{0j}A^0\right) \end{aligned} \tag{B.155}$$

Di nuovo abbiamo che uno dei due contributi è una pura divergenza, per cui, sulla base degli argomenti già considerati a proposito del momento angolare, ai fini del calcolo delle costanti del moto, possiamo di nuovo operare la sostituzione

$$\begin{aligned} K_i(x) &= \hat{T}^{0i}(x)\, t - \hat{T}^{00}(x)\, \vec{r}_i - \frac{1}{4\pi}\partial_j\left(tF^{0j}A^i - r_iF^{0j}A^0\right) \;\rightarrow \\ &\rightarrow\; \hat{K}_i(x) = \hat{T}^{0i}(x)\, t - \hat{T}^{00}(x)\, \vec{r}_i \end{aligned} \tag{B.156}$$

da cui, definendo al solito il baricentro dell'energia elettromagnetica come

$$\bar{r}_i \equiv \frac{\int d^3x\ \hat{T}^{00}(x)\, \vec{r}_i}{\int d^3x\ \hat{T}^{00}(x)} \quad \Rightarrow \quad \int d^3x\ \hat{T}^{00}(x)\, \vec{r}_i = \bar{r}_i(t)\, P^0 \tag{B.157}$$

si ricava che possiamo scrivere le costanti del moto $\mathcal{B}_i$, definite a partire dalle densità $\hat{K}_i(x)$ integrate in tutto lo spazio, in termini delle componenti conservate dell'impulso spaziale $\vec{P}_i$ e dell'energia P^0, ottenendo

$$\mathcal{B}_i \equiv \int d^3x\ \hat{K}_i(x) = t\, \vec{P}_i - \bar{r}_i\, P^0 \quad \Rightarrow \quad v_i \equiv \frac{d\bar{r}_i}{dt} = \frac{\vec{P}_i}{P^0} \tag{B.158}$$

i.e. otteniamo per questa strada la costanza della velocità di spostamento del baricentro dell'energia elettromagnetica.

B.4.2 *L'invarianza di gauge di prima specie*

Un'invarianza che si incontra spesso in Meccanica Quantistica è l'invarianza per trasformazione di fase della funzione d'onda, i.e.

$$\psi(x) \to e^{i\alpha}\,\psi(x); \qquad \psi^*(x) \to e^{-i\alpha}\,\psi^*(x) \tag{B.159}$$

Nel linguaggio lagrangiano, questo corrisponde evidentemente a dire che la densità lagrangiana $\mathcal{L}$ da cui sono poi ricavate le equazioni del moto, è invariante in forma sotto le trasformazioni precedenti, le quali costituiscono, evidentemente, un gruppo di Lie abeliano ad una dimensione.
Consideriamo allora una trasformazione di fase infinitesima: nel linguaggio generale della (B.70), sviluppato per dimostrare il teorema di Noëther, i.e.

$$x \to x' \;:\; x'^\mu = x^\mu \,+\, \Xi^\mu_a(x)\, d\omega_a \,\equiv\, x^\mu \,+\, \delta x^\mu \tag{B.160}$$

$$\phi^\alpha(x) \to \psi^\alpha(x') \;:\; \psi^\alpha(x') \,=\, (\delta^\alpha_\beta \,+\, \Gamma^\alpha_{a\beta}\, d\omega_a)\, \phi^\beta(x) \tag{B.161}$$

questo significa, evidentemente[366]

$$\begin{array}{ccccccc} x'^\mu & \to & x^\mu & & \Xi^\mu = 0 & ; & \\ \psi & \to & \psi + i\alpha\,\psi & \Rightarrow & \Gamma^1_1 = i & ; & \Gamma^1_2 = 0 \\ \psi^* & \to & \psi^* - i\alpha\,\psi^* & & \Gamma^2_1 = 0 & ; & \Gamma^2_2 = -i \end{array} \tag{B.162}$$

per cui, sostituendo nella espressione generale della corrente conservata di cui alla (B.81), riscritta nel caso particolare in cui il gruppo di simmetria sia ad un solo parametro,

$$\Theta^\mu_a(x) \;\to\; J^\mu(x) \equiv \left[-\Gamma^\alpha_\beta\, \phi^\beta(x) \,+\, \partial_\mu\phi^\alpha(x)\, \Xi^\mu\right] \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^\alpha)} - \mathcal{L}\,\Xi^\mu \tag{B.163}$$

otteniamo infine

$$J^\mu(x) = i\left[-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\,\psi + \psi^*\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi^*)}\right] \tag{B.164}$$

che, per quanto precede, è quindi una quadricorrente[367] conservata dalla dinamica.
Il fatto che la corrente (B.164) sia conservata, implica, come sappiamo, che

$$\partial_0 \int d^3x\, J^0(\vec{x},t) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad Q \equiv \int d^3x\, J^0(\vec{x},t) = cost \tag{B.165}$$

[366] Per semplicità ed uniformità di notazioni assumiamo qui che l'indice con cui sono labellati i campi assuma i valori 1 e 2, e risulti $\phi^1 \equiv \phi$; $\phi^2 \equiv \phi^*$. Inoltre, essendo il gruppo di trasformazioni ad un solo parametro, omettiamo l'indice a.

[367] Si noti che, così come la densità lagrangiana è determinata a meno di una costante moltiplicativa, anche la quadricorrente, omogenea nella lagrangiana, è anch'essa determinata a meno di un fattore di scala arbitrario.

La quantità Q definita dalla (B.165) è, in generale, proporzionale, come vedremo, al numero di particelle descritte dal campo, che, nello schema di prima quantizzazione della MQ, sostanzialmente coincide con la norma stessa della funzione d'onda.

- **Equazione di Schrödinger**

  Abbiamo visto come la densità lagrangiana da cui si deriva l'equazione di Schrödinger, sia

$$\mathcal{L} = \frac{i\hbar}{2}(\psi^*\partial_0\psi - \psi\partial_0\psi^*) + \frac{\hbar^2}{2m}(\partial_i\psi^*)(\partial^i\psi) - \psi^* V\psi \tag{B.166}$$

  Palesemente essa è invariante in forma sotto la trasformazione di fase (B.162): la corrente conservata che ne discende secondo la (B.164) risulta allora data da

$$J^\mu = i\left[-\phi\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} + \phi^*\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^*)}\right] \tag{B.167}$$

  da cui segue che

$$J^0 = i\left[-\phi\left(\frac{i\hbar}{2}\phi^*\right) + \phi^*\left(-\frac{i\hbar}{2}\phi\right)\right] = \hbar\,\phi\,\phi^* \tag{B.168}$$

$$\begin{aligned} J^i &= i\left[-\phi\left(\frac{\hbar^2}{2m}\partial^i\phi^*\right) + \phi^*\left(\frac{\hbar^2}{2m}\partial^i\phi\right)\right] \\ &= -i\frac{\hbar^2}{2m}\left[\phi(\partial^i\phi^*) - \phi^*(\partial^i\phi)\right] = \hbar\left[\frac{i\hbar}{2m}\left(\phi\vec{\nabla}\phi^* - \phi^*\vec{\nabla}\phi\right)\right] \end{aligned} \tag{B.169}$$

  dove abbiamo usato il fatto che

$$\vec{\nabla}_i \equiv \frac{\partial}{\partial x^i} \equiv \partial_i \equiv -\partial^i$$

  Dunque, la quadricorrente conservata[368] è

$$J^\mu \equiv (J^0, J^i) \equiv \hbar\left(|\phi|^2, \frac{i\hbar}{2m}\phi\bar{\nabla}\phi^*\right) \tag{B.171}$$

  A parte il fattore globale $\hbar$, dunque, ne risulta che la parte temporale della quadricorrente J^0 altri non è che la densità di probabilità $|\phi|^2$, per cui la

[368] Per motivi di maggior concisione, introduciamo qui il simbolo

$$\bar{\nabla}: \quad f\bar{\nabla}g \equiv f(\vec{\nabla}g) - (\vec{\nabla}f)g \tag{B.170}$$

parte spaziale $J^i = \frac{i\hbar}{2m}\phi\bar{\nabla}\phi^*$ necessariamente individua la densità di corrente di probabilità.
Ricordiamo infine, prima di concludere l'argomento, che in prima quantizzazione, la conservazione della probabilità significa semplicemente la conservazione dell'esistenza della particella descritta dalla funzione d'onda ϕ, non essendo permesso alcun meccanismo di creazione e distruzione della stessa.

- **Campo scalare carico**

  Nel caso del campo scalare carico, abbiamo visto che una densità lagrangiana che ne descrive la dinamica è

$$\mathcal{L} \;=\; (\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi^*) \;-\; m^2\,\phi\,\phi^* \tag{B.172}$$

  Chiaramente anche questa densità lagrangiana è invariante in forma per trasformazioni di fase (B.162) ed è immediato dimostrare che la corrente conservata (B.164) che ne risulta è la seguente

$$J^\mu = i\,[-(\partial^\mu\phi^*)\,\phi + \phi^*(\partial^\mu\phi)] \equiv i\phi^*\bar{\partial}^\mu\phi \tag{B.173}$$

  per cui risulta

$$J^0 = i\left(\phi^*\frac{\partial\phi}{\partial t} - \frac{\partial\phi^*}{\partial t}\,\phi\right) \tag{B.174}$$

  la quale è definita positiva soltanto se nello sviluppo di Fourier della funzione ϕ compaiono solo frequenze positive, i.e. andamenti temporali del tipo e^{-iEt} con $E > 0$.

- **Campo di Dirac**

  Nel caso del campo di Dirac, abbiamo visto che una densità lagrangiana che possiamo utilizzare per descriverne la dinamica è

$$\mathcal{L} \;=\; \frac{i}{2}\,[\overline{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu\psi) \;-\; (\partial_\mu\overline{\psi})\gamma^\mu\psi] \;-\; m\,\overline{\psi}\psi \tag{B.175}$$

  Di nuovo, essendo $\bar{\psi} \equiv (\psi^*)^t\,\gamma^0$, essa è evidentemente invariante in forma sotto la trasformazione di fase (B.162).
  La corrente conservata che ne discende in base alla (B.164) è

$$\begin{aligned} J^\mu &= \frac{i}{2}\left[-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\psi + \bar{\psi}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})}\right] \\ &= \frac{i}{2}\left[-i\bar{\psi}\gamma^\mu\psi - i\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\right] = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \end{aligned} \tag{B.176}$$

  Quanto poi alla componente temporale della quadricorrente, essa risulta evidentemente pari a

$$J^0 = \bar{\psi}\gamma^0\psi = \psi^\dagger\psi \tag{B.177}$$

C Appendix: L'effetto Cerenkov

C.1 *La teoria classica*

Come sappiamo dalla Fisica Generale, le equazioni di Maxwell in un mezzo materiale si scrivono nel modo seguente (sistema *c.g.s. es*)

$$\begin{array}{rclcrcl} div\,\vec{D} & = & 4\pi\,\rho & \qquad & div\,\vec{B} & = & 0 \\ rot\,\vec{E} & = & -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \qquad & rot\,\vec{H} & = & \frac{4\pi}{c}\,\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array} \tag{C.1}$$

dove il vettore $\vec{D}$ ed il vettore $\vec{H}$ sono definiti dalle relazioni

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\,\vec{P}, \qquad\qquad \vec{H} = \vec{B} - 4\pi\,\vec{M} \tag{C.2}$$

essendo $\vec{P}$ e $\vec{M}$, rispettivamente, le densità di polarizzazione elettrica e magnetica.
D'altronde, in un mezzo omogeneo e isotropo e per campi deboli (i.e., per i quali le polarizzazioni elettrica e magnetica risultano lineari nei campi) si ha

$$\vec{D} = \epsilon\,\vec{E}, \qquad\qquad \vec{B} = \mu\,\vec{H} \tag{C.3}$$

dove ϵ è la costante dielettrica (relativa) del mezzo considerato e μ la sua permeabilità magnetica (relativa).
Partendo ora dall'equazione omogenea (la stessa che in vuoto...)

$$div\,\vec{B} = 0$$

possiamo concludere, come sappiamo, che esisterà un opportuno campo vettoriale $\vec{A}$ (potenziale vettore), definito a meno del gradiente di una qualsiasi funzione scalare delle coordinate e del tempo, tale che

$$\vec{B} = rot\,\vec{A} \tag{C.4}$$

Sostituendo allora nell'altra equazione omogenea (anch'essa non mutata rispetto al vuoto...), si ottiene

$$rot\,\vec{E} \;=\; -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \Rightarrow \qquad rot\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\,\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = 0 \tag{C.5}$$

e quindi, come nel caso del vuoto, ne segue che esisterà una opportuna funzione scalare Φ (potenziale scalare), definita a meno di una qualsiasi funzione del tempo, tale che

$$\vec{E} + \frac{1}{c}\,\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -grad\,\Phi \equiv -\vec{\nabla}\,\Phi \tag{C.6}$$

Sostituendo nell'equazione relativa alla divergenza di $\vec{D}$, per un mezzo omogeneo (tale quindi che ϵ non dipenda dalle coordinate) e isotropo, otteniamo

$$4\pi\,\rho = div(\epsilon\,\vec{E}) = \epsilon\,div\,\vec{E} = \epsilon\,div\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\,\Phi\right) \tag{C.7}$$

ovvero[369]

$$-\epsilon\,\nabla^2\,\Phi - \frac{\epsilon}{c}\frac{\partial\,div\,\vec{A}}{\partial t} = 4\pi\,\rho \tag{C.8}$$

Siccome il potenziale vettore $\vec{A}$ è definito a meno di un gradiente, possiamo fissare la *gauge* generalizzando quella di Lorentz e imponendo adesso quindi che

$$div\,\vec{A} + \frac{\epsilon\mu}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t} \equiv div\,\vec{A} + \frac{n^2}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0 \tag{C.9}$$

dove n è l'indice di rifrazione del mezzo in cui il campo elettromagnetico si sta propagando, definito attraverso la consueta relazione

$$n \equiv \sqrt{\epsilon\,\mu} \tag{C.10}$$

In questa gauge, l'equazione (C.8) diviene infine

$$-\epsilon\,\nabla^2\,\Phi - \frac{\epsilon}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{n^2}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right) = 4\pi\,\rho \;\Rightarrow\; \epsilon\left[\nabla^2\Phi - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}\right] = -4\pi\,\rho \tag{C.11}$$

Analogamente, partendo dall'equazione non omogena relativa alla rotazione di H, sempre nell'ipotesi di un mezzo omogeneo e isotropo e quindi che μ non dipenda dalle coordinate, abbiamo

$$\begin{aligned} rot\,\vec{H} &= \frac{4\pi}{c}\,\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad rot\left(\frac{\vec{B}}{\mu}\right) = \frac{4\pi}{c}\,\vec{J} + \frac{\epsilon}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \\ &\Rightarrow \quad rot\left(rot\,\vec{A}\right) = \frac{4\pi\,\mu}{c}\,\vec{J} + \frac{n^2}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\vec{\nabla}\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) \end{aligned} \tag{C.12}$$

e, poiché per un qualunque campo vettoriale vale l'identità

$$rot\left(rot\,\vec{A}\right) \equiv -\nabla^2\vec{A} + grad\,div\,\vec{A} \tag{C.13}$$

ecco che risulta (se ϵ e μ non dipendono dalle coordinate, questo, evidentemente, vale anche per n ...)

$$\begin{aligned} -\nabla^2\vec{A} + grad\,div\,\vec{A} &= \frac{4\pi\,\mu}{c}\,\vec{J} - \frac{n^2}{c}\,\vec{\nabla}\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} \\ \Rightarrow\; \nabla^2\vec{A} - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi\,\mu}{c}\,\vec{J} + \vec{\nabla}\left(div\,\vec{A} + \frac{n^2}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right) \end{aligned} \tag{C.14}$$

[369]Le derivate parziali rispetto al tempo ed alle coordinate spaziali, ovviamente, commutano fra loro ...

ovvero, data la gauge (C.9), si ha

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\,\mu}{c}\,\vec{J} \tag{C.15}$$

Concludendo quindi, le equazioni di Maxwell per i potenziali in un mezzo materiale omogeneo ed isotropo, nella gauge di Lorentz (C.9), sono le seguenti

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{\epsilon}\,\rho & \text{(C.16)}\\ \nabla^2 \vec{A} - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi\,\mu}{c}\,\vec{J} & \text{(C.17)} \end{aligned}$$

dove ρ e $\vec{J}$ sono, rispettivamente, la densità di carica e la densità di corrente di *conduzione*.

Nel caso che ci interessa, cioè quello di una carica e in moto con velocità costante $\vec{v}$, scelte senza perdita di generalità le origini degli assi e del tempo in modo che per $t = 0$ la carica sia nell'origine, risulta evidentemente che

$$\begin{aligned} \rho(\vec{x}, t) &= e\,\delta^3(\vec{x} - \vec{v}\,t) & \text{(C.18)}\\ \vec{J}(\vec{x}, t) &= \vec{v}\,\rho(\vec{x}, t) & \text{(C.19)} \end{aligned}$$

per cui l'equazione (C.17) diviene

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\,\mu}{c}\,\vec{J} = -\frac{4\pi}{\epsilon}\,\rho\,\cdot\,\frac{n^2}{c}\,\vec{v} \tag{C.20}$$

ed il confronto con la (C.16), essendo $\frac{n^2}{c}\,\vec{v}$ ovviamente una costante, conduce naturalmente alla seguente relazione fra i potenziali

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = n^2\,\vec{\beta}\,\Phi(\vec{x}, t) \tag{C.21}$$

per cui, nel seguito, ci limiteremo a studiare solo l'equazione (C.16) per il potenziale scalare, a cui occorre aggiungere la condizione di Lorentz (C.9) che diventa

$$\begin{aligned} div\,\vec{A} + \frac{n^2}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad &\Rightarrow \quad div\left(n^2\,\frac{\vec{v}}{c}\,\Phi\right) + \frac{n^2}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0\\ &\Rightarrow \quad \vec{v}\cdot\vec{\nabla}\Phi + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 & \text{(C.22)} \end{aligned}$$

Siccome sia ϵ che μ e quindi n, in un mezzo omogeneo e isotropo, dipendono comunque, in generale, dalla frequenza, è opportuno studiare l'equazione (C.16) nel dominio delle frequenze e questo corrisponde a studiarne piuttosto la trasformata di Fourier[370].

[370]Ricordiamo che se $f = f(t)$ è una funzione sommabile secondo Lebesgue (integrabile in

Indicando allora con $\hat{\Phi} \equiv \hat{\Phi}(\vec{x}, \omega)$ la trasformata di Fourier rispetto alla coordinata temporale del potenziale scalare $\Phi \equiv \Phi(\vec{x}, t)$, data la linearità dell'equazione (C.16), deve evidentemente valere la seguente equazione

$$\nabla^2 \hat{\Phi} + \frac{n^2}{c^2}\, \omega^2 \hat{\Phi} = -\frac{4\pi}{\epsilon}\, \hat{\rho} \tag{C.25}$$

dove, in accordo con la definizione (C.24), abbiamo posto

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}(\vec{x}, \omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dt\, \Phi(\vec{x}, t)\, e^{-i\omega t} && \text{(C.26)} \\ \hat{\rho}(\vec{x}, \omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dt\, \rho(\vec{x}, t)\, e^{-i\omega t} && \text{(C.27)} \end{aligned}$$

Per quanto riguarda la trasformata di Fourier della distribuzione di carica $\hat{\rho}$, assumendo senza perdita di generalità che la particella viaggi lungo la direzione dell'asse z, i.e. che sia

$$\rho(\vec{x}, t) = e\, \delta^3(\vec{x} - \vec{v}\ t) = e\, \delta(x)\, \delta(y)\, \delta(z - vt) \tag{C.28}$$

risulta che

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(\vec{x}, \omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dt\, \rho(\vec{x}, t)\, e^{-i\omega t} = \frac{e}{\sqrt{2\pi}}\, \delta(x)\delta(y) \int dt\, e^{-i\omega t}\, \delta(z - vt) = \\ &= \frac{e}{v\sqrt{2\pi}}\, \delta(x)\, \delta(y)\, e^{-i\frac{\omega z}{v}} && \text{(C.29)} \end{aligned}$$

Essendo evidentemente il problema dotato di simmetria cilindrica[371], possiamo riscrivere la $\hat{\rho}$ nel modo seguente

$$\hat{\rho}(r, z, \phi, \omega) = \frac{e}{v\sqrt{2\pi}}\, \frac{\delta(r)}{2\pi r}\, e^{-i\frac{\omega z}{v}} \tag{C.33}$$

---

modulo), allora essa può essere scritta (a parte, al più, un'infinità numerabile di punti) nel modo seguente

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega\, \hat{f}(\omega)\, e^{i\omega t} \tag{C.23}$$

dove $\hat{f}(\omega)$ è la trasformata di Fourier della funzione f data, definita come

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dt\, f(t)\, e^{-i\omega t} \tag{C.24}$$

[371] Osserviamo infatti che

$$\delta(x)\, \delta(y) dx\, dy = \frac{\delta(r)}{2\pi r}\, r\, dr\, d\phi \tag{C.30}$$

infatti, data una qualsiasi funzione continua nel piano x, y, risulta dalla definizione che

$$\int dx\, dy\, f(x, y)\, \delta(x)\, \delta(y) = f(0, 0) \tag{C.31}$$

e quindi l'equazione da risolvere per il potenziale $\hat{\Phi}$, diventa adesso la seguente

$$\nabla^2\hat{\Phi} + \frac{n^2\,\omega^2}{c^2}\,\hat{\Phi} = -\frac{4\pi}{\epsilon}\,\frac{e}{v\sqrt{2\pi}}\,\frac{\delta(r)}{2\pi r}\,e^{-i\frac{\omega z}{v}} = -\frac{2e}{\epsilon v\sqrt{2\pi}}\,\frac{\delta(r)}{r}\,e^{-i\frac{\omega z}{v}} \tag{C.34}$$

Ricordiamo adesso che il laplaciano in coordinate cilindriche si scrive nel modo seguente

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{C.35}$$

e quindi la (C.34) diventa

$$\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2\hat{\Phi}}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\hat{\Phi}}{\partial z^2} + \frac{n^2\,\omega^2}{c^2}\,\hat{\Phi} = -\frac{2e}{\epsilon v\sqrt{2\pi}}\,\frac{\delta(r)}{r}\,e^{-i\frac{\omega z}{v}} \tag{C.36}$$

Come ogni equazione differenziale lineare non omogenea, la soluzione generale sarà la somma di una soluzione particolare con una qualsiasi funzione dello spazio vettoriale lineare delle soluzioni dell'equazione omogenea associata.

Vista la simmetria del problema e la struttura del termine non omogeneo, cerchiamo la soluzione particolare della forma seguente

$$\hat{\Phi} = u(r)\,e^{-i\frac{\omega z}{v}} \tag{C.37}$$

Sostituendo nella (C.36), si ottiene allora per la funzione u la seguente equazione differenziale

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} - \left(\frac{\omega}{v}\right)^2 u + \frac{n^2\,\omega^2}{c^2}\,u = -\frac{2e}{\epsilon v\sqrt{2\pi}}\,\frac{\delta(r)}{r} \tag{C.38}$$

i.e., ponendo

$$s^2 \equiv -\frac{\omega^2}{v^2} + \frac{n^2\omega^2}{c^2} = \frac{\omega^2}{v^2}\left(n^2\beta^2 - 1\right) \equiv -\sigma^2 \tag{C.39}$$

risulta

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} + s^2\,u = -\frac{2e}{\epsilon v\sqrt{2\pi}}\,\frac{\delta(r)}{r} \tag{C.40}$$

---

ed è altresì

$$f(0,0) = \int F(r,\phi)\frac{\delta(r)}{2\pi r}\,r\,dr\,d\phi \tag{C.32}$$

dove

$$F(r,\phi) \equiv f(r\,cos\phi, r\,sin\phi)$$

Per risolvere questa equazione differenziale, cominciamo distinguendo il caso di basse velocità ($\beta n < 1$) da quello di alte velocità ($\beta n > 1$). Per basse velocità della particella carica avremo che

$$s^2 = \frac{\omega^2}{v^2}\left(n^2\beta^2 - 1\right) \equiv -\sigma^2 < 0 \tag{C.41}$$

per cui l'equazione da risolvere diventa piuttosto

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} - \sigma^2\, u = -\frac{2e}{\epsilon v\sqrt{2\pi}}\,\frac{\delta(r)}{r} \tag{C.42}$$

dove σ^2 è ovviamente positivo e, per definizione, assumeremo altresì che $\sigma = +\sqrt{\sigma^2}$ sia anch'esso positivo.
Effettuiamo allora il seguente cambiamento di variabile

$$R = \sigma\, r \qquad \Rightarrow \qquad dr = \frac{dR}{\sigma} \tag{C.43}$$

Il primo membro dell'equazione (C.42) diventa allora il seguente

$$\sigma^2\,\frac{d^2u}{dR^2} + \frac{\sigma}{r}\,\sigma\,\frac{du}{dR} - \sigma^2\, u \tag{C.44}$$

mentre, usando il fatto che $\delta(x/\alpha) = \alpha\,\delta(x)$, è evidente che

$$\frac{\delta(r)}{r} = \frac{\sigma}{R}\,\delta(R/\sigma) = \sigma^2\,\frac{\delta(R)}{R} \tag{C.45}$$

per cui, semplificando, ecco che l'equazione per la funzione u nella nuova variabile R diventa, in definitiva, la seguente

$$\frac{d^2u}{dR^2} + \frac{1}{R}\frac{du}{dR} - u = -\frac{2e}{\epsilon v\sqrt{2\pi}}\,\frac{\delta(R)}{R} \tag{C.46}$$

A parte, dunque, $R = 0$, altrove la funzione u soddisfa l'equazione di Bessel $modificata$ che, ricordiamo, è la seguente

$$\frac{d^2W}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dW}{dx} - \left(1 + \frac{m^2}{x^2}\right) W = 0 \tag{C.47}$$

dove m è un numero reale qualsiasi (nel nostro caso, $m = 0$).
Soluzioni indipendenti dell'equazione di Bessel modificata sono le funzioni $I_m(x)$ e $K_m(x)$, legate alle soluzioni dell'equazione di Bessel ordinaria[372] dalle relazioni

$$I_m(z) \;\equiv\; e^{-\frac{1}{2}im\pi} J_m(ze^{\frac{i\pi}{2}}), \qquad (-\pi < arg\, z \leq \pi/2) \tag{C.55}$$

[372]Ricordiamo a questo proposito che l'equazione di Bessel ha la forma seguente

$$\frac{d^2W}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dW}{dx} + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right) W = 0 \tag{C.48}$$

$$I_m(z) \equiv e^{\frac{3}{2}im\pi} J_m(ze^{\frac{-3i\pi}{2}}), \qquad (\pi/2 < arg\, z \leq \pi) \tag{C.56}$$

$$K_m(z) \equiv \frac{i\pi}{2}\, e^{\frac{1}{2}im\pi}\, H_m^{(1)}(ze^{\frac{i\pi}{2}}) \qquad (-\pi < arg\, z \leq \pi/2) \tag{C.57}$$

$$K_m(z) \equiv -\frac{i\pi}{2}\, e^{-\frac{1}{2}im\pi}\, H_m^{(2)}(ze^{\frac{-i\pi}{2}}) \qquad (\pi/2 < arg\, z \leq \pi) \tag{C.58}$$

Queste funzioni, per x reale e nel caso particolare che ci interessa in cui $m = 0$, sono evidentemente tali che

$$I_0(x) = J_0(ix); \qquad K_0(x) = \frac{i\pi}{2}\, H_0^{(1)}(ix) \tag{C.59}$$

La funzione $u(R)$ sarà quindi, a priori, per $R \neq 0$, una combinazione lineare delle funzioni I_0 e K_0, tale da soddisfare[373] la condizione al contorno descritta dalla presenza della delta all'origine.

---

dove m è un numero reale qualsiasi. Sue soluzioni sono le funzioni di Bessel di prima specie $J_{\pm m}(x)$, quelle di seconda specie $Y_m(x)$, talvolta chiamate anche funzioni di Weber, e quelle di terza specie, o funzioni di Hankel, non indipendenti fra loro ...

Risulta infatti (dove è inteso che si usa l'espressione limite se m è intero)

$$Y_m(x) = \frac{J_m(x)\, cos\, m\pi \; - \; J_{-m}(x)}{sin\, m\pi} \tag{C.49}$$

$$H_m^{(1)}(x) = J_m(x) + iY_m(x); \qquad H_m^{(2)}(x) = J_m(x) - iY_m(x) \tag{C.50}$$

Asintoticamente, per $x \to \infty$, si ha

$$J_m(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi\, x}}\, cos\left(x - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \qquad Y_m(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi\, x}}\, sin\left(x - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \tag{C.51}$$

$$H_m^{(1)}(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi\, x}}\, e^{i(x - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \qquad H_m^{(2)}(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi\, x}}\, e^{-i(x - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \tag{C.52}$$

mentre, per $x \to 0$, risulta

$$J_m(z) \approx \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^m}{\Gamma(m+1)}, \qquad m \neq -1, -2, -3, ... \tag{C.53}$$

$$Y_0(x) \approx \frac{2}{\pi}\, ln\, x; \qquad Y_m(x) \approx -\frac{1}{\pi}\, \Gamma(m)\, \left(\frac{1}{2}x\right)^{-m} \tag{C.54}$$

[373]Frank e Tamm, nel loro articolo già citato, per esplicitare la soluzione, usano l'argomento seguente. Nell'equazione (C.46) di partenza

$$\frac{d^2u}{dR^2} + \frac{1}{R}\frac{du}{dR} - u \equiv \frac{1}{R}\, \frac{d}{dR}\left(R\, \frac{dU}{dR}\right) - u = -\frac{2e}{\epsilon v\sqrt{2\pi}}\, \frac{\delta(R)}{R} \tag{C.60}$$

iniziano regolarizzando la delta attraverso la sostituzione seguente

$$\frac{\delta(R)}{2\pi\, R} \longrightarrow f(R) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\, \rho_0^2} & se \;\; R < \rho_0 \\ 0 & se \;\; R > \rho_0 \end{cases} \tag{C.61}$$

Per esplicitare la funzione $u(R)$ procediamo usando un'analogia ben nota. Consideriamo il problema del potenziale elettrostatico $V(\vec{r})$ prodotto nello spazio da un filo carico, con distribuzione statica di carica che dipende cosinusoidalmente dalla coordinata z, i.e. tale che

$$\rho(x,y,z) = \lambda\ \delta(x)\,\delta(y)\ cos\,\alpha z \tag{C.66}$$

dove λ è l'ampiezza della densità lineare di carica mentre α^{-1} è la sua "lunghezza d'onda". Dall'elettrostatica sappiamo che

$$\nabla^2 V = -4\pi\,\rho \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 V = -4\pi\lambda\ \delta(x)\,\delta(y)\,cos\,\alpha z \tag{C.67}$$

Trattandosi di una equazione lineare a coefficienti reali, possiamo sostituirla con

$$\nabla^2 V = -4\pi\lambda\ \delta(x)\,\delta(y)\ e^{i\alpha z} \tag{C.68}$$

ricordando che dovremo poi prendere la parte reale della soluzione.
Poichè il problema ha simmetria cilindrica intorno all'asse z, passiamo a coordinate cilindriche, i.e. consideriamo l'equazione

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi\,\lambda\,\frac{\delta(r)}{2\pi\, r}\ e^{i\alpha z} \tag{C.69}$$

dove abbiamo usato la solita sostituzione $\delta(x)\,\delta(y) = \frac{\delta(r)}{2\pi r}$.
Per ragioni di simmetria, il potenziale V non dipenderà, evidentemente, dall'angolo azimutale ϕ: data poi la forma del termine noto, cerchiamone una soluzione del tipo seguente:

$$V(r,z) = u(r)\,e^{i\alpha z} \tag{C.70}$$

Integrando l'equazione così ottenuta sulla superficie del cerchio di raggio ρ_0 e passando poi al limite per $\rho_0 \to 0$, ricordando che le funzioni di Bessel soddisfano la relazione

$$\lim_{x\to 0} x\,W(x) = 0 \tag{C.62}$$

concludono che deve aversi

$$\lim_{R\to 0} R\,\frac{du}{dR} = -\frac{2e}{\epsilon v\sqrt{2\pi}} \tag{C.63}$$

D'altronde risulta

$$\begin{aligned}\lim_{R\to 0} R\,\frac{dH_0^{(1),(2)}(iR)}{dR} &= \lim_{x\to 0} x\,\frac{dH_0^{(1),(2)}(x)}{dx} = \\ = \lim_{x\to 0} x\,\frac{dJ_0(x)}{dx} \pm i \lim_{x\to 0} x\,\frac{dN_0(x)}{dx} &= 0 \pm i\,\frac{2}{\pi}\end{aligned} \tag{C.64}$$

e quindi ne concludono finalmente che deve risultare

$$u(R) = i\frac{\pi}{2}\,\frac{2e}{\epsilon v\sqrt{2\pi}}\,H_0^{(1)}(iR) = i\frac{\pi e}{\epsilon v\sqrt{2\pi}}\,H_0^{(1)}(i\sigma r) \tag{C.65}$$

In questo caso, la funzione $u(r)$ dovrà soddisfare l'equazione

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) - \alpha^2 u = -2\lambda\,\frac{\delta(r)}{r} \tag{C.71}$$

ovvero, con la solita sostituzione

$$R = \alpha\, r \tag{C.72}$$

effettuando la derivata, si ha

$$\frac{d^2u}{dR^2} + \frac{1}{R}\frac{du}{dR} - u = -2\lambda\,\frac{\delta(R)}{R} \tag{C.73}$$

che è appunto un'equazione dello stesso tipo di quella che stavamo considerando nel problema dell'emissione Cerenkov.
Ma in questo caso, la soluzione è ben nota !
Sappiamo infatti dall'elettrostatica che

$$V(\vec{x}) = \int d^3y\;\frac{\rho(\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|} \tag{C.74}$$

ovvero

$$V(r,\phi,z) = \lambda\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi\;\frac{cos\,\alpha\xi}{\sqrt{r^2+(\xi-z)^2}} \tag{C.75}$$

Effettuiamo allora il cambiamento di variabile

$$\xi - z = r\,\eta \qquad\Rightarrow\qquad d\xi = r\,d\eta \tag{C.76}$$

e si ha

$$\begin{aligned} V = V(r,\phi,z) &= \lambda\int_{-\infty}^{+\infty} r\,d\eta\,\frac{cos\,(\alpha z+\alpha r\eta)}{r\sqrt{1+\eta^2}} \\ &= \lambda\;cos\,\alpha z\int_{-\infty}^{+\infty} d\eta\,\frac{cos\,(\alpha r\eta)}{\sqrt{1+\eta^2}}\; - \lambda\;sin\,\alpha z\int_{-\infty}^{+\infty} d\eta\,\frac{sin\,(\alpha r\eta)}{\sqrt{1+\eta^2}} \end{aligned} \tag{C.77}$$

Il secondo integrale, evidentemente, è nullo perchè la funzione integranda è dispari, dunque, ricordando che risulta

$$K_0(x) = \int_0^{+\infty} dt\;\frac{cos(xt)}{\sqrt{1+t^2}} \qquad x>0 \tag{C.78}$$

ne segue evidentemente che il potenziale cercato è così fatto

$$V(r,\phi,z) = \lambda\, cos(\alpha z)\; 2K_0(\alpha r) \tag{C.79}$$

Confrontando questo risultato con la (C.70), ne segue allora immediatamente che la soluzione $u(R)$ dell'equazione

$$\frac{d^2u}{dR^2} + \frac{1}{R}\frac{du}{dR} - u = -2\lambda\,\frac{\delta(R)}{R} \tag{C.80}$$

deve essere appunto la funzione

$$u(R) = 2\lambda\; K_0(R) \equiv 2\lambda\,\frac{i\pi}{2}\,H_0^{(1)}(iR) \tag{C.81}$$

Possiamo ritornare adesso al caso che ci interessa, dove l'equazione per la u era la (C.46), i.e.

$$\frac{d^2u}{dR^2} + \frac{1}{R}\frac{du}{dR} - u = -\frac{2e}{\epsilon v\sqrt{2\pi}}\,\frac{\delta(R)}{R} \tag{C.82}$$

Evidentemente, in accordo con il risultato (C.65) di Frank e Tamm, si avrà

$$u(R) = i\frac{\pi}{2}\,\frac{2e}{\epsilon v\sqrt{2\pi}}\,H_0^{(1)}(iR) = i\frac{\pi e}{\epsilon v\sqrt{2\pi}}\,H_0^{(1)}(i\sigma r) \tag{C.83}$$

da cui, per la (C.37), ricaviamo che l'espressione per la trasformata di Fourier temporale del potenziale scalare è la seguente

$$\hat{\Phi} = i\frac{\pi e}{\epsilon v\sqrt{2\pi}}\,H_0^{(1)}(i\sigma r)\; e^{-i\frac{\omega z}{v}} \tag{C.84}$$

e quindi, facendo l'antitrasformata di Fourier della $\hat{\Phi}$, abbiamo infine che il potenziale scalare ha la seguente espressione

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int d\omega\;\hat{\Phi}\,e^{i\omega t} = \frac{i\pi e}{2\pi\, v}\int d\omega\,\frac{1}{\epsilon}\,H_0^{(1)}(i\sigma r)\,e^{i\omega t}\,e^{-i\frac{\omega z}{v}} = \\ &= \frac{ie}{2v}\int d\omega\,\frac{1}{\epsilon}\,H_0^{(1)}(i\sigma r)\,e^{i\omega(t-\frac{z}{v})} \end{aligned} \tag{C.85}$$

da cui, per la (C.21), otteniamo altresì che per il potenziale vettore[374] si ha

$$\vec{A} = \epsilon\mu\frac{\vec{v}}{c}\,\Phi = \frac{ie}{2c}\,\vec{k}\int d\omega\,\mu\,H_0^{(1)}(i\sigma r)\,e^{i\omega(t-\frac{z}{v})} \tag{C.88}$$

[374] Verifichiamo per completezza che i potenziali Φ ed $\vec{A}$ così ottenuti, soddisfano effettivamente la gauge di Lorentz (C.9) la quale, come visto sopra, nel caso presente, è diventata, per il solo potenziale scalare, la condizione che segue

$$\begin{aligned} div\,\vec{A} + \frac{n^2}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0 \quad &\Rightarrow \quad div\left(n^2\frac{\vec{v}}{c}\,\Phi\right) + \frac{n^2}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0 \\ &\Rightarrow \quad \vec{v}\cdot\vec{\nabla}\Phi + \frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0 \end{aligned} \tag{C.86}$$

Si ha infatti, data la (C.85), che, per ogni componente di Fourier, risulta

$$\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\Phi + \frac{\partial\Phi}{\partial t} = v\,\frac{\partial\Phi}{\partial z} + \frac{\partial\Phi}{\partial t} = v\cdot\left(-\frac{i\omega}{v}\right)\Phi + i\omega\,\Phi = 0 \tag{C.87}$$

dove abbiamo indicato con $\vec{k}$ il versore di propagazione della particella, definito appunto come

$$\vec{k} \equiv \frac{\vec{v}}{v} \tag{C.89}$$

Osserviamo adesso che per grandi valori di r, quando $\sigma\, r >> 1$, siccome per la (C.52) risulta

$$H_0^{(1)}(x) \quad \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} \quad \sqrt{\frac{2}{\pi\, x}}\; e^{i(x-\frac{\pi}{4})} \tag{C.90}$$

ecco che avremo

$$\begin{aligned} H_0^{(1)}(i\sigma\, r) \quad &\overset{x\to\infty}{\longrightarrow} \quad \sqrt{\frac{2}{\pi\, i\sigma\, r}}\; e^{i(i\sigma\, r)}\; e^{-i\pi/4} = \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma\, r}}\; \frac{1}{\sqrt{e^{i\pi/2}}}\; e^{-\sigma\, r}\; e^{-i\pi/4} = \\ &= e^{-i\pi/2}\sqrt{\frac{2}{\pi\sigma\, r}}\; e^{-\sigma\, r} = -i\sqrt{\frac{2}{\pi\sigma\, r}}\;\; e^{-\sigma\, r} \end{aligned} \tag{C.91}$$

Questo significa che i potenziali e dunque i campi decresceranno esponenzialmente dall'asse del moto, per cui non c'è da aspettarsi alcun irraggiamento per basse velocità (stiamo qui considerando fenomeni coerenti, che non hanno dunque nulla che fare, per esempio, con la radiazione di bremsstahlung, etc ...).

Il risultato cambia completamente nel caso di alte velocità della particella carica, tali che, nel dominio di frequenze considerato, risulti $\beta n > 1$.
L'equazione radiale, come abbiamno già visto, diventa allora

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\,\frac{du}{dr} + s^2u = -\frac{2e}{\epsilon v\sqrt{2\pi}}\,\frac{\delta(r)}{r} \tag{C.92}$$

dove adesso

$$s^2 = \frac{\omega^2}{v^2}\left(\beta^2 n^2 - 1\right) > 0 \tag{C.93}$$

Facendo la solita sostituzione

$$R = s\, r \qquad\qquad (s > 0) \tag{C.94}$$

otteniamo l'equazione

$$\frac{d^2u}{dR^2} + \frac{1}{R}\,\frac{du}{dR} + u = -\frac{2e}{\epsilon v\sqrt{2\pi}}\,\frac{\delta(R)}{R} \tag{C.95}$$

che, per $R \neq 0$, coincide adesso con l'equazione di Bessel ordinaria per $m = 0$.

Per risolvere l'equazione in questione, l'analogia che stavolta possiamo usare è quella con un filo infinito uniformemente carico, in cui la densità di carica dipenda però cosinusoidalmente dal tempo, i.e. tale che

$$\rho = \lambda\, \delta(x)\, \delta(y)\; e^{i\omega t} \tag{C.96}$$

Per il potenziale scalare generato da questa distribuzione, avremo

$$\nabla^2 V - \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -4\pi\,\rho = \lambda\, \delta(x)\, \delta(y)\; e^{i\omega t} \tag{C.97}$$

Il problema ha, di nuovo, simmetria cilindrica ed è evidente che, per simmetria, il potenziale V non potrà dipendere né dall'angolo azimutale ϕ né dalla coordinata z, ma solo dalla coordinata radiale r e dal tempo.
Cercando allora il potenziale V della forma seguente

$$V = u(r)\, e^{i\omega t} \tag{C.98}$$

abbiamo che la funzione u deve soddisfare l'equazione

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r}\,\frac{du}{dr} + \frac{\omega^2}{c^2}\, u = -4\pi\,\lambda\,\frac{\delta(r)}{r} \tag{C.99}$$

ovvero, ponendo $R = \frac{\omega}{c}\, r$, u deve soddisfare l'equazione

$$\frac{d^2 u}{dR^2} + \frac{1}{R}\,\frac{du}{dR} + u = -4\pi\,\lambda\,\frac{\delta(R)}{R} \tag{C.100}$$

Questa equazione, che formalmente è come quella che dobbiamo risolvere per il potenziale di una particella "veloce" in un mezzo materiale, descrive onde cilindriche intorno all'asse z, aventi pulsazione ω. La soluzione uscente[375] è

$$u(r)_{out} = -i\pi\,\lambda\; H_0^{(2)}(\omega r/c) \tag{C.104}$$

[375] Infatti, per grandi valori di r, risulta

$$H_0^{(2)}(\omega r/c) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi\omega r/c}}\, e^{-i\omega r/c}\, e^{i\pi/4} \tag{C.101}$$

e dunque

$$V \approx \sqrt{\frac{2}{\pi\omega r/c}}\, e^{i\pi/4}\, e^{-i\omega r/c}\, e^{i\omega t} \tag{C.102}$$

Evidentemente quindi le superfici di fase costante sono descritte dall'equazione

$$\omega t - \omega r/c = cost \tag{C.103}$$

che, al crescere di t, si muovono nel verso positivo di r, descrivendo appunto onde uscenti ...

mentre quella entrante è la sua complessa coniugata, i.e.

$$u(r)_{in} = i\pi\,\lambda\; H_0^{(1)}(\omega r/c) \tag{C.105}$$

Ritornando dunque al nostro problema iniziale e scegliendo, per ragioni fisiche, la soluzione uscente, ecco che possiamo scrivere

$$u(r) = -i\pi\,\frac{e}{\epsilon v\sqrt{2\pi}}\,H_0^{(2)}(sr) \tag{C.106}$$

Come si vede, rispetto alla bassa velocità, nella soluzione è cambiato sia l'argomento della funzione di Hankel che è adesso reale, mentre prima era immaginario puro, come le funzioni di Hankel stesse, che si sono scambiate[376] fra loro.
Risulta allora

$$\hat{\Phi} = -i\pi\,\frac{e}{\epsilon v\sqrt{2\pi}}\,H_0^{(2)}(sr)\,e^{-i\frac{\omega z}{v}} \tag{C.107}$$

$$\hat{\vec{A}} = \epsilon\mu\frac{\vec{v}}{c}\,\hat{\Phi} \tag{C.108}$$

per cui abbiamo infine che

$$\begin{aligned}\Phi(r,\phi,z) &= -i\pi\,\frac{e}{v\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,2\int_0^{+\infty} d\omega\,\frac{1}{\epsilon}\,e^{i\omega t}\,H_0^{(2)}(sr)\;e^{-i\frac{\omega z}{v}} = \\ &= -\frac{ie}{v}\int_0^{+\infty} d\omega\,\frac{1}{\epsilon}\,e^{i\omega t}\,H_0^{(2)}(sr)\;e^{-i\frac{\omega z}{v}}\end{aligned} \tag{C.109}$$

$$\begin{aligned}\vec{A}(r,\phi,z) &= -\frac{ie}{v}\,\frac{\vec{v}}{c}\int_0^{+\infty} d\omega\,\epsilon\mu\,\frac{1}{\epsilon}\,e^{i\omega t}\,H_0^{(2)}(sr)\;e^{-i\frac{\omega z}{v}} = \\ &= -\frac{ie}{c}\,\vec{k}\int_0^{+\infty} d\omega\,\mu\;e^{i\omega t}\,H_0^{(2)}(sr)\;e^{-i\frac{\omega z}{v}}\end{aligned} \tag{C.110}$$

dove $\vec{k} = (0,0,1)$ è il versore dell'asse z, asse lungo il quale avviene il moto della particella.
Visto il ruolo che gioca nella soluzione (C.109) e (C.110) la funzione

$$f = e^{i\omega t}\,H_0^{(2)}(sr)\;e^{-i\frac{\omega z}{v}} \tag{C.111}$$

vediamo che forma essa assume per grandi valori di r, cioè in zona asintotica.
Per quanto già detto circa la forma asintotica delle funzioni di Hankel, evidentemente, si avrà

$$f \approx e^{i\omega t}\;e^{-i\frac{\omega z}{v}}\;\sqrt{\frac{2}{\pi sr}}\,e^{-i(sr-\pi/4)} \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi sr}}\,e^{-i\chi} \tag{C.112}$$

[376] Ricordiamo che, per argomenti reali, $H_0^{(1)}(x) = [H_0^{(2)}(x)]^*$, come è evidente dalla definzione (C.50).

dove abbiamo introdotto la fase χ, definita come

$$\begin{aligned}\chi &\equiv \frac{\pi}{4}+\omega(t-\frac{z}{v})-sr=\frac{\pi}{4}+\omega(t-\frac{z}{v})-\frac{\omega}{v}r\sqrt{\beta^2n^2-1}= \\ &= \frac{\pi}{4}+\omega t-\frac{\omega}{v}\left(z+r\sqrt{\beta^2n^2-1}\right)\end{aligned} \tag{C.113}$$

Raccogliendo ancora βn e definendo l'angolo Cerenkov θ_c nel modo seguente

$$cos\,\theta_c=\frac{1}{\beta n} \qquad \Rightarrow \qquad sin\,\theta_c=\sqrt{1-\frac{1}{\beta^2n^2}} \tag{C.114}$$

risulta

$$\begin{aligned}\chi &= \frac{\pi}{4}+\omega t-\frac{\omega\beta n}{v}\left(z\,cos\,\theta_c+r\,sin\,\theta_c\right)= \\ &= \frac{\pi}{4}+\omega t-\frac{\omega n}{c}\left(z\,cos\,\theta_c+r\,sin\,\theta_c\right)\end{aligned} \tag{C.115}$$

e questa fase è, evidentemente, quella di un'onda che si propaga con velocità

$$w=\frac{c}{n} \tag{C.116}$$

nella direzione $(cos\theta_c, sin\theta_c)$ del piano (z,r) !

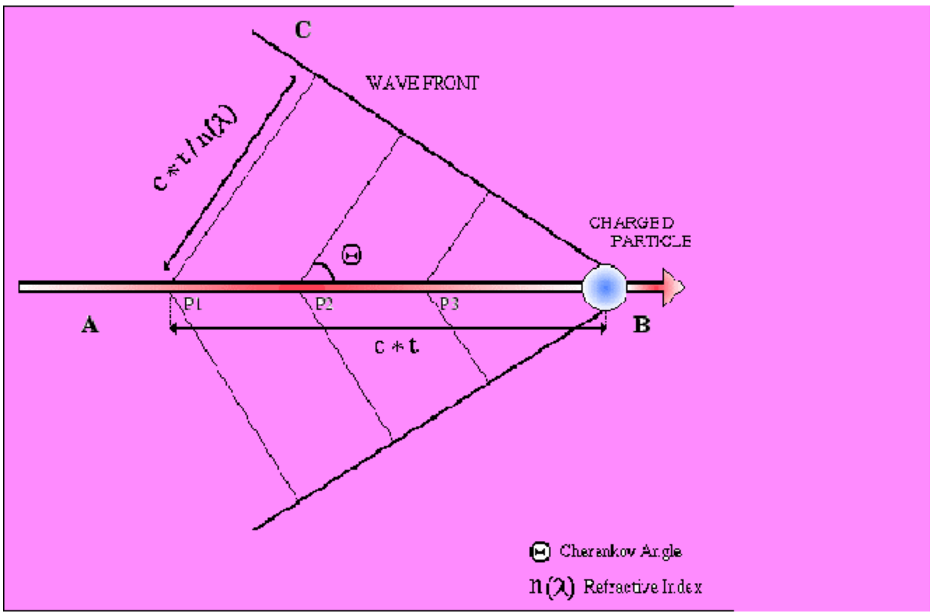


Figure 31: *Caratteristiche direzionali dell'emissione Cerenkov*

Volendo adesso determinare quantitativamente l'energia elettromagnetica così irraggiata, consideriamo una superficie cilindrica centrata intorno alla traiettoria della particella, di raggio r e lunghezza L e quindi integriamo nel tempo il flusso del vettore di Poynting attraverso la superficie laterale della superficie cilindrica, facendo tendere poi $r \to \infty$. L'energia irraggiata sarà dunque

$$W = 2\pi\, r\, L \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, \frac{c}{4\pi}\, [\vec{E} \times \vec{H}]_r \tag{C.117}$$

dove i campi sono ovviamente reali e se, come nel nostro caso, vogliamo mantenere la loro forma complessa, allora avremo

$$W = 2\pi\, r\, L \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, \frac{c}{8\pi}\, [\vec{E} \times \vec{H}^*]_r \tag{C.118}$$

Occupiamoci dunque di valutare la componente radiale del vettore di Poynting. Ricordiamo a questo proposito che, in coordinate cilindriche, i tre versori della terna destrorsa sono $(\vec{e}_r, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z)$, per cui risulta

$$[\vec{E} \times \vec{H}^*]_r = E_\phi\, H_z^* \; - \; E_z\, H_\phi^* \tag{C.119}$$

Volendo calcolare i campi, dobbiamo ripartire, ovviamente, dalle equazioni

$$\vec{E} = -\nabla\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}; \qquad\qquad \vec{H} = \frac{1}{\mu}\, rot\, \vec{A} \tag{C.120}$$

per cui, ricordando che il gradiente in coordinate cilindriche (r, ϕ, z) si scrive nel modo seguente

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial r},\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi},\ \frac{\partial}{\partial z} \right) \tag{C.121}$$

poiché il potenziale vettore $\vec{A}$ ha solo la componente z (ricordiamo infatti che esso è proporzionale al potenziale scalare attraverso un termine lineare nella velocità $\vec{v}$ della particella che, per definizione, ha quindi solo la componente z) risulta

$$\vec{E} = \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) \vec{e}_r + \left(-\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right) \vec{e}_\phi + \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_z}{\partial t} \right) \vec{e}_z \tag{C.122}$$

e siccome Φ, come sappiamo, non dipende dall'angolo azimutale, in definitiva risulta[377]

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) \vec{e}_r - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial A_z}{\partial t} \right) \vec{e}_z \tag{C.123}$$

[377]Questo risultato implica altresì che la radiazione Cerenkov sia polarizzata linearmente, con il campo elettrico nel piano individuato dalla direzione di propagazione dell'onda e da quella di moto della particella carica.

Veniamo adesso al campo magnetico e partiamo dall'espressione del rotore di un campo vettoriale in coordinate cilindriche. Risulta

$$\nabla \times \vec{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\phi + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rA_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \phi}\right)\vec{e}_z \quad (C.124)$$

Di nuovo, avendo il potenziale vettore solo la componente z ed essendo questa indipendente dall'angolo azimutale ϕ, risulta

$$\vec{B} = \mu\vec{H} = \nabla \times \vec{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial r}\,\vec{e}_\phi \quad (C.125)$$

Ne segue dunque che la componente radiale del vettore di Poynting di cui alla (C.119), si riduce a

$$[\vec{E} \times \vec{H}^*]_r = -\;E_z\,H^*_\phi \quad (C.126)$$

Iniziamo dunque valutando E_z. Dalle (C.109) e (C.110) si ricava

$$\begin{aligned} E_z &= -\frac{\partial}{\partial z}\left[-\frac{ie}{v}\int_0^{+\infty} d\omega\,\frac{1}{\epsilon}\,e^{i\omega t}\,H_0^{(2)}(sr)\;e^{-i\frac{\omega z}{v}}\right] \\ &\quad -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left[-\frac{ie}{c}\int_0^{+\infty} d\omega\,\mu\,e^{i\omega t}\,H_0^{(2)}(sr)\;e^{-i\frac{\omega z}{v}}\right] = \\ &= \int_0^{+\infty} d\omega\;e^{i\omega t}\,H_0^{(2)}(sr)\;e^{-i\frac{\omega z}{v}}\left[\frac{ie}{v\epsilon}\;\frac{-i\omega}{v} + \frac{ie}{c^2}\;i\omega\,\mu\right] \\ &= e\int_0^{+\infty}\omega\,d\omega\,\mu\;e^{i\omega t}\,H_0^{(2)}(sr)\;e^{-i\frac{\omega z}{v}}\left(\frac{1}{v^2\epsilon\mu} - \frac{1}{c^2}\right) \end{aligned} \quad (C.127)$$

ovvero

$$E_z = \frac{e}{c^2}\int_0^{+\infty}\omega\,d\omega\,\mu\;e^{i\omega t}\,H_0^{(2)}(sr)\;e^{-i\frac{\omega z}{v}}\left(\frac{1}{\beta^2 n^2} - 1\right) \quad (C.128)$$

che, in zona asintotica, diviene evidentemente

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{e}{c^2}\int_0^{+\infty}\omega\,d\omega\,\mu\;e^{i\omega t}\;e^{-i\frac{\omega z}{v}}\left(\frac{1}{\beta^2 n^2} - 1\right)\sqrt{\frac{2}{\pi s r}}\,e^{-i(sr-\pi/4)} = \\ &= \frac{e}{c^2}\sqrt{\frac{2}{\pi r}}\int_0^{+\infty}\omega\,d\omega\,\mu\;e^{i\chi}\left(\frac{1}{\beta^2 n^2} - 1\right)\frac{1}{\sqrt{s}} \end{aligned} \quad (C.129)$$

dove la fase χ è quella che abbiamo definito attraverso la (C.115), i.e.

$$\chi = \frac{\pi}{4} + \omega t - \frac{\omega}{v}\left(z + r\sqrt{\beta^2 n^2 - 1}\right) = \frac{\pi}{4} + \omega t - \frac{\omega}{w}\left(z\,cos\theta_c + r\,sin\theta_c\right) \quad (C.130)$$

Passiamo adesso a calcolare H_ϕ. Dalla (C.125), otteniamo

$$H_\phi \quad = \quad -\frac{1}{\mu}\,\frac{\partial A_z}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r}\left[-\frac{ie}{c}\int_0^{+\infty} d\omega\,\frac{1}{\mu}\; e^{i\omega t}\, H_0^{(2)}(sr)\; e^{-i\frac{\omega z}{v}}\right] \tag{C.131}$$

che, in zona asintotica, diviene

$$\begin{aligned} H_\phi &= \frac{ie}{c}\,\frac{\partial}{\partial r}\int_0^{+\infty} d\omega\,\frac{1}{\mu}\; e^{i\omega t}\, e^{-i\frac{\omega z}{v}}\,\sqrt{\frac{2}{\pi s r}}\, e^{-isr+i\pi/4} = \\ &= \frac{ie}{c}\int_0^{+\infty} d\omega\,\frac{1}{\mu}\; e^{i\omega t}\, e^{-i\frac{\omega z}{v}}\, e^{-isr+i\pi/4}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[-\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{sr^3}} - is\,\frac{1}{\sqrt{sr}}\right] \end{aligned} \tag{C.132}$$

Ma il primo termine nella parentesi quadra diminuisce con r più rapidamente del secondo, per cui potremo trascurarlo e scrivere finalmente

$$\begin{aligned} H_\phi &= \frac{ie}{c}\int_0^{+\infty} d\omega\,\frac{1}{\mu}\; e^{i\omega t}\, e^{-i\frac{\omega z}{v}}\, e^{-isr+i\pi/4}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[-is\,\frac{1}{\sqrt{sr}}\right] = \\ &= \frac{e}{c}\sqrt{\frac{2}{\pi r}}\int_0^{+\infty} d\omega\,\frac{1}{\mu}\,\sqrt{s}\; e^{i\chi} \end{aligned} \tag{C.133}$$

Avendo ottenuto le due componenti che ci interessavano del campo elettrico e di quello magnetico, possiamo passare a valutare la quantità (C.126), i.e.

$$[\vec{E}\times\vec{H}^*]_r = -\; E_z\, H_\phi^* \tag{C.134}$$

Risulta, per la (C.129) e la (C.130)

$$\begin{aligned} [\vec{E}\times\vec{H}^*]_r &= -\frac{e}{c^2}\sqrt{\frac{2}{\pi r}}\int_0^{+\infty} \omega\, d\omega\, \mu\; e^{i\chi}\left(\frac{1}{\beta^2 n^2}-1\right)\frac{1}{\sqrt{s}}\;\cdot \\ &\quad\cdot\;\frac{e}{c}\sqrt{\frac{2}{\pi r}}\int_0^{+\infty} d\omega'\,\frac{1}{\mu'}\,\sqrt{s'}\; e^{-i\chi'} = \\ &= \frac{e^2}{c^3}\,\frac{2}{\pi r}\int_0^{+\infty}\omega\, d\omega\,\mu\; e^{i\chi}\left(1-\frac{1}{\beta^2 n^2}\right)\frac{1}{\sqrt{s}}\cdot\int_0^{+\infty} d\omega'\,\frac{1}{\mu'}\,\sqrt{s'}\; e^{-i\chi'} \end{aligned} \tag{C.135}$$

Volendo l'energia irraggiata, come abbiamo già detto, occorre calcolare, secondo la (C.118), la quantità

$$W = 2\pi r L\int_{-\infty}^{+\infty} dt\frac{c}{8\pi}[\vec{E}\times\vec{H}^*]_r \tag{C.136}$$

Il tempo entra soltanto nelle fasi χ e χ', per cui l'integrale temporale si riduce a calcolare l'integrale

$$\int dt\; e^{i(\omega-\omega')t} = 2\pi\,\delta(\omega-\omega') \tag{C.137}$$

per cui, sostituendo questa espressione nella (C.136) ed effettuando quindi l'integrazione sulla $\delta(\omega - \omega')$, abbiamo infine che

$$\begin{aligned} W &= 2\pi r L \, \frac{c}{8\pi} \, \frac{e^2}{c^3} \, \frac{2}{\pi r} \, 2\pi \int_0^{+\infty} \omega \, d\omega \, \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right) = \\ &= L \, \frac{e^2}{c^2} \, \int_0^{+\infty} \omega \, d\omega \, \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right) \end{aligned} \tag{C.138}$$

e questo significa che l'energia emessa dalla particella nel mezzo materiale per unità di lunghezza e per unità di frequenza vale, evidentemente

$$\frac{d^2W}{dL \, d\omega} = \frac{e^2}{c^2} \, \omega \, sin^2\theta_c \tag{C.139}$$

Dividendo questa quantità per $\hbar\omega$, possiamo ottenere il numero di fotoni emessi per unità di lunghezza e di frequenza, che vale quindi

$$\frac{d^2N}{dL \, d\omega} = \frac{1}{\hbar\omega} \frac{d^2W}{dL \, d\omega} = \frac{e^2}{\hbar c^2} \, sin^2\theta_c = \frac{\alpha}{c} \, sin^2\theta_c \tag{C.140}$$

dove abbiamo fatto uso della definizione della costante di struttura fina

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \tag{C.141}$$

Volendo infine il numero di fotoni emessi per unità di lunghezza e per unità di energia, basta dividere l'espressione trovata ancora per $\hbar$ e si ha infine

$$\frac{d^2N}{dL \, dE} = \frac{d^2N}{dL \, d(\hbar\omega)} = \frac{\alpha}{\hbar c} \, sin^2\theta_c \tag{C.142}$$